ଟିପ୍ପଣୀ

୯

କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବ୍ୟବସ୍ଥା
(Cartesian System of Coordinates)

ତୁମେ ସିନେମା ହଲ, ଷ୍ଟାଡ଼ିୟମ୍ କିମ୍ବା ଟ୍ରେନରେ ତୁମର ସିଟ୍ (Seat) ଖୋଜିଥିବ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ସିଟ୍ H – 4 ଅର୍ଥ H ତମ ଧାଡ଼ିରେ ଚତୁର୍ଥ ସ୍ଥାନରେ ଥିବା ସିଟ, ଅନ୍ୟ କଥାରେ H ଓ 4 ତୁମ ସିଟ୍‌ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ । ଏହିପରି କୌଣସି ଏକ ଅବସ୍ଥିତିର ଜ୍ୟାମିତିକ ଧାରଣା (ବୀଜଗାଣିତିକ ଧାରଣା) ସଂଖ୍ୟା ଓ ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ।

କୌଣସି କଲୋନୀର ଚିତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ଘର (ଯାହାକି ଏକ ବିଶେଷ କ୍ରମରେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି), ରାସ୍ତା ଏବଂ ପାର୍କର ଅବସ୍ଥିତ ଦର୍ଶାଯାଇଥାଏ । ଏହା, ବୀଜଗାଣିତିକ ଅବଧାରଣାକୁ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ଯଥା ସରଳରେଖା, ବୃତ୍ତ ଏବଂ ବହୁଭୁଜ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପଣ କରାଯାଇପାରେ । ଗଣିତର ସେହି ଶାଖାର ଅଧ୍ୟୟନ, ଯାହା ବୀଜଗାଣିତିକ ଓ ଜ୍ୟାମିତିକ ଧାରଣା ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ସ୍ଥାପନ କରେ, ତାହାକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ବା ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ **ରେନେ ଡେକାର୍ଟେ**ଙ୍କ ନାମାନୁସାରେ କାର୍ଟେଜୀୟ ଜ୍ୟାମିତି କୁହାଯାଏ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ, ଆମେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ମୌଳିକତା ଏବଂ ଜ୍ୟାମିତିରେ ସରଳରେଖାର ଧାରଣା ଏବଂ ଏହାର ବୀଜଗାଣିତକ ପରିପ୍ରକାଶ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ପାଠ ପଢ଼ିବା ପରେ, ତୁମେ

- କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପଦ୍ଧତିରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଓ ପାଦ ଆଦିର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଦୂରତା ସୂତ୍ର ଓ ବିଭାଜନ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି କରିପାରିବ;
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସୂତ୍ରର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି କରିପାରିବ;
- ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ରୈଖିକତାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବ;
- ନତି (Inclination) ଏବଂ ସରଳ ରେଖାର ଆନତି ବା ସ୍ଲୋପ ଭଳି ପଦଗୁଡ଼ିକର ଅର୍ଥ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ;

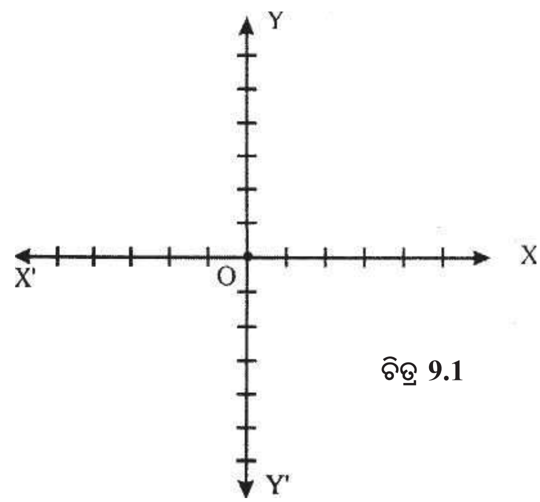
- ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ (ଆନତି)ର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଦତ୍ତ ସ୍ଲୋପ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ରେଖା, ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର ବା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତାହା କହିପାରିବ;
- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ ଏକ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଦିଆଯାଇଥିବା ସର୍ତ୍ତରେ, ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ସଂଚାର ବା ଗତି କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଲୋକସ୍‌କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ ଏକ ଲୋକସ୍ (Locus)ର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ବ୍ୟବସ୍ଥା ।
- ଏକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସଂସ୍ଥାପନ କରିବା ।
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ।
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ।

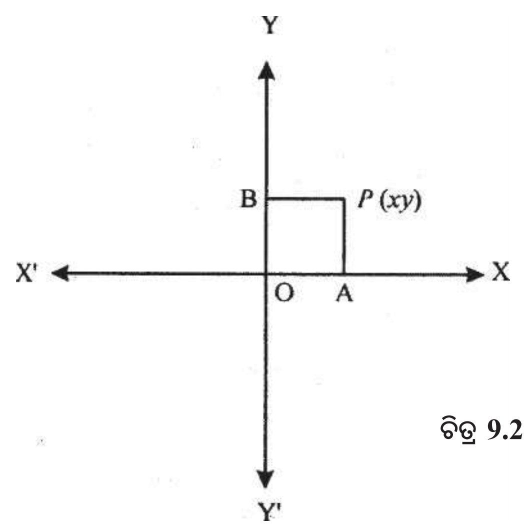
9.1 ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ (Rectangular coordinate axes)

ମନେପକାଅ ଯେ, ଆମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀ ମାନଙ୍କରେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଦୁଇଟି ରେଖା ଅଙ୍କନ କରି, ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ଶିଖିସାରିଛନ୍ତି । ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି, ସେହି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ 'O' କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 9.1 ରେ ଦର୍ଶାଗଲା ପରି) । ଏହି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ **ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ** କୁହାଯାଏ । ଭୂ-ସମାନ୍ତର ରେଖା XOX′ କୁ x- ଅକ୍ଷ ବା x ର ଅକ୍ଷ ଓ ଭୂଲମ୍ବ ରେଖା YOY′ କୁ y- ଅକ୍ଷ ବା y ର ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।



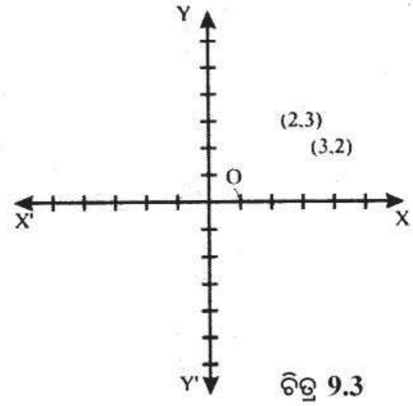
ଚିତ୍ର 9.1

9.1.1 ଏକ ବିନ୍ଦୁର କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ : ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ନିମ୍ନ ଉପାୟ ଅବଲମ୍ବନ କରିବା । XOX′ ଓ YOY′କୁ ଏକ ସମତଳରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଭାବେ ନେବା । ମନେକର P ଉକ୍ତ ସମତଳରେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $PA \perp XOX'$ ଏବଂ $PB \perp YOY'$ ଅଙ୍କନ କର । ଏବେ x ଅକ୍ଷ ଦିଗରେ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଦୂରତା OA = x, ଓ y- ଅକ୍ଷ ଦିଗରେ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଦୂରତା OB = y, ଏହି ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ଅନୁଯାୟୀ P ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । x- ଅକ୍ଷ ଦିଗରେ OA ର



ଚିତ୍ର 9.2

ମାନକୁ ଭୁଜ (abscissa) ବା x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ y ଅକ୍ଷ ଦିଗରେ OB ର ମାନକୁ କୋଟି (Ordinate) ବା y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ । ଭୁଜ ଓ କୋଟିକୁ ଏକତ୍ର ନେଲେ, ଏହାକୁ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ । ଏହିପରି P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x ଓ y) ଅଟେ, ଯାହା ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ଦର୍ଶାଏ । ଏହି ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟିରୁ ଗୋଟିଏ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ଗଠିତ ହୁଏ, କାରଣ ଏହି ଯୋଡ଼ି ଯେଉଁ କ୍ରମରେ ଥାଏ, ତାହା ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଟେ । ଚିତ୍ର (9.3) ରେ ତୁମେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ, କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (2, 3) ର ଅବସ୍ଥିତ (3, 2) ଠାରୁ ପୃଥକ୍ । ଏହିପରି ଆମେ କହି ପାରିବା ଯେ, (x, y) ଓ (y, x) ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ଯେଉଁ ଦୁଇଟି, ଏକ ସମତଳରେ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚିତ କରନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର 9.3

9.1.2 ପାଦ (Quadrant)

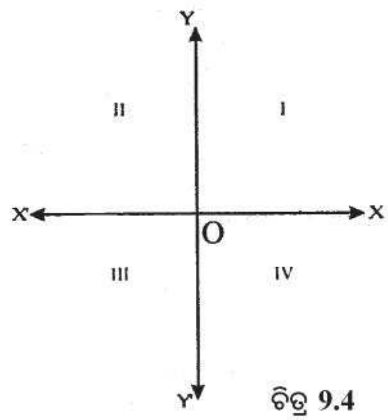
ଆମେ ଜାଣନ୍ତି ଯେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ XOX′ ଏବଂ YOY′ ଏକ ସମତଳକୁ ଚାରିଭାଗରେ ପରିଣତ କରେ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗକୁ ପାଦ ବା (Quadrant) କୁହାଯାଏ । ଏହା ଚିତ୍ର 9.4 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ଏବଂ ପାଦ ଚାରୋଟି ଚିହ୍ନ ନିୟମ ଅନୁସାରେ, ବିନ୍ଦୁ p(x, y) ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ପାଦ ଉପରେ x ଓ y ର ଚିହ୍ନ ନିର୍ଭର କରେ । ଆମେ ପାଇବା

