୮

ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ
Binomial Theorem

ମନେକର, ତୁମେ କୌଣସି ମୂଳଧନକୁ ବାର୍ଷିକ 15% ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧହାରରେ ବିନିଯୋଗ କରିଛ ଏବଂ 5 ବର୍ଷ ପରେ ତୁମେ କେତେ ଟଙ୍କା ସୁଧ ପାଇବ ତାହା ହିସାବ କରିବାକୁ ଚାହୁଁଛ । କିମ୍ବା ମନେକର, ଜନସଂଖ୍ୟାର ବାର୍ଷିକ ବୃଦ୍ଧି ହାର ଜଣାଥିବାବେଳେ, ଆମେ 10 ବର୍ଷ ପରେ ଗୋଟିଏ ଦେଶର ଜନସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହୁଛନ୍ତି । ଏକ ଫଳାଫଳ, ଯାହା ଏଇ ରାଶିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରିବ, ତାହା ହେଉଛି **ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ** । ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବ ଯେ, ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ଦ୍ୱିପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶ, ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶର ପରିମେୟ ଘାତ ଗୁଡ଼ିକର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ତୁମକୁ ସାହାଯ୍ୟ କରିବ । କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଦ୍ୱିପାଦ ଉପପାଦ୍ୟ ଭାରତୀୟ ଏବଂ ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତିଜ୍ଞମାନଙ୍କୁ ଖ୍ରୀ.ପୂ. ତୃତୀୟ ଶତାବ୍ଦୀ ବେଳକୁ ଜଣାଥିଲା । ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତଗୁଡ଼ିକର ଫଳାଫଳର ଶ୍ରେୟ ଜଣେ ଆରବ କବି ତଥା ଗଣିତଜ୍ଞ ଓମର ଖାୟାମ (1048 – 1122) ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ ଙ୍କୁ ଦିଆଯାଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ, ପରିମେୟସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ, ଆହୁରି ଅଧିକ ବ୍ୟାପାକୀକରଣ ଇଂରାଜୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ନିଉଟନ (ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 1642 – 1727) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା କରାଗଲା ।

ଗାଣିତିକ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣ ଠାରୁ ଏହାର ବ୍ୟାପକୀକରଣର ଅନ୍ୟ କାରଣ ମଧ୍ୟ ଥିଲା । ଏହାର ବହୁବିଧ ଉପଯୋଗିତା ଥିଲା ଏହାର କାରଣ । ପ୍ରଥମେ ଆଲୋଚିତ ପରିସ୍ଥିତି ଅତିରିକ୍ତ, ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱ, କଳନ ଗଣିତ ଓ $(1.02)^7$, $3^{\frac{1}{5}}$ ଆଦି ସଂଖ୍ୟାର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଅନେକ ଉପଯୋଗିତା ଉପଲବ୍ଧ । ଆମେ ଏ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସେଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କିଛି ଆଲୋଚନା କରିବା । ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଆଲୋଚନା ପୂର୍ବରୁ, ତୁମକୁ ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ସହିତ ପରିଚିତ କରାଇବୁ, କାରଣ ଆମେ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଲାଗି ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଏହି ନୀତ ମଧ୍ୟ କେତେକ ବିଶିଷ୍ଟ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାପକୀକରଣ କରିବାରେ ଉପଯୋଗୀ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠର ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ ତୁମେ

- ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣର ନିୟମକୁ (ସସୀମ) ବ୍ୟକ୍ତ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;
- $n = 1$ ପାଇଁ $P(n)$ ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟାପନ କରିପାରିବ;
- $P(k)$ କୁ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନେଇ, $P(k+1)$ ସତ୍ୟ ବା ନୁହେଁ ତାହା ସ୍ଥିର କରିପାରିବ;
- ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣର ନୀୟମ ଦ୍ୱାରା, କିଛି ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତି ସତ୍ୟ ବା ନୁହେଁ ତାହା ସ୍ଥିର କରିପାରିବ;

- ଧନାତ୍ମକ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପାଦୀ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ ଏବଂ ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀୟମ ଦ୍ୱାରା ଏହାକୁ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ;
- ଦ୍ୱିପଦୀ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି, x ଓ y ର ବିଭିନ୍ନ ମାନ ପାଇଁ $(x + y)^n$ ର ଦ୍ୱିପଦ-ବିସ୍ତାର ଲେଖିପାରିବ;
- ଏକ ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣର ସାଧାରଣ ପଦ ଓ ମଧ୍ୟ ପଦ ଲେଖିପାରିବ;
- ରଣାତ୍ମକ ଓ ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କା ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖିପାରିବ;
- $\sqrt[3]{9}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$ ଭଳି ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦସଂପ୍ରସାଣର ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ ଏବଂ
- ଯେଉଁଠି x ଏତେ କ୍ଷୁଦ୍ର ଯେ, x^2 ଓ ଏହାର ବୃହତ୍ତର ଘାତକୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଏ ନାହିଁ ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\left(3-\frac{5}{x}\right)^7$ ଭଳି ଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି
- ସଂଖ୍ୟା ତଥା ପରିପ୍ରକାଶର ଚାରି ମୌଳିକ ଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ।
- ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଏବଂ ଏହାର ସରଳୀକରଣ ।
- ଘାତ ଓ ଘାତାଙ୍କ

8.1 ଉକ୍ତି କ'ଣ ? (What is a Statement ?)