ପାଦ I : $x > 0, y > 0$

ପାଦ II : $x < 0, y > 0$

ପାଦ III : $x < 0, y < 0$

ପାଦ IV : $x > 0, y < 0$

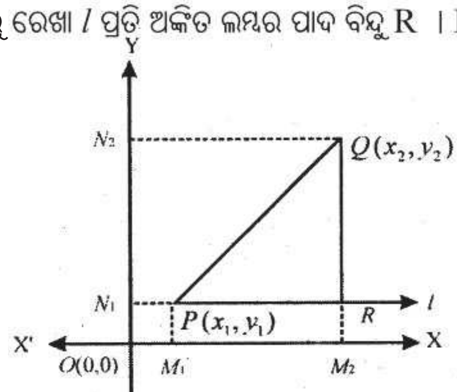


ଚିତ୍ର 9.4

9.2 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା (Distance between two points)

ମନେ ପକାଅ, ତୁମେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ $p(x_1, y_1)$ ଓ $Q(x_2, y_2)$ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଛ । ଆସ P ମଧ୍ୟ ଦେଇ ରେଖା $l \parallel XX'$ ଅଙ୍କନ କରିବା । ମନେକର Q ରୁ ରେଖା l ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁ R । PQR ଏକ ସମକୋଣୀ Δ ।

$PR = M_1 M_2$
$= OM_2 - OM_1$
$= x_2 - x_1$
ଏବଂ $QR = QM_2 - RM_2$
$= QM_2 - PM_1$



ଚିତ୍ର 9.5

$= ON_2 - ON_1$

$= y_2 - y_1$

ବର୍ତ୍ତମାନ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ (ପାଇଥାଗୋରସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ)

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ଟୀକା : ଏହି ସୂତ୍ର ସମସ୍ତ ପାଦସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ବିନ୍ଦୁ P(x, y) ର ମୂଳବିନ୍ଦୁ O (0, 0) ଠାରୁ ଦୂରତା $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ ଅଟେ ।

ଆସ ଏହି ସୂତ୍ରଦ୍ୱୟକୁ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 9.1 ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁ ଯୋଡ଼ି ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) A (14, 3) ଓ B(10, 6) (ii) M (–1, 2) ଓ N (0, –6)

ସମାଧାନ :

(i) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_2)^2}$

ଏଠାରେ $x_1 = 14, y_1 = 3, x_2 = 10, y_2 = 6$

$\therefore$ A ଓ B ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା $= \sqrt{(10-14)^2 + (6-3)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{16+9}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

A ଓ B ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 5 ଏକକ ।

(ii)) ଏଠାରେ $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 0,$ ଓ $y_2 = -6$

M ଓ N ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା $= \sqrt{(0-(-1)\}^2 + (-6-2)^2}$

$= \sqrt{1 + (-8)^2}$

$= \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

M ଓ N ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା $= \sqrt{65}$ ଏକକ ।

ଉଦାହରଣ 9.2 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, P(–1, –1), Q(2, 3) ଏବଂ R (–2, 6) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ, ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : $PQ^2 = (2+1)^2 + (3+1)^2$

$= 3^2 + 4^2$

$= 9 + 16 = 25$

$QR^2 = (-4)^2 + (3)^2$

$= 16 + 9 = 25$

ଏବଂ $RP^2 = 1^2 + (-7)^2$

$= 1 + 49$

$= 50$

$PQ^2 + QR^2 = 25 + 25 = 50 = RP^2$

$\Rightarrow \Delta$ PQR ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ପାଇଥାଗୋରାସ୍ ଉପାପାଦ୍ୟର ବିଲୋମୀ ଦ୍ୱାରା)

ଉଦାହରଣ 9.3 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, A (1, 2), B (4, 5) ଏବଂ C (–1, 0) ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ

$AB = \sqrt{(4-1)+(5-2)^2}$ ଏକକ

$= \sqrt{18}$ ଏକକ

$= 3\sqrt{2}$ ଏକକ

$BC = \sqrt{(-1-4)^2+(0-5)^2}$ ଏକକ

$= \sqrt{50}$ ଏକକ

$= 5\sqrt{2}$ ଏକକ

ଏବଂ $AC = \sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2}$ ଏକକ

$= \sqrt{4+4}$ ଏକକ

$= 2\sqrt{2}$ ଏକକ

ବର୍ତ୍ତମାନ $AB + AC = \left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{2}\right)$ ଏକକ $= 5\sqrt{2}$ ଏକକ $= BC$

ଅର୍ଥାତ୍ $BA + AC = BC$

ତେଣୁ A, B, C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଉଦାହରଣ 9.4 ପ୍ରମାଣ କର (2a, 4a) (2a, 6a) ଓ $(2a + \sqrt{3}\,a, + 5a)$ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ସମବାହୁ Δ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2a ଏକକ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ A (2a, 4a), B (2a, 6a)

ଏବଂ $C(2a + \sqrt{3}\,a, 5a)$

$AB = \sqrt{0 + (2a)^2} = 2a$ ଏକକ

$BC = \sqrt{(\sqrt{3a})^2 + (-a)^2}$ ଏକକ

$= \sqrt{3a^2 + a^2}$

$= 2a$ ଏକକ

ଏବଂ $AC = \sqrt{(\sqrt{3a})^2 + (+0)^2} = 2a$ ଏକକ

$\Rightarrow AB + BC > AC,$

$BC + AC > AB$ ଏବଂ

$AB + AC > BC$ ଏବଂ $AB = BC = AC = 2a$

$\Rightarrow$ A, B, C ତ୍ରୟ ଏକ ସମବାହୁ Δ ର ଶୀର୍ଷ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 2a ଏକକ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.1

1. ନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଯୋଡ଼ି ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) (5, 4) ଓ (2, –3) (b) (a, –a) ଓ (b, b)

2. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସେଟ୍ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

   (a) (4, 4), (3, 5) (–1, –1) (b) (2, 1) (0, 3) (–2, 1)

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁସେଟ୍ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ଅଟନ୍ତି ।

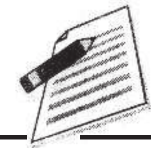
   (a) (3, 3), (–3, 3) ଓ (0, 0) (b) (0, a), (a, b) ଓ (0, 0) (ଯଦି $ab = 0$)

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ଏକ ରେଖୀୟ ଅଟନ୍ତି ।

   (a) (3, –6), (2, –4) ଓ (4, 8) (b) (0, 3), (0, –4) ଓ (0, 6)

5. (a) ଦର୍ଶାଅ ଯେ (0, –1), (–2, 3), (6, 7) ଓ (8, 3) ଏକ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ।

   (b) ଦର୍ଶାଅ ଯେ (3, –2), (6, 1), (3, 4) ଓ (0, 1) ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ।



9.3 ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର (Section Formula)

9.3.1 ଅନ୍ତଃବିଭାଜନ (Internal division)

ମନେକର $P(x_1, y_1)$ ଓ $Q(x_2, y_2)$ ରେଖା l ଉପରେ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଓ $R(x, y)$, PQ କୁ $m_1:m_2$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତଃ ବିଭାଜନ କରେ ।

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ : R ର x ଓ y ସ୍ଥାନାଙ୍କ ।

ଅଙ୍କନ : P, Q ଓ R ରୁ XX^1 ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ PL, QN ଓ RM ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଯାହା XX^1 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ L, M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ । $RT \perp QN$ ଓ $PV \perp QN$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରଣାଳୀ : R ବିନ୍ଦୁ, PQ କୁ $m_1:m_2$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତଃବିଭାଜନ କରେ ।

$\Rightarrow$ R ବିନ୍ଦୁ, PQ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $\frac{PR}{RQ} = \frac{m_1}{m_2}$

ପୁନଶ୍ଚ Δ PRS ଓ Δ QRT ମଧ୍ୟରେ

$\angle RPS = \angle QRT$ (ଅନୁରୂପ କୋଣ, ଯେହେତୁ $PS \parallel RT$)

ଏବଂ $\angle RSP = \angle QTR = 90^0$

$\therefore \Delta RPS \sim \Delta QRT$ (କୋ-କୋ-କୋ ସାଦୃଶ୍ୟ)

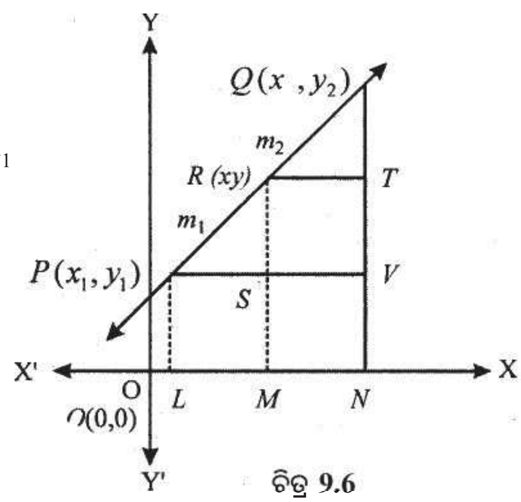
$$\Rightarrow \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} = \frac{PS}{RT} \quad ...(i)$$

ଏହାସହ $PS = LM = OM - OL = x - x_1$

$RT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$RS = RM - SM = y - y_1$

$QT = QN - TN = y_2 - y$



ଚିତ୍ର 9.6

(i) ରୁ ପାଇବା

$$\therefore \frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$$\Rightarrow m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1)$$

ଏବଂ $m_1(y_2 - y) = m_2(y - y_1)$

$$\Rightarrow x = \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} \text{ ଓ } y = \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}$$

ଏହିପରି R ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି :

$$\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$$

ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

ଯଦି R, PQ ର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ

$m_1 = m_2 = 1$(କାରଣ R, PQ କୁ 1 : 1 ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜିତ କରିବ)

ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

9.32 ବହିଃବିଭାଜନ (External division)