ତୁମେ ତୁମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଭାବ ବିନିମୟ ବେଳେ ଅନେକଗୁଡ଼ିଏ ବକ୍ତବ୍ୟକୁ ବାକ୍ୟ ରୂପରେ କୁହ । ଏଇ ବାକ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ହୁଏତ ସତ୍ୟ ଅଥବା ମିଥ୍ୟା ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉକ୍ତି ବା ପ୍ରତିଜ୍ଞା କହନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ''ମୋ'ର ବୟସ 20 ବର୍ଷ ଅଟେ'' ଏବଂ ଯଦି "$x = 3$, ତେବେ $x^2 = 9$" ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତି ଅଟେ; କିନ୍ତୁ ''ତୁମେ କେବେ ଆସିବ ?'' ଓ ''କେଡ଼େ ଆଶ୍ଚର୍ଯ୍ୟଜନକ'' ଉକ୍ତି ନୁହଁ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ଉକ୍ତି ଏକ ନିଶ୍ଚିତ ବାକ୍ୟ ଅଟେ ଯାହା ସତ୍ୟ କିମ୍ବା ମିଥ୍ୟା ହୋଇପାରେ, କିନ୍ତୁ ଉଭୟ ନୁହଁ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ '$x - 5 = 7$' ଏହା ଏକ ଉକ୍ତି ନୁହଁ, କାରଣ x କ'ଣ ଆମେ ଜାଣୁ ନାହୁଁ । ଯଦି $x = 12$, ତେବେ କଥାଟି ସତ୍ୟ, କିନ୍ତୁ ଯଦି $x = 5$ ତେବେ ଏହା ମିଥ୍ୟା । ତେଣୁ, $x - 5 = 7$ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଏକ ଉକ୍ତି ହିସାବରେ ଗୃହୀତ ହୁଏ ନାହିଁ ।

କିନ୍ତୁ '$x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12$' ଏବଂ 'ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ x ପାଇଁ $x - 5 = 7$' ଦୁଇଟିଯାକ ଉକ୍ତି ଅଟନ୍ତି । ଏଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟି ସତ୍ୟ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟଟି ମିଥ୍ୟା ।

ଉଦାହରଣ 8.1 ନିମ୍ନଲିଖିତ ବାକ୍ୟ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଉକ୍ତି ଅଟେ ।

(i) ଭାରତର ରାଷ୍ଟ୍ରପତି କେବେ ମହିଳା ହୋଇ ନାହାନ୍ତି ।
(ii) 5 ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା
(iii) $x^n > 1$
(iv) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ସମାଧାନ : (i) ଓ (ii) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତି (i) ସତ୍ୟ ଏବଂ (ii) ମିଥ୍ୟା ଅଟେ । (iii) ଉକ୍ତି ନୁହଁ, କାରଣ ଯେତେବେଳ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ x ଓ y ର ମାନର ସୀମା ଜଣାନାହିଁ, ଆମେ ବାକ୍ୟଟିକୁ ସତ୍ୟ ବା ମିଥ୍ୟା କହିପାରିବା ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ (iv) କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ପ୍ରଥମ ଦୃଷ୍ଟିରେ, ଏହା ଉକ୍ତି ବୋଲି ଲାଗିବ ନାହିଁ, ଯେଉଁ କାରଣରୁ (iii) ଉକ୍ତି ନୁହଁ । କିନ୍ତୁ (iv) କୁ ଯତ୍ନର ସହିତ ଦେଖିଲେ a ଓ b ର ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ ଏହା ସତ୍ୟ । ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ।

ତେଣୁ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଯଦିଓ ଆମେ a ଓ b ର ମାନର ସୀମା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ଜାଣନ୍ତି ନାହିଁ, ତଥାପି (iv) ଏକ ଉକ୍ତି ।

କେତେକ ଉକ୍ତି, ଯେପରି ଗୋଟିଏ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି, ସାଧାରଣଭାବରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ । ଆସ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉକ୍ତିଟିକୁ ବିଚାର କରିବ ।

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ଏହା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା n ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ । ଏହାକୁ ଆସ $P_{(n)}$ କହିବା (ଏଠାରେ P ପ୍ରତିଜ୍ଞା ସୂଚିତ କରେ ।)

ତେବେ P(1) ହେବ : $1=\frac{1(1+1)}{2}$

ସେହିପରି P(2) ହେବ :

$$1+2=\frac{2(2+1)}{2}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏହି ସଙ୍କେତଗୁଡ଼ିକ ସହ ତୁମକୁ ଭଲଭାବରେ ପରିଚିତ କରିବା ପାଇଁ ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ଉପରେ ବିଚାର କରିବା :

ଉଦାହରଣ 8.1 ଯଦି P(n), $2^n > n-1$ କୁ ସୂଚାଏ, ତେବେ P(1), P(k) ଓ P (k + 1) ଲେଖ, ଯେଉଁଠି $k \in N$ ।

ସମାଧାନ : P(n)ରn ସ୍ଥାନରେ ଯଥାକ୍ରମେ 1, k ଓ k + 1 ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା :

$P(1) : 2^1 > 2 - 1$ ଅର୍ଥାତ୍ $2 > 1$

$P(k) : 2^k > k-1$

$p\,(k+1) : 2^{k+1} > (k+1) -1$, ଅର୍ଥାତ୍ $2^{k+1} > k$

ଯଦି P(n) କୁ ନିମ୍ନରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ଉକ୍ତି ରୂପେ ନିଆଯାଏ ।

$$1 + 4 + 7 + (3n - 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$$

P(1), P(k) ଏବଂ P(k+1) ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : P(1) ଲେଖିବା ପାଇଁ P(n) ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯେତେବେଳେ n ସ୍ଥାନରେ 1 ଲେଖିବା, ତେବେ ଶେଷ ପଦ $3 \times 1 - 2 = 1$ ମିଳିବ, ଯାହା ପ୍ରଥମ ପଦ ଅଟେ, ଅର୍ଥାତ୍ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ପଦ ଅଛି ଯାହା ପ୍ରଥମ ପଦ ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ P(1) ର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $=\frac{1\times(3\times1-1)}{2}=1$

ତେଣୁ P(1) ହେଉଛି 1 = 1

n ସ୍ଥାନରେ 2 ଲେଖିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$P(2): 1+4=\dfrac{2\times(3\times2-1)}{2}$, ଅର୍ଥାତ୍ 5 = 5 ।

n ସ୍ଥାନରେ ଯଥାକ୍ରମେ k ଓ k + 1 ଲେଖିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$P(k): 1+4+7+...+(3k-2)=\dfrac{k(3k-1)}{2}$

$P(k+1): 1+4+7+...+(3k-2)+[3(k+1)-2]$

$=\dfrac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}$

ଅର୍ଥାତ୍ $1+4+7+..+(3k+1)=\dfrac{(k+1)(3k+2)}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.1

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଉକ୍ତି ସ୍ଥିର କର :

   (a) $1 + 2 + 4 ... + 2^n > 20$ (b) $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 99$

   (c) ଚେନାଇ ମୁମ୍ବାଇ ତୁଳନାରେ ଅଧିକ ସୁନ୍ଦର ।

   (d) ତାଜମହଲ କେଉଁଠାରେ ଅବସ୍ଥିତ ?