ମନେକର R, PQ କୁ $m_1 : m_2$ ଅନୁପାତରେରେ ବହିଃ ବିଭାଜନ କରେ ।

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ : R ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

ଅଙ୍କନ : ବିନ୍ଦୁ P, Q ଓ R ରୁ XX′ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ PL, QN ଏବଂ RM ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । $PS \perp RM$ ଓ $QT \perp RM$ ଅଙ୍କନ କର ।

ଏହାସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\Delta RPS \sim \Delta RQT$

$$\therefore \frac{RP}{RQ} = \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT}$$

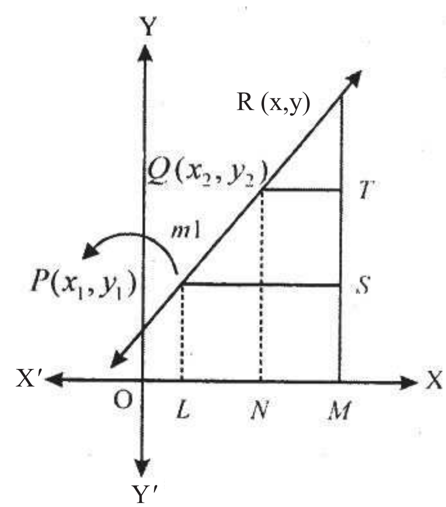
ବା $\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x-x_2} = \frac{y-y_1}{y-y_2}$

$\Rightarrow m_1(x-x_2) = m_2(x-x_1)$

ଏବଂ $m_1(y-y_2) = m_2(y-y_1)$

ଏଥିରୁ ମିଳେ ଯେ,

$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}$ ଓ $y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$



ଚିତ୍ର 9.7

ଏଣୁ ବହିଃବିଭାଜନ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{m_1x_2-m_2x_1}{m_1-m_2}, \frac{m_1y_2-m_2y_1}{m_1-m_2}\right)$$

ଏବେ ଆମେ କିଛି ଉଦାହରଣର ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 9.5 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (4, –2) ଓ (–3, 5) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 3 ଅନୁପାତର ଅନ୍ତ ଓ ବହିଃ ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର P(x, y) ହେଉଛି ଅନ୍ତଃବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ

$$\therefore x = \frac{2(-3)+3(4)}{2+3} = \frac{6}{5} \text{ ଓ } y = \frac{2\times 5+3(-2)}{2+3} = \frac{4}{5}$$

P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$

ଯଦି Q (x′, y′) ବହିଃବିଭାଜନ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ

$$x' = \frac{(2)(-3)-3(4)}{2-3} = 18 \text{ ଏବଂ } y' = \frac{(2)(5)-3(-2)}{2-3} = -16$$

ଏହିପରି, ବହିଃବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁରସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି (18, –16)

ଉଦାହରଣ 9.6 (1, 4) ଓ (–3, 16) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ (3, –2) ବିନ୍ଦୁ କେଉଁ ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର P (3, –2) ବିନ୍ଦୁଟି ଦତ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ k:1 ରେ ବିଭାଜନ କରେ ।

P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{16k+4}{k+1}\right)$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3, –2)

$$\therefore \frac{-3k+1}{k+1} = 3$$

$$\Rightarrow -3k + 1 = 3k + 3$$

$$\Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

⇒ P ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1 : 3 ଅନୁପାତରେ ବହିଃବିଭାଜନ କରେ

ଉଦାହରଣ 9.7 ଏକ ଚତୁର୍ଭୂଜର ଶୀର୍ଷଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ (1, 4) ଓ (–2. 1), (0, –1) ଓ (3, 2) । ଯଦି E, F, G, H ଯଥାକ୍ରମେ AB, BC, CD ଓ DA ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଅନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, EFGH ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ E, F, G ଓ H, AB, BC, CD ଓ DA ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ, ତେଣୁ E, F, G ଓ H ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ

$$\left(\frac{1-2}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right), \left(\frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \text{ ଏବଂ } \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$\Rightarrow E\left(\frac{-1}{2},\frac{5}{2}\right), F(-1,0), G\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ ଏବଂ H (2, 3) ହେଉଛନ୍ତି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିନ୍ଦୁ ।

ପୁନଶ୍ଚ କର୍ଣ୍ଣ EG ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ :

$$\left[\frac{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right]=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

କର୍ଣ୍ଣ FH ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ :

$$\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$$

ଯେହେତୁ ଉଭୟ କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସମାନ, କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

ତେଣୁ EFGH ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.2

1. ସେହି ରେଖାଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

   (a) (–2, 3), ଓ (3, 5) (b) (6, 0) ଓ (–2, 10)

2. (–5, –2) ଓ (3, 6) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3:1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. (a) ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ତିନିଗୋଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (0, 3), (0, 6) ଓ (2, 9) ଅଟେ । ଚତୁର୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (b) (4, 0), (–4, 0), (0, –4) ଓ (2, 4) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବର୍ଗ ଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ସଂଯୋଗ କଲେ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ ।

4. (2, 3) ଓ (5, –1) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ ହୋଇଛି । ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

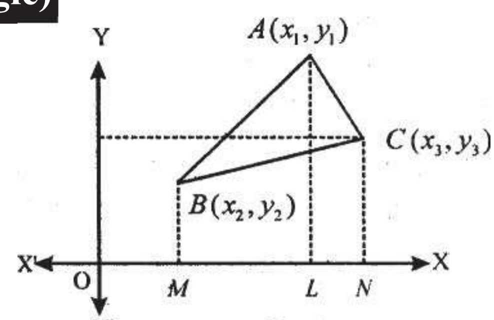
5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏକ ଆୟତଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟ କ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଏକ ରମ୍ବସ ମିଳେ ।

9.4 ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Axa of a triangle)

ଆସ ଏକ Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯାହାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ଓ $C(x_3, y_3)$ ।

XX′ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ AL, BM ଓ CN ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

ABC Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ



ଚିତ୍ର 9.7

= BMLA ଟ୍ରାପିଜିୟମର କ୍ଷେ.ଫ. + ALNC ଟ୍ରାପିଜିୟମ ର କ୍ଷେ.ଫ. − BMNC ଟ୍ରାପିଜିୟମର କ୍ଷେ.ଫ.

$$=\frac{1}{2}(BM+AL)\,ML+\frac{1}{2}(AL+CN)\,LN-\frac{1}{2}(BM+CN)MN$$

$$=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}\,[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_1y_3-x_1y_3)]$$

$$=\frac{1}{2}[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)]$$

ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ରୂପରେ ନିମ୍ନପରି ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

$$\Delta ABC \text{ କ୍ଷେ.ଫ. } =\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ଉଦାହରଣ 9.8 ଏକ Δ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ A(3, 4), B (6, –2) ଓ C(–4, –5) ।

ସମାଧାନ : ΔABC ର କ୍ଷେ.ଫ. $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}[3(-2+3)-4(6+4)+(-30-8)]$$

$$=\frac{1}{2}[9-40-38]=\frac{-69}{2}$$

∵ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଧନାତ୍ମକ ହେବା ଦରକାର

∴ ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $=\frac{69}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ ।

ଉଦାହରଣ 9.9 ଯଦି ଏକ Δ ର ଶୀର୍ଷତ୍ରୟ (1, k), (4, –3) ଓ (–9, 7) ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 15 ବର୍ଗ ଏକକ ହୁଏ, k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$

$$=\frac{1}{2}[-3-7-k(4+9)+1(28-27)]$$

$$=\frac{1}{2}[-10-13k+1]$$

$$=\frac{1}{2}[-9-13k]$$

ଯେହେତୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେ.ଫ. 15 ବର୍ଗ ଏକକ ଦତ୍ତ ଅଛି

$$\therefore \frac{-9-13k}{2}=15$$

କିମ୍ବା $-9-13k=30$

$\Rightarrow -13k=39$

$\Rightarrow k=-3$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.3

1. ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତଥିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) (0, 5) (5, –5) ଓ (0, 0) (b) (2, 3) (–2, –3) ଓ (–2, 3)

   (c) (a, 0) (0, –a) ଓ (0, 0)

2. ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ A (2, –3), B(3, –2) ଓ C $\left(\frac{5}{2}, k\right)$ ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $\frac{3}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ । k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

3. ଯେଉଁ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ (5, 4), (5, –4), (–5, 4) ଓ (–5, 4), ତା'ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

4. ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ (5, –2), (4, –7), (1, 1) ଓ (3, 4), ତା'ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

9.5 ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ଏକ ରେଖୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ (Condition for collinerity of 3 points)

ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) ଓ C(x_3, y_3) ଏକରେଖୀୟ ହେବେ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି ΔABC ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହୁଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3]=0$

ଅର୍ଥାତ୍, $x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=0$

ସଂକ୍ଷେପରେ ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ଆମେ ନିମ୍ନଭଳି ଲେଖିପାରିବା

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ଆସ ଏହାକୁ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା :

ଉଦାହରଣ 9.10 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ବିନ୍ଦୁ A (a, b + c), B (b, c + a) ଓ C (c, a + b) ଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ ।

$$\Delta ABC \text{ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ତେଣୁ ବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକରେଖୀୟ ।