   (e) $\dfrac{1}{1\times2}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$ (n = 5 ପାଇଁ)

   (f) $\operatorname{cosec}\theta < 1$

2. ଦତ୍ତ ଅଛି P(n) : 6 ହେଉଛି $n^3 + 5n$ ର ଏକ ଗୁଣନୀୟକ; P(1), P(2), P(k) ଓ P(k+1) ଲେଖ ଯେଉଁଠି k ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।

3. $P_{(1)}, P_{(k)}$ ଓ $P_{(k+1)}$ ଲେଖ, ଯଦି $P_{(n)}$:

   (a) $2^n \geq n+1$ (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (c) n (n + 1) (n + 2), 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ (d) $(x^n - y^n)$, (x – y) ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   (e) $(ab)^n = a^nb^n$ (f) $\left(\dfrac{n^5}{5}+\dfrac{n^3}{3}+\dfrac{7n}{15}\right)$ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ।

4. P(1), P(2), P(k) ଏବଂ P(k +1) ଲେଖ, ଯଦି P(n) :

   (a) $\dfrac{1}{1\times2}+....+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

   (b) $1 + 3 + 5 + 1 .... + (2n - 1) = n^2$

(c) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + ... + n(n+1) < n(n+1)^2$

(d) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ତୁମକୁ ଯେତେବେଳେ ଉଦାହରଣ 2 ଓ 3 ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉକ୍ତି ପରି ଉକ୍ତି ଦିଆଯାଇଥିବ, ତୁମେ କିଭଳି ଏହା ସତ୍ୟ ବା ମିଥ୍ୟା ପରଖିବ ? ଏକ ଫଳପ୍ରଦ ପ୍ରଣାଳୀ ହେଉଛି ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ, ଯାହା ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

8.2 ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣର ନିୟମ (The Principle of Mathematical Induction)

ତୁମେ ତୁମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ, ପରିସ୍ଥିତି ଅନୁଯାୟୀ, ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଯୁକ୍ତିର ପ୍ରୟୋଗ କର । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି ତୁମକୁ କୁହାଗଲା ଯେ ଏବେ ତୁମର ବନ୍ଧୁଙ୍କର ଛୁଆଟିଏ ଜନ୍ମ ହୋଇଛି, ତେବେ ତୁମେ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଚାହିଁବ କି ଏହା ପୁଅଟିଏ ନାଁ ଝିଅଟିଏ । ଏଠାରେ ତୁମେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ଥିତି ପାଇଁ ସାଧାରଣ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ କରିବ । ଏହି ପ୍ରକାରର ତର୍କ ନିଗମନ ମୂଳକ ତର୍କର ଉଦାହରଣ ଅଟେ । ଏବେ ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତି କଥା ବିଚାର କରିବା । ଯେତେବେଳେ ତୁମେ ତୁମର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଦେଖୁଛ, ତୁମେ ଛାତ୍ର ମାନଙ୍କୁ ଦେଖ, ଯେଉଁ ଛାତ୍ରମାନେ ନିୟମିତ ପଢୁଛନ୍ତି ସେମାନେ ପରୀକ୍ଷାରେ ଭଲ କରନ୍ତି । ତୁମେ ଏଥିରୁ ଏକ ସାଧାରଣ ନିୟମ (ସତ୍ୟ ବା ମିଥ୍ୟା) ଗଠନ କରିଥାଅ ଯେ ''ଯିଏ ନିୟମିତ ଅଧ୍ୟୟନ କରେ, ସେ ପରୀକ୍ଷାରେ ଭଲ କରେ ।'' ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତୁମେ ଅନେକଗୁଡ଼ିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଏକ ସାଧାରଣ ନିୟମ ତିଆରି କର । ଏଭଳି ତର୍କକୁ ଆରୋହଣ ତର୍କ କହନ୍ତି । ଯାହା ତର୍କର ଏଭଳି ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯେଉଁଥିରେ ଅନେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରିସ୍ଥିତିରେ ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ତଥା ବିଚାର ଦ୍ୱାରା ଏକ ସାଧାରଣ ନିୟମର ଆବିଷ୍କାର କରାଯାଏ । ଏହିଭଳି ଯୁକ୍ତିର ବ୍ୟବହାର ଗଣିତ ତଥା ବିଜ୍ଞାନରେ କରାଯାଏ ।

ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ – ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଏକ ଅଧିକ ଯଥାର୍ଥରୂପ ଅଟେ । ଏଭଳି ଯଥାର୍ଥତାର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି । କାରଣ କୌଣସି ଉକ୍ତି ଗଣିତ ଅନୁଯାୟୀ ସେତେବେଳେ ସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ, ଯେତେବେଳେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ ସମ୍ଭବ ହୁଏ । ଏହା ସଂଗଠିତ ହେଉଛି କି ନାହିଁ ତାହା ପରୀକ୍ଷା କରିବାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ନିୟମ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।

ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣର ନିୟମ :

ମନେକର P(n), ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଏକ ଉକ୍ତି ।

(i) ଯଦି ଏହା $n = 1$ ପାଇଁ ଏହା ସତ୍ୟ ଅଟେ, ଅର୍ଥାତ୍ P(n) ସତ୍ୟ ଅଟେ ଏବଂ

(ii) P(k), $k \geq 1$କୁ ସତ୍ୟ ମନେକରି, ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $P(k+1)$ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ, ତେବେ P(n) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ନିଶ୍ଚିତ ସତ୍ୟ ହେବ ।

ମନେରଖ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତ (ii) **କହେ ନାହିଁ** କି P(k) ସତ୍ୟ । ଏହା କହେ ଯେ, **ଯେତେବେଳେ** P(k) ସତ୍ୟ, $P(k+1)$ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଆସ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା, ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା କିପରି ଆମେ ଏ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଁଞ୍ଚିବା ଯେ, $n = 11$ ପାଇଁ P(n) ସତ୍ୟ (i) ଦ୍ୱାରା P(1) ସତ୍ୟ ଅଟେ । P(1) ସତ୍ୟ ହେତୁ, ଆମେ (ii) ରେ $k = 1$ ରଖିପାରିବା । ଏଣୁ $P(1+1)$ ଅର୍ଥାତ୍ P(2) ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଯେହେତୁ P(2) ସତ୍ୟ, (ii) ରେ $k = 2$ ରଖିପାରିବା ଏବଂ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା ଯେ, $P(2+1)$ ଅର୍ଥାତ୍ P(3) ସତ୍ୟ । ବର୍ତ୍ତମାନ, (ii) ରେ $k = 3$ ନିଅ, ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା ଯେ P(4) ସତ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଯଦି ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଏପ୍ରକାର ଚାଲୁରଖାଯାଏ, ତେବେ ଆମକୁ P(11) ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ବୋଲି ମିଳିପାରିବ ।

ଏହା ମଧ୍ୟ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଉପରୋକ୍ତ ଯୁକ୍ତିରେ, 11 ର କୌଣସି ବିଶେଷ ଭୂମିକା ନାହିଁ । ଏହିପରି P(137) କୁ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ । ପ୍ରକୃତରେ, ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $n > 1$ ପାଇଁ P(n) ସତ୍ୟ । ଆସ, ଏବେ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ଦେଖିବା, ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ କିଭଳି ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନିୟମ ସହାୟକ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 8.4 ପ୍ରମାଣକର ଯେ

$$1+2+3+...+n=\frac{n}{2}(n+1),$$ ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ପାଇଛନ୍ତି

$$P(n) : 1+2+3+...+n=\frac{n}{2}(n+1),$$

ଏଣୁ P(1) ହେଉଛି '$1=\frac{1}{2}(1+1)$', ଏହା ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ତେଣୁ P(1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଆସ ଏବେ ଦେଖିବା ଯଦି P(k) ସତ୍ୟ ହୁଏ P(k+1) ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ।

ଏଣୁ : ମନେକର P(k) ସତ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍

$$1+2+3+...+k=\frac{k}{2}(k+1) \quad ...(i)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $P(k+1) : 1+2+3+...+k+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

ଏହା ସତ୍ୟ ହେବ ଯଦି ଯଦି ଆମେ ଦର୍ଶାଇ ପାରିବା ଯେ, ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

P (k + 1) ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1 + 2 + 3 + ... + k) + (k + 1)$

$$=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1)$$

$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=(k+1)\frac{(k+2)}{2}$$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, P(k+1) ର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ, ଯଦି P(k) କୁ ସତ୍ୟ ମନେକର ତେବେ, P(k+1) ସତ୍ୟ ହେବ । ଯେହେତୁ P(1) ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ, ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତିର ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣ ହୁଏ ଏବଂ ଆମେ ଏ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲେ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ । ତୁମେ ଦେଖିପାରିବଯେ ତିନିଗୋଟି ସୋପାନରେ, ଆମେ ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ପ୍ରମାଣ କଲେ –

ଆଧାର ସୋପାନ [ଅର୍ଥାତ୍ (i) କୁ ପରଖିବା], **ଆରୋହଣ ସୋପାନ** [ଅର୍ଥାତ୍ (ii) କୁ ପରଖିବା], ଫଳରେ ପରିଣାମରେ ଉପନୀତ ହେବା ।

ଉଦାହରଣ 8.5 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$1\times2 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + 4\times2^4 + ... n \times 2^n = (n-1)\times 2^{n+1} + 2,$

ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ଯେଉଁଠି $P(n) : 1\times2^1 + 2\times2^2 + 3\times2^2 + 3\times2^3 + n\times2^n = (n-1)\times2^{n+1} + 2$

ଏଣୁ $P(1) : 1\times2^1 = (1-1)\, 2^{1+1} + 2$ ଅର୍ଥାତ୍, $2 = 2$; ଏଥିପାଇଁ P(1) ସତ୍ୟ

P(k) କୁ ସତ୍ୟ ମନେକରିବା, ଅର୍ଥାତ୍

$1\times2^1 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + ... + k\times2^k = (k-1)\, 2^{k+1} + 2$ ... (i)

ଏବେ ଆମେ P(k+1) ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ P(k +1) :

$1\times2^1 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + ... + k\times2^k + (k+1)\times2^{k+1}$

$= [(k+1)-1]\, 2^{(k+1+1)} + 2$

$= k\times2^{k+2} + 2$

P(k + 1) ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1\times2^1 + 2\times2^2 + 3\times2^3 + ... + k\times2k + (k+1)2^{k+1})$

$= 2^{k+1}\, [(k-1) + (k+1)\,] + 2$

$= 2^{k+1}\, (2k) + 2$ ((i) ବ୍ୟବହାର କଲେ)

$= k2^{k+2} + 2$

= P(k+1)ର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ତେଣୁ P(k +1) ସତ୍ୟ

ଫଳରେ ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନିୟମ ଅନୁଯାୟୀ, ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

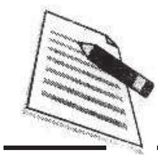
ଉଦାହରଣ 8.6 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ, ପ୍ରମାଣ କର $(x^{2n-1} + y^{2n-1})$, $(x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ, ଯେତେବେଳେ $x, y \in N$ ।

ସମାଧାନ : ଆସ ଦେଖିବା, ଆମେ ଏଠାରେ ଆରୋହଣ ନୀତିକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବା କି ନାଁ । ଆମେ '$(x^{2n-1} + y^{2n-1})$, $(x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ' ଉକ୍ତିଟିକୁ P(n) କହିବା ।

ତେଣୁ P(1) : '$(x^{2-1} + y^{2-1})$, $x + y$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ', ଯାହାକି ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏଣୁ P(1) ସତ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ମନେକର ଯେ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା k ପାଇଁ P(k) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।



ଅର୍ଥାତ୍, $(x^{2k-1} + y^{2k-1})$, $(x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଲା, କୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା t ପାଇଁ

$x^{2k-1} + y^{2k-1} = (x + y)t$

ତେବେ, $x^{2k-1} = (x + y)t - y^{2k-1}$

ଏବେ ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ P (k+1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍, '$[x^{2(k+1)-1} + y^{2(k+1)-1}]$, $(x + y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ' ଏହା ସତ୍ୟ ।