ଉଦାହରଣ 9.11 k ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ, ବିନ୍ଦୁ (1, 5), (k, 1) ଓ (4, 11) ଏକରେଖୀୟ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[-10 - 5k + 20 + 11k - 4]$$

$$= \frac{1}{2}[6k + 6] = 3k + 3$$

ଯେହେତୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ

ତେଣୁ, $3k + 3 = 0, \Rightarrow k = -1$

ତେଣୁ, $k = -1$ ହେଲେ, ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ ହେବ ।

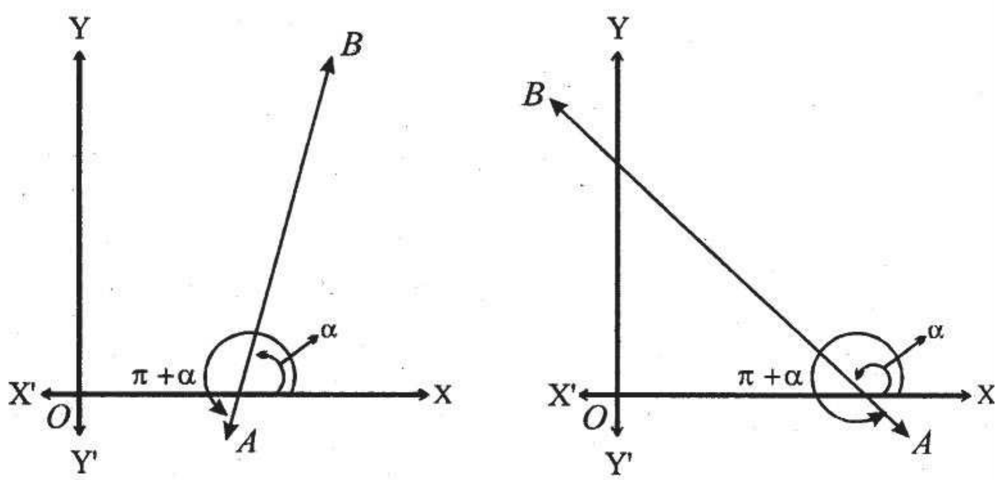
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.4

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (–1, –1), (5, 7) ଓ (8, 11) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖୀୟ ।
2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ବିନ୍ଦୁ (3, 1), (5, 3) ଓ (6, 4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକରେଖୀୟ ।
3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (a, 0), (0, b) ଓ (1,1) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ ହେବେ ଯଦି $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$ ।
4. ଯଦି (a, b), (a_1, b_1) ଓ $(a - a_1, b - b_1)$ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $a_1b = ab_1$ ।
5. k ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ, (5,7), (k, 5) ଓ (0, 2) ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ ହେବ ?
6. kର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ, (k, 2–2k), (–k + 1, 2k) ଓ (–4 –k, 6–2k) ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକରେଖୀୟ ?

9.6 ଏକ ସରଳରେଖାର ଆନତି ଓ ସ୍ଲୋପ (Inclination and slope of a line)

ଚିତ୍ର 9.9 ଦେଖ । AB ରେଖା x - ଅକ୍ଷ ସହ α କିମ୍ବା $\pi + \alpha$ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ (ଘଣ୍ଟା କଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ) । ଏକ ଦଣ୍ଡ ରେଖା ଦ୍ୱାରା, x- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ (ଘଣ୍ଟା କଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ), ତାକୁ ଦଣ୍ଡ ରେଖାର ଆନତି କୁହାଯାଏ ।

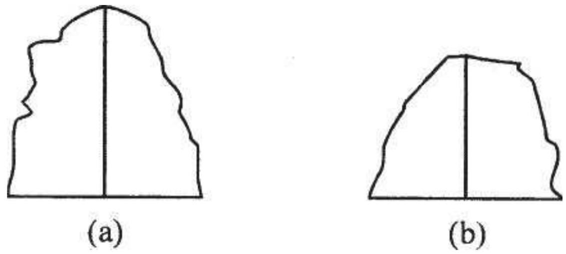
ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଯେତେବେଳେ ରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ଏହା ସହ ମିଳିତ ହୁଏ, ରେଖାର ଆନିତକୁ 0^0 ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।



(a) ଚିତ୍ର 9.9 (b)

ପୁନଶ୍ଚ ପରପୃଷ୍ଠାରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ପାହାଡ଼ ଦୁଇଟିକୁ ଦେଖ । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ 9.10 (a) ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ପାହାଡ଼, ଚିତ୍ର 9.10 (b) ପାହାଡ଼ ଠାରୁ ଅଧିକ ତିଖ ।

ଏହାର ଉଚ୍ଚତାର ପରିମାଣକୁ ଆମେ କିପରି ମାପି ପାରିବା ? ଏଠାରେ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ପାହାଡ଼ (a) ର ଭୂମି ସହ ଆନତି-କୋଣ ପାହାଡ଼ (b) ର ଭୂମି ସହ ଆନତି-କୋଣ ଠାରୁ ଅଧିକ ।



ଚିତ୍ର 9.10

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଭୂମି ସମତଳ ଠାରୁ ଶିଖରର ଉଚ୍ଚତା ଓ ପାହାଡ଼ର ଭୂମି ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଚେଷ୍ଟା କର ।

ପ୍ରକୃତରେ ତୁମେ ଜାଣିପାରବ ଯେ (a) କ୍ଷେତ୍ରରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଅନୁପାତ, (b) କ୍ଷେତ୍ରର ଅନୁପାତ ତୁଳନାରେ ବେଶୀ । ଏହା ଅର୍ଥ, ଆମ୍ଭେମାନେ ଉଚ୍ଚତା ଓ ଆଧାର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ ଯାହାକି ଏକ କୋଣର (Tangent) ମୂଲ୍ୟ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ । ତେଣୁ ଏହି ଅନୁପାତ ଅଥବା ଆନତିକୋଣର (tan) ମୂଲ୍ୟକୁ ସ୍ଲୋପ୍ କୁହାଯାଏ । ସ୍ଲୋପକୁ ଏକ କୋଣର tan ମୂଲ୍ୟ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ଏକ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ, ଏହା x- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କର ତାହାର tan ମୂଲ୍ୟ ହିଁ ଅଟେ । ସାଧାରଣତଃ, ଏହା m $(=\tan\theta)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଟୀକା : ଯଦି ଏକ ସରଳ ରେଖା x - ଅକ୍ଷ ସହ 90^0 କିମ୍ବା 270^0 ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତେବେ ଏହାର ସ୍ଲୋପ୍‌କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 9.12 ଚିତ୍ର 9.9 ରେ AB ଓ BA ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : AB ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ $= \tan\alpha$

ରେଖା BA ର ସ୍ଲୋପ୍ $= \tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$

ଟୀକା : ଉକ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ, ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରି ପାଇବା ଯେ ''ଏକ ସରଳ ରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ଏହାର ଦିଗ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 9.13 ଯେଉଁ ସରଳରେଖା, x- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 30^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତା'ର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

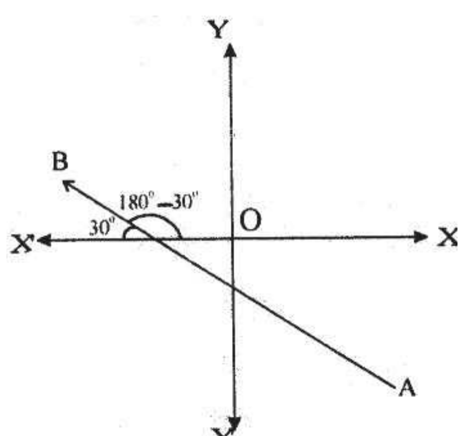
ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\theta = 180 + 30^0 = 150^0$

m = ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ

$= \tan(180^0 - 30^0)$

$= -\tan 30^0$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



ଚିତ୍ର 9.11

ଉଦାହରଣ 9.14 ଯେଉଁ ସରଳରେଖା y- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 60^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ତା'ର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\theta = 90^0 + 60^0$

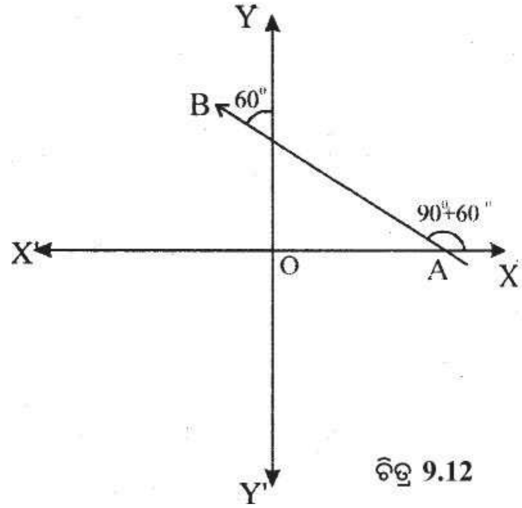
m = ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ

$= \tan(90^0 + 60^0)$

$= -\cot 60^0$

$= -\tan 30^0$

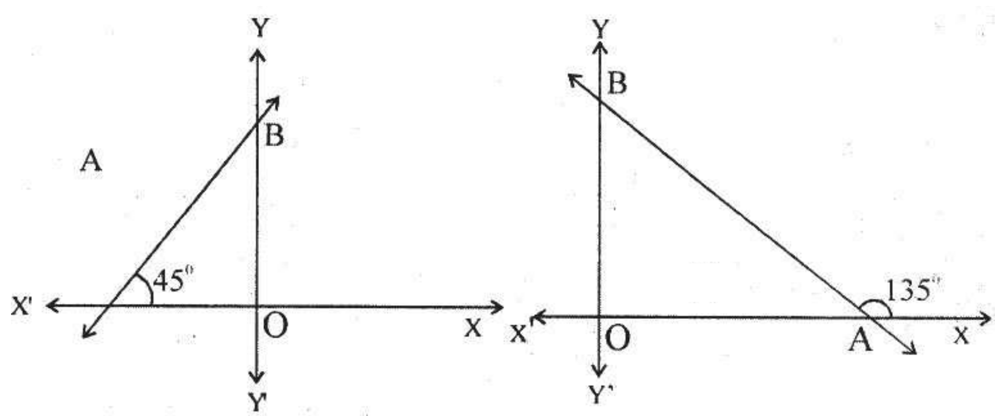
$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$



ଚିତ୍ର 9.12

ଉଦାହରଣ 9.15 ଯଦି ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱୟ ସହ ଏକ ସରଳରେଖାର ସମାନ ଆନତି ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହାର ସ୍ଲୋପ ± 1 ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ରେଖା AB, ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱୟ ସହ ସମାନ ଆନତି ସୃଷ୍ଟିକରେ ଏବଂ ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ (ଚିତ୍ର 9.13 ଦେଖ) ।