ଏବେ $x^{2(k+1)-1} + y^{2(k+1)-1} = x^{2k+1} + y^{2k+1}$

$= x^{2k-1+2} + y^{2k+1}$

$= x^2 x^{2k-1} + y^{2k+1}$

$= x^2 [(x + y)t - y^{2k-1}] + y^{2k+1}$ (1) ରୁ

$= x^2 (x + y)t - x^2 y^{2k-1} + y^{2k+1}$

$= x^2 (x + y) t - x^2 y^{2k-1} + y^2 y^{2k-1}$

$= x^2 (x + y)t - y^{2k-1} (x^2 - y^2)$

$= (x + y) t - y^{2k-1} (x^2 - y^2)$

$= (x + y) [x^2 t - (x - y) y^{2k-1}]$

ଯାହା $(x + y)$ ର ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏହିପରି, P(k+1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏଣୁ, ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣନୀତି ଦ୍ୱାରା, ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 8.7 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $2^n > n$

ସମାଧାନ : ଆମେ ।ଇଛୁ $P(n) : 2^n > n$

ଏଣୁ $P(1) : 2^1 > 1$, ଅର୍ଥାତ୍, $2 > 1$; ଏଣୁ P(1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଆମେ ମନେକରିବା ଯେ P(k) ସତ୍ୟ

ଅର୍ଥାତ୍, $2^k > k$ ... (i)

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ

P(k+1) ସତ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍ $2^{k+1} > k+1$ ।

(i) ର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$2^{k+1} > 2k$

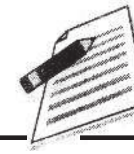
$\Rightarrow 2^{k+1} > k + k$

$\Rightarrow 2^{k+1} > k+1$, (କାରଣ $k > 1$)

ଏଣୁ $P^{(k+1)}$ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏଥିପାଇଁ, ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଦ୍ୱାରା, ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

କେବେ କେବେ ଆମକୁ ଏପରି କେତେକ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ହୁଏ, ଯାହା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୌଣସି ଗଣନସଂଖ୍ୟା,



ମନେକର a, ଠାରୁ ବଡ଼ ।

(ଏହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ 8.8 ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।)

ଏପରି ସ୍ଥଳେ, ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଉକ୍ତିରେ, P(1) ସ୍ଥାନରେ P(a+1) ନେବା ।

ଉଦାହରଣ 8.8 ପ୍ରମାଣକର ଯେ,

ପ୍ରତ୍ୟେକ $n \geq 3$ ପାଇଁ $n^2 > 2(n+1)$, ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ସମାଧାନ : ଆସ ଆମେ $n^2 > 2(n+1)$ ଉକ୍ତିକୁ P(n) କହିବା, ଯେଉଁଠି $n \geq 3$ । ଯେହେତୁ ଉକ୍ତିକୁ $n \geq 3$ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ, ପ୍ରଥମ ଯଥାର୍ଥ ଉକ୍ତି P(3) ଅଟେ । ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିବା, କାରଣ P(3) ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ କି ନୁହେଁ ।

$P(3) : 3^2 > 2 \times 4$ ଅର୍ଥାତ୍ $9 > 8$

ଏଣୁ P(3) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଆମେ ମନେକରିବା ଯେ, P(k) ସତ୍ୟ, ଯେଉଁଠି $k \geq 3$ ଅର୍ଥାତ୍

$k^2 > 2(k+1)$ ... (i)

ଏବେ ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ P(k+1) ସତ୍ୟ ।

$P(k+1) : (k+1)^2 > 2(k+2)$

P(k + 1) ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (k+1)^2$

$= k^2 + 2k + 1$

$> 2(k+1) + 2k + 1$ [(i)ରୁ]

$> 3 + 2k + 1$, କାରଣ $2(k+1) > 3$

$= 2(k+2)$

ଏହିପରି $(k+1)^2 > 2(k+2)$

ଏଣୁ P(k+1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏଥିପାଇଁ ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଦ୍ୱାରା, ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିଟି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା $n \geq 3$ ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 8.9 ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଦ୍ୱାରା ପ୍ରମାଣ କର

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}\right)$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $P(n): \left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^3}{3} + \frac{7n}{15}\right)$ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore$ $P(1) : \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}=\frac{3+5+7}{15}=\frac{15}{15}=1$, ଏହା ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore$ $P(1)$ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ମନେକର $P(k) : \left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7n}{15}\right)$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ସତ୍ୟ ଅଟେ । ... (i)

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+3)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$

$$=\frac{1}{5}[k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1]+\frac{1}{3}[k^3+3k^2+3k+1]+\left(\frac{7}{15}k+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+(k^4+2k^3+3k^2+2k)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+(k^4+2k^3+3k^2+2k)+1 \qquad \text{... (ii)}$$

(i) ରୁ $\frac{k^3}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା

$k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore$ (ii) ଯେହେତୁ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି, ଏହା ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore$ $P(k+1)$ ସତ୍ୟ ଅଟେ, ଯେତେବେଳେ $P(k)$ ସତ୍ୟ ।

$\therefore$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $P(n)$ ସତ୍ୟ ।

ତେଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ, $\left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\right)$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.2

1. ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଦ୍ୱାରା, ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ସତ୍ୟ, ଏହା ପ୍ରମାଣ କର ।

   (a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

   (b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 ... + n)^2$

   (c) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

   (d) $1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$

2. ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଦ୍ୱାରା, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମାନତାକୁ ପ୍ରମାଣ କର ।

   (a) $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

   (b) $\frac{1}{1\times 3} + \frac{1}{3\times 5} + \frac{1}{5\times 7} + ... + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$

   (c) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + ... + n(n + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

   (a) $n^3 + 5n$, 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

   (b) $(x^n - 1)$, $(x - 1)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

   (c) $(n^3 + 2n)$, 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

   (d) $(n^4 + 2n^3 + n^2)$, 4 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

4. ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର ।

   (a) $3^n \geq 2n + 1$ (b) $4^{2n} > 15n$

   (c) $1 + 2 + ... + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2$

5. ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ବ୍ୟବହାର କରି, ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରମାଣ କର ।