ଚିତ୍ର 9.13

ଚିତ୍ର 9.13 (a) ରେ ସରଳରେଖା AB ର ଆନତି $= \angle XAB = 45^0$

$\therefore$ AB ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ $= \tan 45^0 = 1$

ଚିତ୍ର 9.13 (b) ରେ ସରଳରେଖା AB ର ଆନିତ $= \angle XAB = 180 - 45 = 135^0$

$\therefore$ AB ସରଳରେଖାର ଆନତି $= \tan 135^0 = \tan(180 - 45^0) = -\tan 45 = -1$

ଏହିପରି ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖା ଅକ୍ଷଗୁଡ଼ିକ ସହ ସମାନ ଭାବରେ ଆନତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଏହାର ସ୍ଲୋପ ± 1 ହୁଏ ।

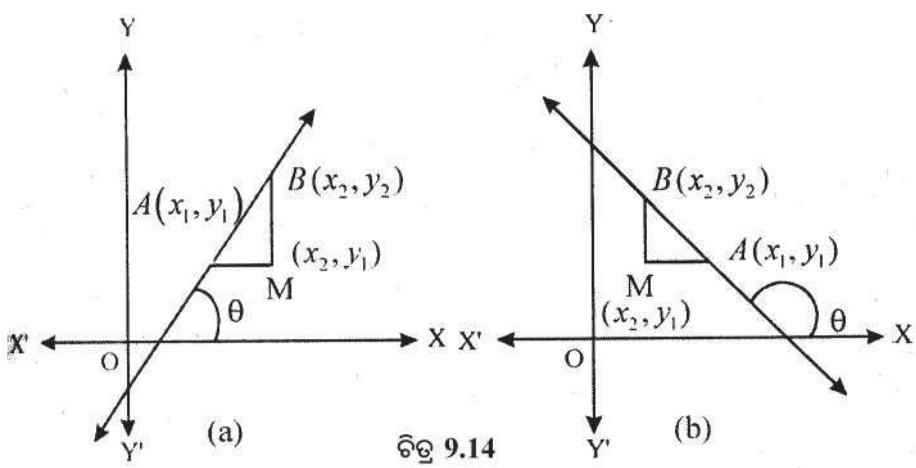
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.5

1. ଏକ ସରଳ ରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହା x ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ (i) 60^0, (ii) 150^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।
2. ଏକ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହା y- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 30^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।
3. ଏକ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହା x- ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 60^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।

9.7 ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ (Slope of aline joining two distinct points)

ମନେକର $A(x_1, y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ । A ଓ B ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର । ମନେକର ସରଳରେଖାର ଆନତି θ ।

ମନେକର A ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଭୂଲମ୍ବ ରେଖାର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁ M, ତେବେ M ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଚିତ୍ର 9.14 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 9.14

(A) ଚିତ୍ର 9.14 (a) ରେ, ∠MAB, ଆନତି θ (ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ) ସହ ସମାନ । ଫଳସ୍ୱରୂପ,

$$\tan\theta = \tan(\angle MAB) = \frac{MB}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(B) ଚିତ୍ର 9.14(b) ରେ, ଆନତ, କୋଣ ସ୍ଥୁଳ କୋଣ ଓ ଯେହେତୁ θ ଓ ∠MAB ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ, ଫଳରେ

$$\tan\theta = -\tan(\angle MAB) = -\frac{MB}{MA} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ତେଣୁ ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $A(x_1 y_1)$ ଓ $\beta(x_2, y_2)$ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ m ହେଲେ,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ଟୀକା : ଯଦି $x_1 = x_2$ ହେବ, ତେବେ m କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇ ପାରିବ ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସରଳରେଖା y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏପରି ଏକ ସରଳରେଖା ଅଛି କି ଯାହାର ସ୍ଲୋପ୍ 1 ? ହଁ ଯେତେବେଳେ ଏକ ସରଳରେଖା x- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 45^0 ରେ ଆନତ ହୋଇଥାଏ, ସେତେବେଳେ ସ୍ଲୋପ୍ 1 ହୁଏ ।

ଏପରି ସରଳରେଖା ଅଛି କି ଯାହାର ସ୍ଲୋପ୍ $\sqrt{3}$? ହଁ, ଯେତେବେଳେ ଏକ ସରଳରେଖା x- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ 60^0 ରେ ଆନତ ହୋଇଥାଏ, ସେତେବେଳେ ସ୍ଲୋପ୍ $\sqrt{3}$ ହୁଏ ।

ଏଇ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତରରୁ, ତୁମେ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରୁଥିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା m ପାଇଁ, ଏକ ରେଖା ଅଛି ଯାହାର ସ୍ଲୋପ m ଅଟେ । (କାରଣ ଆମେ ସର୍ବଦା ଏକ କୋଣ α ପାଇବା ଯେପରିକି $\tan \alpha = m$)

ଉଦାହରଣ 9.16 A (6, 3) ଓ B (4, 10) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ସରରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ଏଠାରେ $x_1 = 6, y_1 = 3; x_2 = 4, y_2 = 10$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ମାନଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

ଆମେ ପାଇବା ସ୍ଲୋପ୍ $= \dfrac{10-3}{4-6} = -\dfrac{7}{2}$

ଉଦାହରଣ 9.17 x ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି, (3, 6) ଓ (x, 4) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ରେଖାର ସ୍ଲୋପ 2 ହେବ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ଲୋପ $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-6}{x-3} = \dfrac{-2}{x-3}$

$\therefore \dfrac{-2}{x-3} = 2$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow 2x - 6 = -2$ କିମ୍ବା $x = 2$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.6

1. ବିନ୍ଦୁ A (6, 8) ଓ B (4, 14) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ କେତେ ହେବ ?

2. x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି ବିନ୍ଦୁ A (6, 12) ଓ B(x, 8) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ 4 ହେବ ।

3. y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି A(–8, 11) ଓ B(2, y) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାର ସ୍ଲୋପ $-\dfrac{4}{3}$ ହୁଏ ।

4. A (2, 3), B (0, 4) ଓ C (–5, 0) ହେଉଛନ୍ତି Δ ABC ର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ । ଯେଉଁ ସରଳରେଖା B ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ, ତାହାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଟିପ୍ପଣୀ

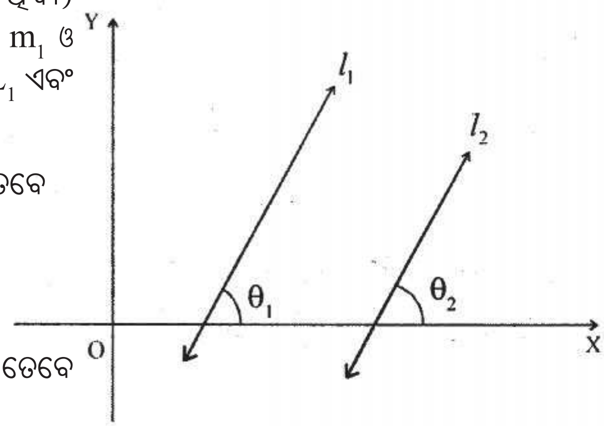
5. ଯଦି A (–2, 7), B (1, 0), C (4, 3) ଓ D(1, 2) ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ର ଶୀର୍ଷ ହୁଅନ୍ତି ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(i) AB ର ସ୍ଲୋପ = CD ର ସ୍ଲୋପ (ii) BC ର ସ୍ଲୋପ = AD ର ସ୍ଲୋପ

9.8 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଓ ଲମ୍ବ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ (Conditions for parallelism and perpenndieularity of two lines)

9.8.2 ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ

ମନେକର L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି (ଭୂଲମ୍ବ ହୋଇନଥିବା) ସରଳରେଖା ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ m_1 ଓ m_2 । ମନେକର θ_1 ଏବଂ θ_2 ଯଥାକ୍ରମେ ସରଳରେଖା L_1 ଏବଂ L_2 ର ଆନତିକୋଣ ।



ଚିତ୍ର 9.15

ପରିସ୍ଥିତି I : ମନେକର L_1 ଏବଂ L_2 ସମାନ୍ତର । ତେବେ

$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

ଏହିପରି, ଯଦି ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପ୍ ସମାନ ।

ପରିସ୍ଥିତି II : ମନେକର l_1 ଓ l_2 ର ସ୍ଲୋପ ସମାନ ଅଟେ ।

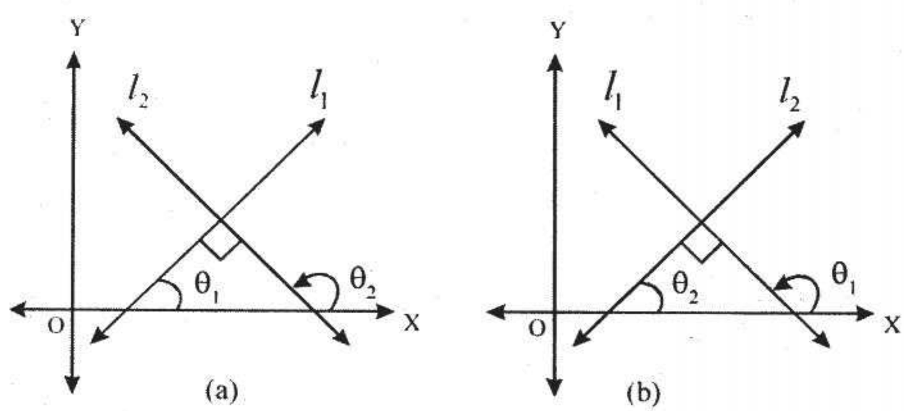
ଅର୍ଥାତ୍, $m_1 = m_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \ (0^0 \le \theta \le 180^0)$