   (a) $n \geq 5$ ପାଇଁ $2^n > n^2$, ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

   (b) $n > 1$ ପାଇଁ, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ।

6. ଯଦି n, 1 ଠାରୁ ବଡ଼ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର, $n(n^2 - 1)$, 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଗଣନସଂଖ୍ୟା ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କୌଣସି ଏକ ଉକ୍ତି P(n) କୁ ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ହେଲେ, ଉଭୟ ମୌଳିକ ଓ ଆରୋହଣ ସୋପାନ ସତ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ଯଦି ଏଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅସତ୍ୟ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ଯଦି $P(n) : (a + b)^n \leq a^n + b^n$, ସମସ୍ତ a ଓ b ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ମାନ ପାଇଁ, P(1) ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ସତ୍ୟ ହେବ । କିନ୍ତୁ P(k) ସତ୍ୟ ହେଉଥିଲେ ମଧ୍ୟ,

P(k + 1) ସତ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ । ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ $n \in N$ ପାଇଁ, ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, $[(2+3)^2 \nleq 2^2 + 3^2]$ । ଆସ ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କରିବା ।

$P(n) : n > \frac{n}{2} + 20$ ନିଆଯାଉ

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, P(1) ସତ୍ୟ ନୁହଁ । କିନ୍ତୁ ଆରୋହଣ ପାଦ ସତ୍ୟ । କାରଣ ଯଦି ଆମେ P(k) କୁ ସତ୍ୟ ମନେକରନ୍ତି, ଅର୍ଥାତ୍

$$\Rightarrow k > \frac{k}{2} + 20$$

$$P(k+1) : k+1 > \frac{k}{2} + 20 + 1 > \frac{k}{2} + 20 + \frac{1}{2} = \frac{k+1}{2} + 20$$

$\Rightarrow$ P (k +1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

8.3 ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ (Binomial theorem for Natural exponent)

ତୁମେ ଏକ ଦୁଇପଦୀ ରାଶିକୁ ତା'ନିଜ ସହିତ କିମ୍ବା ଅନ୍ୟ ଏକ ଦ୍ୱିପଦୀ ରାଶି ସହ ଗୁଣିଥିବ । ଏହି ଜ୍ଞାନକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆସ କିଛି ପ୍ରସାରଣ କରିବ । ଦ୍ୱିପଦ (x + y) ଉପରେ ବିଚାର କର । ଏବେ

$(x + y)^1 = x + y$

$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$

$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)^4 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱର ଦ୍ୱିପଦ ପ୍ରସାରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରସାରଣରେ, ଏକ ଦ୍ୱିପଦର ଘାତକୁ ପ୍ରସାରିତ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇଛି ଯେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଦୁଇପଦୀ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ପଦ (ଯାହା ଏହି ଉଦାହରଣରେ x ଅଟେ) ର ଘାତଗୁଡ଼ିକର ଅଧଃ କ୍ରମରେ ରହିଛି । ଯଦି ଆମେ ଏହି ସଂପ୍ରସାରଣକୁ ଧ୍ୟାନ ସହକାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟ ସାମ୍ନାକୁ ଆସିବ ।

1. ସଂପ୍ରସାରଣର ପଦସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱିପଦର ଘାତାଙ୍କଠାରୁ ଏକ ଅଧିକ ।

   ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ $(x + y)^4$ ରେ, ସଂପ୍ରସାରଣର ପଦସଂଖ୍ୟା 5 ।

2. ସଂପ୍ରସାରଣରେ ପ୍ରଥମ ପଦରେ, x ର ଘାତାଙ୍କ ଦ୍ୱିପଦ ରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ସହ ସମାନ ଏବଂ ସଂପ୍ରସାରଣର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପଦରେ ଏହି ଘାତାଙ୍କ 1 କମି କମି ଯାଏ ।

3. ପ୍ରଥମ ପଦରେ y ର ଘାତାଙ୍କ ଶୂନ (ଯେହେତୁ $y^0 = 1$) । 2ୟ ପଦରେ, y ର ଘାତାଙ୍କ 1 ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପଦରେ ଏହା 1 ବୃଦ୍ଧି ପାଏ ସଂପ୍ରସାରଣର ଶେଷପଦର ଘାତାଙ୍କ, ଦ୍ୱିପଦୀ ରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ସହ ସମାନ ହୁଏ ।

4. ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ, x ଓ y ର ଘାତାଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱିପଦ ରାଶିର ଘାତାଙ୍କ ସହ ସମାନ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ସଂପ୍ରସାରଣ $(x + y)^5$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ x ଓ y ର ଘାତାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 5 ।

ଯଦି ଆମେ ସଂଯୋଗାତ୍ମକ ସହଗଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରୁ, ତେବେ ଆମେ ସଂପ୍ରସାରଣଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା ।

$$(x + y)^3 = {}^3c_0\, x^3 + {}^3c_1\, x^2y + {}^3c_2\, x^2 y^2 + {}^3c_3\, y^3$$

$$(x + y)^4 = {}^4c_0\, x^4 + {}^4c_1\, x^3y + {}^4c_2\, x^2 y^2 + {}^4c_3\, y^3 + {}^4c_4\, y^4$$

$$(x + y)^5 = {}^5c_0\, x^5 + {}^5c_1\, x^4y + {}^5c_2\, x^3 y^2 + {}^5c_3\, x^2y^3 + {}^5c_5\, y^5 \text{ ଇତ୍ୟାଦି}$$

ଅଧିକ ବ୍ୟାପକ ରୂପରେ, $(x + y)^3$ ର ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣକୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ରୂପରେ ଲେଖିପାରିବା ଯେଉଁଠି n ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । ଏହି ଉକ୍ତିଟିକୁ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ବା, ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 8.1

$$(x + y)^n = {}^nc_0\, x^n + {}^nc_1\, x^{n-1} y^1 + {}^nc_2\, x^{n-2}\, y^2 + \dots + {}^nc_{n-1}\, x\, y^{n-1} + {}^nc_n\, y^n \; \dots \text{(A)}$$

ଯେଉଁଠି $n \in N$ ଏବଂ $x, y \in R$ ।

ପ୍ରମାଣ : ଆସ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟକୁ ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣନୀତି ଦ୍ୱାରା ପ୍ରମାଣ କରିବା । ମନେକର, ଏହି ଉକ୍ତି (A) କୁ P(n) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବା, ଅର୍ଥାତ୍,

$$P(n) : (x + y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}\, y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y + \dots$$
$$+ {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_ny^n \; \dots \text{(i)}$$

ଆସ P(1) ସତ୍ୟ କି ନୁହଁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା । (i) ରୁ ଆମକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟ ମିଳେ :

$$P(1) : (x + y)^1 = {}^1C_0\, x + {}^1C_1y = 1 \times x + 1 \times y$$

ଅର୍ଥାତ୍, $(x + y)^1 = x + y$

ଏଣୁ, P(1) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଏବେ ଆମେ ଏହା ମାନିନେବା ଯେ, P(k) ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $P(k) : (x + y)^k = {}^kC_0x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}\, y^2 + {}^kC_3x^{k-3}\cdot y^3 +$

$$\dots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_ky^k \; \dots \text{(ii)}$$

P(k) କୁ ସତ୍ୟ ମନେକରି, ଯଦି ଆମେ P(k+1) କୁ ସତ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ କରିପାରିବା, ତେବେ ସମସ୍ତ n ପାଇଁ P(n) ସତ୍ୟ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $(x + y)^{k+1} = (x + y)\,(x + y)^k = (x + y)\,({}^kC_0\, x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}y^2 +$

$$\dots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_k\, y^k)$$

$$= {}^kC_0 x^{k+1} + {}^kC_0x^ky + {}^kC_1x^ky + {}^kC_1x^{k-1}\cdot y^2 + {}^kC_2x^{k-1}y^2 + {}^kC_2x^{k-2}y^3 +$$

$$\ldots + {}^kC_{k-1}x^2y^{k-1} + {}^kC_{k-1}xy^k + {}^kC_kxy^k + {}^kC_ky^{k+1}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $(x + y)^{k+1} = {}^kC_0x^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)\, x^ky + ({}^kC_1 + {}^kC_2)\ x^{k-1}\cdot y^2 +$

$$\ldots. + ({}^kC_{k-1}\ {}^kC_k)\, xy^k + {}^kC_ky^{kH} \ldots(iii)$$

ପାଠ 7 ରୁ ଆମେ ଜାଣୁ ${}^kC_0 = 1 = {}^{k+1}C_0$ ...(iv)

ଏବଂ ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$

$${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$$

ଏଣୁ, ${}^kC_0 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_1$....(v)

$${}^kC_1 + {}^kC_2 = {}^{K+1}C_2$$

$${}^kC_2 + {}^kC_3 = {}^{k+1}C_3$$

....

.... ଆଗକୁ ଏହିପରି

(iv)ଓ (v) ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ (iii) କୁ ନିମ୍ନ ରୂପରେ ଲେଖିପାରିବା

$$(x + y)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, x^{k+1} + {}^{k+1}C_1x^ky + {}^{k+1}C_2x^{k-1}\, y^2 + \ldots.$$

$$+ {}^{k+1}C_kxy^k + {}^{k+1}C_{k+1}y^{k+1}$$

ଯାହା P(k + 1) ସତ୍ୟ ବୋଲି ଦର୍ଶାଏ ।

ଏଇ ପ୍ରକାରେ, ଆମେ ଦର୍ଶାଇଲେ ଯେ, (a) P(1) ସତ୍ୟ ଏବଂ ଯଦି P(k) ସତ୍ୟ, ତେବେ P(k+1) ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏଣୁ, ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତି ଅନୁସାରେ, n ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ, P (n) ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏହିପରି ଆମେ ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦି ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କଲେ ।

ଏହି ଫଳାଫଳ ଆରବର ପ୍ରସିଦ୍ଧ କବି ଓମର ଖାୟାମଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଥମେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଥିଲା, ଯଦିଓ ତାଙ୍କର ଏହି ପ୍ରମାଣ ଆଜି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କାହାକୁ ମଧ୍ୟ ମିଳିପାରି ନାହିଁ ।

ଏବେ ଆମେ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟକୁ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ କିଛି ଉଦାହରଣ ନେବା ।

ଉଦାହରଣ 8.10 $(x + 3y)^5$ ର ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦ୍ୱିପଦ ରାଶିର ପ୍ରଥମ ପଦ x ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ 3y । ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$(x + 3y)^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1x^4\,(3y)^1 + {}^5C_2x^3(3y)^2 + {}^5C_3x^2\,(3y)^3 + {}^5C_4x\,(3y)^4 + {}^5C_5\,(3y)^5.$$

$= 1 \times x^5 + 5x^4 \times 3y + 10x^3 \times (9y^2) + 10x^2 \times (27y^3) + 5x \times (81y^4) + 1 \times 243y^5.$

$= x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$

ଏହିପରି, $(x + 3y)^5 = x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243\,y^5$

ଉଦାହରଣ 8.11 $(1 + a)^n$ କୁ a ର ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦରେ ସଂପ୍ରସାରଣ କର, ଯେଉଁଠି a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

ସମାଧାନ : $x = 1$ ଓ $y = a$ ନେଇ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ ପାଇବା

$$(1 + a)^n = {}^nc_0\,(1)^n + {}^nc_1(1)^{n-1}\,a + {}^nc_2(1)^{n-2}\,a^2 + \ldots. + {}^nc_{n-1}(1)\,a^{n-1} + {}^nC_n\,a^n$$

ଅର୍ଥାତ୍, $(1+ a)^n = 1 + {}^nc_1a + {}^nc_2a^2 + \ldots + {}^nc_{n-1}\,a^{n-1} + {}^nc_n\,a^n \ldots$ (B)

(B) ହେଉଛି ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ଉକ୍ତିର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ ।

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5, \left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^5, \left(\frac{a}{4}+\frac{2}{a}\right)^5, \left(\frac{2t}{3}-\frac{3}{2t}\right)^6$ ଆଦି ଭଳି ପରିପ୍ରକାଶର ସଂପ୍ରସାରଣ ପାଇବା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ ।