$\Rightarrow l_1 \parallel l_2$

ଏଣୁ ଦୁଇଟି (ଭୂଲମ୍ବ ହୋଇନଥିବା) ସରଳରେଖା ସମାନ୍ତର ହେବେ, ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $m_1 = m_2$

9.8.2 ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ରେଖାମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପ



ଚିତ୍ର 9.16

ମନେକର L_1 ଏବଂ L_2 ଦୁଇଟି (ଭୂଲମ୍ବ ହେଉନଥିବା) ସରଳରେଖା ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପ ଯଥାକ୍ରମେ m_1 ଓ m_2 । ଏହା ସହିତ ଏମାନଙ୍କର ଆନତି ଯଥାକ୍ରମେ θ_1 ଏବଂ θ_2 ।

ପରିସ୍ଥିତି 1 : ମନେକର $L_1 \perp L_2$

$\Rightarrow \theta_2 = 90^0 + \theta_1$ ଅଥବା, $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \tan(90^0 + \theta_1)$ ଅଥବା, $\tan\theta_1 = \tan(90^0 + \theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\cot(\theta_1)$ ଅଥବା, $\tan\theta_1 = -\cot(\theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ ଅଥବା, $\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ ଉଭୟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ ପାଇବା

$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

ଅଥବା, $m_1 \cdot m_2 = -1$

ଏହିପରି ଯଦି ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ -1 ସହ ସମାନ ।

ପରିସ୍ଥିତି II : ମନେକର L_1 ଏବଂ L_2 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କର ସ୍ଲୋପମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ -1 ।

ଅର୍ଥାତ୍, $m_1 \cdot m_2 = -1$

$\Rightarrow \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$\Rightarrow \tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2 = \tan(90^0 + \theta_2)$

$\Rightarrow \theta_1 = 90^0 + \theta_2$ କିମ୍ବା $\theta_2 = 90^0 + \theta_1$

$\Rightarrow$ ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $L_1 \perp L_2$

$\therefore$ ଯଦି ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ m_1 ଓ m_2 ଏବଂ $m_1 \cdot m_2 = -1$, ତେବେ ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ

ଉଦାହରଣ 9.18 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, A (5, 6) ଓ B (2, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା, C (9, –2), D (6, –5) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ।

ସମାଧାନ : AB ର ସ୍ଲୋପ $= \dfrac{3-6}{2-5} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

ଏବଂ CD ର ସ୍ଲୋପ $= \dfrac{-5+2}{6-9} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

ଯେହେତୁ ସ୍ଲୋପଗୁଡ଼ିକ ସମାନ

$\therefore AB \parallel CD$

ଉଦାହରଣ 9.19 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, A(2, –5) ଓ B (–2, 5) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ଏବଂ L (6, 3) ଓ M (1, 1) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତିଲମ୍ବ ହେବେ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ AB ର ସ୍ଲୋପ $= m_1 = \dfrac{5+5}{-2-2} = \dfrac{10}{-4} = \dfrac{-5}{2}$

ଏବଂ LM ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ $= m_2 = \dfrac{1-3}{1-6} = \dfrac{2}{5}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $m_1 \cdot m_2 = \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{2}{5} = -1$

ଏଣୁ, ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ଉଦାହରଣ 9.20 ସ୍ଲୋପର ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (4, 4), B (3,5) ଓ C (–1, –1) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : AB ର ସ୍ଲୋପ $= m_1 = \dfrac{5-4}{3-4} = -1$

BC ର ସ୍ଲୋପ $= m_2 = \dfrac{-1-5}{-1-3} = \dfrac{3}{2}$

ଏବଂ AC ର ସ୍ଲୋପ $= m_3 = \dfrac{-1-4}{-1-4} = 1$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $m_1 \times m_3 = -1$

$\Rightarrow AB \perp AC$

$\Rightarrow \Delta$ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଅତଏବ A (4, 4), B (3, 5) ଓ C (–1, –1) ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ 9.21 y ର ମାନ କେତେ ହେଲେ, ବିନ୍ଦୁ A(3, y) ଓ B(2, 7) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ଓ C (–1, 4) ଓ D (0, 6) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ ।

ସମାଧାନ : AB ର ସ୍ଲୋପ $= m_1 = \dfrac{7-y}{2-3} = y-7$

CD ର ସ୍ଲୋପ $= m_2 = \dfrac{6-4}{0+1} = 2$

ଯେହେତୁ ସରଳରେଖା ଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ

$\therefore m_1 \times m_2 = -1$

ଅଥବା, $(y - 7) \times 2 = -1$

ଅଥବା, $2y - 14 = -1$

ଅଥବା, $2y = 13$

ଅଥବା, $y = \frac{13}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.7

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (2, –3) ଓ (–4, 1) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା
   (i) (7, –1) ଓ (0, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ।
   (ii) (4, 5) ଓ (0, –2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
2. (–4, 1) ଓ (2, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. ବିନ୍ଦୁ (–5, 7) ଓ (0, –2) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା, (1, 3) ଓ (4, x) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. A (–2, –1), B (1, 0), C (4, 3) ଓ D (1, 2) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ଅଟନ୍ତି । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହି ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁଗୁଡ଼ିକ ସମାନ୍ତର ।
5. ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପର ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଦର୍ଶାଅ ଯେ A (6, –1), B(5, 0) ଏବଂ C(2, 3) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ରେଖୀୟ ।

   [ସୂଚନା AB, BC ଓ CA ର ସ୍ଲୋପ ସମାନ ହେବ]
6. k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି ବିନ୍ଦୁ (k, 9) ଓ (2, 7) ଦେଇ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ସରଳରେଖା, (2, –2) ଓ (6, 4) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ।
7. ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପର ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଦର୍ଶାଅ ଯେ (–4, –1), (–2, –4), (4, 0) ଏବଂ (2, 3) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଦତ୍ତ କ୍ରମରେ ନେଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ହେବେ ।
8. ABC Δ ର ଶୀର୍ଷଗୁଡ଼ିକ A(–3, 3), B (–1, –4) ଓ C(5, –2) ଅଟନ୍ତି । AB ଓ AC ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ଅଟେ । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, MN || BC ଏବଂ $MN = \frac{1}{2}BC$ ।

9.9 ଏକ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶ (Intercepts made by a line on axes)

ଯଦି ଏକ ରେଖା (ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇନଥିବା) x- ଅକ୍ଷକୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ y- ଅକ୍ଷକୁ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରି ଚିତ୍ର 9.17 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି, ତେବେ

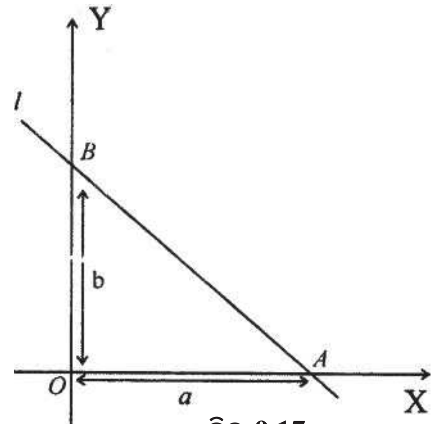
(i) OA କୁ x- ଛେଦାଂଶ ବା x- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଦତ୍ତ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶ କୁହାଯାଏ ।

(ii) OB କୁ y- ଛେଦାଂଶ ବା y- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଦତ୍ତ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦିତ ଅଂଶ କୁହାଯାଏ ।

(iii) OA ଓ OB କୁ ଏହି କ୍ରମରେ ଏକା ସଙ୍ଗରେ ନେଲେ ସେ ଦ୍ୱୟକୁ ରେଖା l ଦ୍ୱାରା ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶ କୁହାଯାଏ ।

(iv) AB କୁ ଉଭୟ ଅକ୍ଷ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା l ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଛେଦିତ ଅଂଶ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

(v) A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, 0) ଓ B ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, b) ଅଟେ ।



ଚିତ୍ର 9.17

ଏକ ଦତ୍ତ ସମତଳରେ x ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ଦତ୍ତ ରେଖାର ସମୀକରଣରେ $y = 0$ ନେବା । ଏହିପରି ପ୍ରାପ୍ତ x ର ମାନକୁ x- ଛେଦାଂଶ କହନ୍ତି । y- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ $x = 0$ ନେଲେ, y ର ପ୍ରାପ୍ତ ମାନକୁ y ଛେଦାଂଶ କହନ୍ତି ।

ଟୀକା : 1. ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖା ଅକ୍ଷ ଉପରେ କୌଣସି ଛେଦାଂଶ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ନାହିଁ ।

2. ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖାର କୌଣସି x- ଛେଦାଂଶ ନାହିଁ ଏବଂ ଭୂଲମ୍ବ ରେଖାର କୌଣସି y- ଛେଦାଂଶ ନାହିଁ ।

3. x- ଛେଦାଂଶ ଓ y- ଛେଦାଂଶକୁ ସାଧାରଣତଃ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । କିନ୍ତୁ ଯଦି କେବଳ y- ଛେଦାଂଶକୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଏ, ତେବେ ଏହାକୁ, c ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 9.22 ଏକ ରେଖାର ସମୀକରଣ $2x + 3y = 6$ ଅଟେ । ଏହାର x ଓ y ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦିଆଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$2x + 3y = 6$ ...(i)

(i) ରେ $x = 0$ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା $y = 2$ । ଏଣୁ, y- ଛେଦାଂଶ 2 ଅଟେ ।

ପୁନଶ୍ଚ ସମୀକରଣ (i) ରେ $y = 0$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

ଏଣୁ, x- ଛେଦାଂଶ 3 ଅଟେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.8

1. x ଓ y ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହୁଏ :

(i) $x + 3y = 6$ (ii) $7x + 3y = 2$ (iii) $\frac{xa}{2a} + \frac{y}{2b} = 1$ (iv) $ax + by = c$

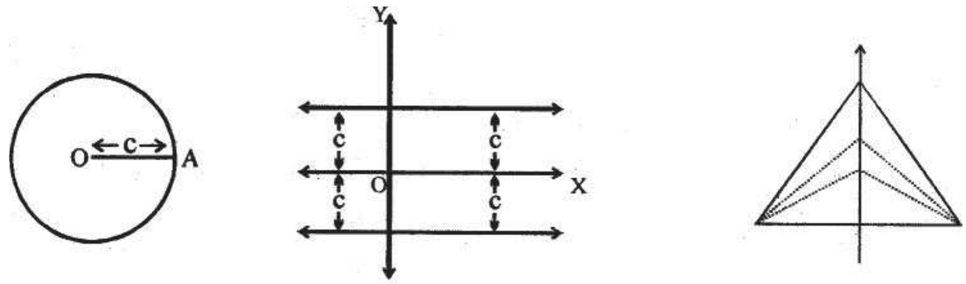
(v) $\frac{y}{2} - 2x = 8$ (vi) $\frac{y}{3} - \frac{2x}{3} = 7$

9.10 ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଦ (Locus of a point)

9.10.1 ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସଂଜ୍ଞା

ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ଅନୁରେଖିତ ପଥ ଅଟେ, ଯେତେବେଳେ ଏହା ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ବା ସର୍ତ୍ତସମୂହକୁ ସିଦ୍ଧିକରି ଗତିକରେ । ତେଣୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆକୃତିର ପଥ ଅଟେ । ଏହା ଏକ ସରଳରେଖା, ବୃତ୍ତ ବା କୌଣସି ଏକ ବକ୍ର ରେଖା ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : (i) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥାଇ ଗତି କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ଏକ ବୃତ୍ତ, ଯାହା ଚିତ୍ର 9.18 (a) ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(a) (b) (c)

ଚିତ୍ର 9.18

(ii) x ଅକ୍ଷ ଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥାଇ ଗତିକରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସଞ୍ଚାରପଥ ହେଉଛି x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଯୁଗଳ ଏହା, ଚିତ୍ର 9.18 (b) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ।

(iii) ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମାନ ଦୂରତାରେ ଥାଇ ଗତି କରୁଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ।

[ଚିତ୍ର 9.18 (c) ଦେଖ]

ସଂଚାର ପଥର ସଂଜ୍ଞା ଓ ଉଦାହରଣରୁ ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଯେ,

(a) ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ବା ସର୍ତ୍ତ ସମୂହକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସର୍ବଦା ଉକ୍ତ ସଂଚାର ପଥର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

(b) ସଂଚାର ପଥର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ, ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ, ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ବା ସର୍ତ୍ତ ସମୂହକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ।

9.10.2 ଏକ ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ

ଏକ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁ (x, y) ର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ହେଉଛି x, y ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂପର୍କ, ଯାହା ବିନ୍ଦୁଟି ଗତିଶୀଳ ହେବାପାଇଁ ଦିଆଯାଇଥିବା ସର୍ତ୍ତକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x,y), ଯାହା ସଂଚାର ପଥ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତାହାକୁ ଚଳିତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Current co-ordinate) କହନ୍ତି । ଏହି ବିନ୍ଦୁ ସମଗ୍ର ସଂଚାର ପଥ ଉପର ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ ତାହାକୁ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ଦେଖିବା :

ମନେକର P(4, 3) ଓ Q(7, 11) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । ଆସ ଆମେ ଏଭଳି ଏକ ବିନ୍ଦୁ R ଚିହ୍ନଟ କରିବା ଯାହା P ଓ Q ଠାରୁ ସମାନ ଦୂରତାରେ ରହିବ ।

ମନେକର R ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y)

ତେବେ, $PR = \sqrt{(x-4)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25}$

$QR = \sqrt{(x-7)^2 + (y-11)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170}$

$\because PR = QR$

$\therefore \sqrt{x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25} = \sqrt{x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ, ପାଇବା

$x^2 + y^2 - 8x - 6y + 25 = x^2 + y^2 - 14x - 22y + 170$

$\Rightarrow 6x + 16y - 145 = 0$

ଏହାକୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ଠାରୁ ସମ ଦୂରତାରେ ଥିବା R ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ କାର୍ଯ୍ୟପଦ୍ଧତି ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ।

9.10.3 ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟର କାର୍ଯ୍ୟ ପଦ୍ଧତି ।

(i) ସଂଚାର ପଥର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ (x, y) ନିଅ ।

(ii) ଦତ୍ତ ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପକୁ x ଓ y ଏବଂ ଜ୍ଞାତ ଧ୍ରୁବକ କିମ୍ବା ଧ୍ରୁବକ ସମୂହ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖ, ଯଦି ଆବଶ୍ୟକ ପଡ଼େ ସରଳ କର ।

(iii) ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତକୁ ଗାଣିତିକ ରୂପରେ, x ଓ y ଏବଂ ଜ୍ଞାତ ଧ୍ରୁବକମାନଙ୍କ ମାଧମରେ ପ୍ରକାଶ କର ଓ ଆବଶ୍ୟକ ମତେ ସରଳ କର ।

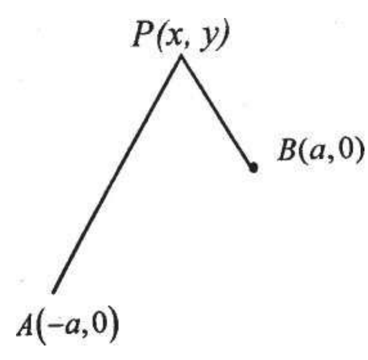
(iv) ଏହି ପ୍ରକାରେ ମିଳୁଥିବା ସମୀକରଣକୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଚାର ପଥ ର ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 9.23 ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁଟି (–a, 0) ଠାରୁ ଯେତିକି ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ, (a, 0) ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ତା'ର ତିନିଗୁଣ ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସୀମକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର P (x, y), ଉକ୍ତ ସଂଚାର ପଥ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ A (–a, 0) ଓ B(a, 0) ନିଆଯାଉ ।

ସର୍ତ୍ତ ଅନୁସାରେ $PA = 3PB$

ଅର୍ଥାତ୍ $PA^2 = 9PB^2$



ଚିତ୍ର 9.19

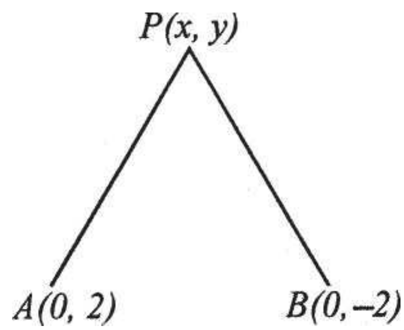
$\Rightarrow (x + a)^2 + y^2 = 9\,[(x - a)^2 + y^2]$

$\Rightarrow x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = 9\,[x^2 - 2ax + a^2 + y^2]$

$\Rightarrow 8x^2 - 20ax + 8a^2 + 8y^2 = 0$

ଏଣୁ, $2x^2 + 2y^2 - 5ax + 2a^2 = 0$ ହେଉଛି ସଂଚାର ପଥର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

ଉଦାହରଣ 9.24 ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ଯେପରିକି (0, 2) ଓ (0, –2) ଠାରୁ ଏହାର ଦୂରତାର ସମଷ୍ଟି 6 ହେବ ।



ଚିତ୍ର 9.20

ସମାଧାନ : ମନେକର P(x, y) ସଂଚାର ପଥର କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ମନେକର ଯେ A (0, 2) ଓ B (0, –2) ହେଉଛନ୍ତି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ, ଆମେ ପାଇବା PA + PB = 6

$\therefore \sqrt{x^2 + (y - 2^2)} + \sqrt{x^2 + (y + 2)^2} = 6$

କିମ୍ବା, $\sqrt{x^2 + y^2 - 4y + 4} = 6 - \sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବର୍ଗ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 + x^2 + y^2 + 4y + 4 - 12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

ଅଥବା, $-8y - 36 = -12\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

ଅଥବା, $2y + 9 = 3\sqrt{x^2 + y^2 + 4y + 4}$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$(2y + 9)^2 = 9(x^2 + y^2 + 4y + 4)$

ଅଥବା, $4y^2 + 36y + 81 = 9x^2 + 9y^2 + 36y + 36$

ଅଥବା, $9x^2 + 5y^2 = 45$

ଏହା ସଂଚାରପଥର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

ଉଦାହରଣ 9.25 ΔABC ର ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A (3, 1) ଓ B (–2, 4) । ଯଦି ତୃତୀୟ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ $3x - 4y = 8$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଚାରପଥରର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ତୃତୀୟ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ C (a, b) । ଯେହେତୁ C (a, b) ବିନ୍ଦୁଟି ଯେଉଁ ସଂଚାର ପଥ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ, ତା'ର ସମୀକରଣଟି

$3x - 4y = 8$

$\therefore 3a - 4b = 8$

ମନେକର G (h, k), ΔABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ର

$\therefore h = \dfrac{3-2+a}{3}$ ଓ $k = \dfrac{1+4+b}{3}$

$\Rightarrow a = 3h - 1$ ଓ $b = 3k - 5$

ସମୀକରଣ (i) ରେ a ଓ b ର ମାନ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$3(3h - 1) - 4(3k - 5) = 8$

$\Rightarrow 3h - 4k + 3 = 0$

ତେଣୁ, G (h, k) ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ହେଉଛି $3x - 4y + 3 = 0$

ଉଦାହରଣ 9.26 $y^2 = ax$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଚାର ପଥ ଉପରେ (2, –2) ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଯଦି ଉକ୍ତ ସଂଚାର ପଥ ଉପରେ (8, b) ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ b ର ମାନନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ ସଂଚାର ପଥର ଏକ ବିନ୍ଦୁ (2, –2) ଓ ସଂଚାରପଥର ସମୀକରଣଟି $y^2 = ax$

$\therefore (-2)^2 = 2a$

$\Rightarrow a = 2$

$\therefore$ ସଂଚାରପଥର ସମୀକରଣଟି $y^2 = 2x$ ।

ଯେହେତୁ (8, b) ସଂଚାରପଥ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ

$\therefore b^2 = 2 \times 8$

$\Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$

ତେଣୁ, b ର ମୂଲ୍ୟ ହେବ ± 4

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.9

1. (3, 4) ଓ (–4, 6) ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ବିନ୍ଦୁ (4, 2) ଓ x- ଅକ୍ଷ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାରପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଏକ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁ, (4, 1) ଠାରୁ ଯେତେ ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ, (1, 5) ଠାରୁ ତା'ର ଦୁଇ ଗୁଣ ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଏହି ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

4. ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A (2, 3) ଓ B (0, 2) । ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ତ୍ରିଭୁଜ PAB ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = 3 ବର୍ଗ ଏକକ ।

5. ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ, ବିନ୍ଦୁ (2, 3) ଓ ବିନ୍ଦୁ (–3, 4) ର ଦୂରତାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 16 ହେବ, ସେହି ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଏକ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ, ବିନ୍ଦୁ (3, 0) ଓ ବିନ୍ଦୁ (–3, 0) ର ଦୂରତାର ସମଷ୍ଟି 9 ଠାରୁ କମ୍ ହେବ, ସେହି ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଯଦି (h, 0) ବିନ୍ଦୁ, $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 36 = 0$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଚାର ପଥ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଏ, ତେବେ h ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଯଦି $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$ ବିନ୍ଦୁ ଓ (b, b) ବିନ୍ଦୁ, $y^2 = ax$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଚାର ପଥ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ b ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ହେଉଛି $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ।

- ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖା ଖଣ୍ଡକୁ $m_1 : m_2$ ରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left[\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right]$$

- ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $m_1 : m_2$ ଅନୁପାତରେ ବହିଃବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$ ।

- (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବାର ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$
- ଶୀର୍ଷ (x_1, y_1) (x_2, y_2) ଓ (x_3, y_3) ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି $\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$ ।
- ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକରେଖୀୟ ହେବେ, ଯଦି ସେହି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁକୁ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ ହୁଏ ।
- ଯଦି ଏକ ରେଖା, x- ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗସହ θ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ତେବେ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ $m = \tan\theta$ ।
- $A(x_1y_1)$ ଓ $B(x_2, y_2)$ କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାର ସ୍ଲୋପ

  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ।
- m_1 ସ୍ଲୋପ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳରେଖା, m_2 ସ୍ଲୋପ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ଯଦି $m_1 = m_2$ ।
- m_1 ସ୍ଲୋପ ବିଶିଷ୍ଟ, ଏକ ସରଳରେଖା m_2 ସ୍ଲୋପ ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବ, ଯଦି $m_1 \times m_2 = -1$
- ଯଦି ଏକ ସରଳରେଖା L (ମୂଳବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଯାଇନଥିବା) x- ଅକ୍ଷକୁ A ବିନ୍ଦୁରେ ଓ y- କୁ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ OA କୁ x- ଛେଦାଂଶ ଏବଂ OB କୁ y- ଛେଦାଂଶ କୁହାଯାଏ ।
- ଯଦି ଏକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ବା ସର୍ତ୍ତ ସମୂହକୁ ସିଦ୍ଧକରି ଗତି କରେ, ତେବେ ସେ ବିନ୍ଦୁ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ଅନୁରେଖିତ ପଥକୁ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସଞ୍ଚାର ପଥ କୁହାଯାଏ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $(2, 0)$ ଓ $(1, \cot\theta)$ (b) $(-\sin A, \cos A)$ ଓ $(\sin B, \cos B)$

2. କେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠନ କରେ ।

   (a) $(3, 2)$ ଓ $(-3, 2)$ ଓ $(0, 3)$ (b) $(3, 2), (3, -2)$ ଓ $(3, 0)$

3. $(3, -5)$ ଓ $(-6, 8)$ କୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଦତ୍ତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) (1, 2) (–2, 3) (–3, –4) (b) (c, a) (c + a, a) (c – a, –a)

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଏକ ରେଖୀୟ (ଶୀର୍ଷମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଶୂନ୍ୟ ଦର୍ଶାଇ)

   (a) (–2, 5), (2, –3) ଓ (0, 1) (b) (a, b + c) (b, c + a) ଓ (c, a + b)

6. ଯଦି (–3, 12), (7, 6) ଓ (x, a) ଏକ ରେଖୀୟ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ x ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯାହାର ଶୀର୍ଷଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ (4, 3), (–5, 6), (0, 7) ଓ (3, –6) ।

8. ନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) (1, 2) , (4, 2) (b) (4, –6), (–2, –5)

9. y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି (3, y) ଓ (2, 7) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ଏବଂ (–1, 4) ଓ (0, 6) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି ।

10. ପିଥାଗୋରସାଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର ନକରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ (4, 4), (3, 5), ଓ (–1, –1) ଶୀର୍ଷ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

11. ସ୍ଲୋପ୍‌ର ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ନିମ୍ନଲିଖିତ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଏକ ରେଖୀୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

    (a) (–2, 3), (8, –5) ଓ (5, 4) (ii) (5,1) (1, –1) ଓ (11, 4)

12. ଯଦି ABCD ଆୟତଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷ A (2, –3) ଓ B (3, 5) ହୁଏ, ତେବେ (i) BC (ii) CD (iii) DA ର ସ୍ଲୋପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13. ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (7, 3), (3, 0), (0, –4) ଓ (4, –1) । ସ୍ଲୋପର ଧାରଣାକୁ ଉପଯୋଗ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ହୁଏ ।

14. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସରଳରେଖାର x- ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

    (i) $2x - 3y = 8$ (ii) $3x - 7y + 9 = 0$ (iii) $x - \frac{y}{2} = 3$

15. ବିନ୍ଦୁ (2, 4) ଓ y- ଅକ୍ଷ ଠାରୁ ସମାନ ଦୂରତାରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ବିନ୍ଦୁ (a + b, a – b) ଏବଂ (a – b, a + b) ଠାରୁ ସମାନ ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସଂଚାରପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. ଯଦି A (a, 0), B (–a, 0) ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି, ତେବେ ଗତିଶୀଳ ବିନ୍ଦୁ P ର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $3|PA| = 2|PB|$

18. P ବିନ୍ଦୁର ସଂଚାର ପଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି (1, 2) ଓ (3, 4) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଠାରୁ P ର ଦୂରତାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 25 ଏକକ ହୁଏ ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.1

(a) $\sqrt{58}$ (b) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.2

1. (a) $\left(\frac{1}{2},4\right)$ (b) (2, 5) 2 · (1, 4)

3. (a) (2, 6) 4. $\left(3,\frac{5}{3}\right),\left(4,\frac{1}{3}\right)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.3

1. (a) $\frac{25}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ (b) 12 ବର୍ଗ ଏକକ (c) $\frac{a^2}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ

2. $k=\frac{5}{3}$

3. 80 ବର୍ଗ ଏକକ

4. $\frac{41}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.4

5. $k = 3,$ 6. $k=\frac{1}{2},-1$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.5

1. (i) $\sqrt{3}$ (ii) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $-\sqrt{3}$ 3. $-\sqrt{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.6

1. –3, 2. 5 3. $-\frac{7}{3}$ 4. $\frac{5}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.7

2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$ 6. $k=\frac{10}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.8

1. (i) x – ଛେଦାଂଶ $= 6$, y – ଛେଦାଂଶ $= 2$
   (ii) x – ଛେଦାଂଶ $= \frac{2}{7}$, y – ଛେଦାଂଶ $= \frac{2}{3}$
   (iii) x – ଛେଦାଂଶ $= 2a$, y – ଛେଦାଂଶ $= 2b$
   (iv) x – ଛେଦାଂଶ $= \frac{c}{a}$, y – ଛେଦାଂଶ $= \frac{c}{b}$
   (v) x – ଛେଦାଂଶ $= -4$, y – ଛେଦାଂଶ $= 16$
   (vi) x – ଛେଦାଂଶ $= \frac{-21}{2}$, y – ଛେଦାଂଶ $= 21$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 9.9

1. $14x - 4y + 27 = 0$
2. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
3. $3x^2 + 3y^2 - 38y + 87 = 0$
4. $x - 2y = 2$
5. $x^2 + y^2 + x - 7y + 11 = 0$
6. $20x^2 + 36y^2 < 405$
7. $3 \pm 3\sqrt{5}$
8. $\frac{27}{2}$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (a) $\operatorname{cosec} \theta$ (b) $2 \sin \frac{A+B}{2}$
2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ସେଟ୍ ତ୍ରିଭୁଜ ଗଠନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ।
3. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{c}\right)$ 4.(a) 11 ବର୍ଗ ଏକକ (b) a^2 ବର୍ଗ ଏକକ
6. $\frac{51-5a}{3}$ 7. 29 ବର୍ଗ ଏକକ (8) (a) 0 (b) $-\frac{1}{6}$
9. $y = 3$ 11. କେବଳ (ii) 12. (i) $-\frac{1}{8}$ (ii) 8 (iii) $-\frac{1}{8}$
14. (i) 4, (ii) –3 (iii) 3
15. $y^2 - 8y - 4x + 20 = 0$
16. $x - y = 0$
17. $5x^2 + 5y^2 - 26ax + 5a^2 = 0$
18. $2x^2 + 2y^2 - 8x - 12y + 5 = 0$

•