ଆସ, ଏହାକୁ ଏକ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 8.12 $\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^4$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ ଯେଉଁଠି $x, y \neq 0$ ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ପାଇବା

$$\left[\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right]^4 = {}^4C_0\left[\frac{y}{x}\right]^4 + {}^4C_1\left[\frac{y}{x}\right]^3\left[\frac{1}{y}\right] + {}^4C_2\left[\frac{y}{x}\right]^2\left[\frac{1}{y}\right]^2$$

$$+ {}^4C_3\left[\frac{y}{x}\right]\left[\frac{1}{y}\right]^3 + {}^4C_4\left[\frac{1}{y}\right]^4$$

$$= 1\times\frac{y^4}{x^4} + 4\times\frac{y^3}{x^3}\times\frac{1}{y} + 6\times\frac{y^2}{x^2}\times\frac{1}{y^2} + 4\left[\frac{y}{x}\right]\times\frac{1}{y^3} + 1\times\frac{1}{y^4}$$

$$= \frac{y^4}{x^3} + 4\frac{y^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{xy^2} + \frac{4}{y^4}$$

ଉଦାହରଣ 8.13 ଏକ ନଗରର ଜନସଂଖ୍ୟା ବାର୍ଷିକ 3% ହାରରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ । 5 ବର୍ଷରେ ଶତକଡ଼ା କେତେ ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଆଶାକରାଯାଏ ? ଦଶମିକ ଦୁଇ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବର୍ତ୍ତମାନ ଲୋକସଂଖ୍ୟା a ଅଟେ । 1 ବର୍ଷ ପରେ ଏହା ହେବ $a+\frac{3}{100}a = a\left(1+\frac{3}{100}\right)$ ।

2 ବର୍ଷ ପରେ ଏହା ହେବ $a\left(1+\frac{3}{100}\right)+\frac{3}{100}\left[a\left(1+\frac{3}{100}\right)\right]$

$= a\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{3}{100}\right) = a\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$

ଏହିପରି 5 ବର୍ଷ ପରେ ଏହା ହେବ $a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5$ ।

ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଏବଂ ଦଶମିକ 3 ସ୍ଥାନ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଙ୍କକୁ ଛାଡ଼ିଦେଲେ, ଆମକୁ ନିମ୍ନ ମାନ ମିଳିବ ।

$a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 \approx a\left[1+5\,(0\cdot 03)+10\,(0\cdot 03)^2\right]$

$= a \times 1\cdot 159$

ଏଥିପାଇଁ 5 ବର୍ଷରେ ବୃଦ୍ଧି $= 0\cdot 159 \times 100\ \%$

$= \frac{159}{1000}\times 1000\times\frac{1}{100} = 15\cdot 9\%$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 8.14 ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 102^4 (b) 97^3

ସମାଧାନ :

(i) $102^4 = (100+2)^4$

$= {}^4C_0\,(100)^4 + {}^4C_1\,(100)^3\times 2 + {}^4C_2\,(100)^2\times 2^2 + {}^4C_3(100)\times 2^3 + {}^4C_4\times 2^4$

$= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16$

$= 108243216$

(ii) $(97)^3 = (100-3)^3$

$= {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1\,(100)^2\times 3 + {}^3C_2(100)\times 3^2 - {}^3C_3\times 3^3$

$= 1000000 - 90000 + 2700 - 27$

$= 1002700 - 90027$

$= 912673$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.3

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ :

   (a) $(2a + b)^3$ (b) $(x^2 - 3y)^6$ (c) $(4a - 5b)^4$ (d) $(ax + by)^n$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ :

   (a) $(1 - x)^7$ (b) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^7$ (c) $(1 + 2x)^5$

3. ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ :

   (a) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^5$ (b) $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^7$ (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ (d) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$

4. ମନେକର ମୁଁ ଏକ ଲକ୍ଷ ଟଙ୍କା 18% ଚକ୍ରବୃଦ୍ଧି ସୁଧହାରରେ ବିନିଯୋଗ କଲି । 10 ବର୍ଷ ପରେ ମୁଁ କେତେ ଟଙ୍କା ଫେରିପାଇବି ? ଦଶମିକ ଦୁଇସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିଜ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

5. ଜୀବାଣୁମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 2% ହାରରେ ବଢ଼େ । ଯଦି ସକାଳ 9ଟାରେ ଜୀବାଣୁମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା $1{\cdot}5 \times 10^5$ ଅଟେ, ତେବେ ସେହି ଦିନ ଦ୍ୱିପ୍ରହର 1 ଟା ବେଳେ ଏହି ସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $(101)^4$ (ii) $(99)^4$ (iii) $(1{\cdot}02)^3$ (iv) $(0{\cdot}98)^3$

8.4 ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣରେ ସାଧାରଣ ପଦ ଓ ମଧ୍ୟପଦ (General and Middle term in Binomial Expansion)

ଆସ (A) ରେ ଦତ୍ତ $(x + y)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର ବିଭିନ୍ନ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା, ଅର୍ଥାତ୍

$$(x + y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1\, x^{n-1}\, y + {}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2 + {}^nC_3\, x^{n-3}\, y^3 + ... + {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n$$

ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା

ପ୍ରଥମ ପଦଟି ${}^nC_0x^n$, ଅର୍ଥାତ୍ ${}^nC_{1-1}\, x^n\, y^0$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦଟି ${}^nC_1\, x^{n-1}\, y$,ଅର୍ଥାତ୍, ${}^nC_{2-1}\, x^{n-1}\, y^1$ ।

ତୃତୀୟ ପଦଟି ${}^nC_2x^{n-2}\, y^2$,ଅର୍ଥାତ୍ ${}^nC_{3-1}\, x^{n-2}\, y^2$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟରୁ ଆମେ ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଏହା କହିପାରିବା କି

$(r + 1)$ ତମ ପଦ ହେଉଛି ${}^nC_{(r+1)-1}\, x^{n-r}\, y^r$, ଅର୍ଥାତ୍ ${}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$ ।

ଯଦି ଏହି ପଦକୁ T_{r+1} ଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ କରାଯାଏ, ତେବେ ଆମକୁ ମିଳିବ

$T_{r+1} = {}^nC_r\, x^{n-r}\, y^r$

ସାଧାରଣତଃ T_{r+1} କୁ ଦ୍ୱିପଦ ସମ୍ପ୍ରସାରଣୀର ସାଧାରଣ ପଦ କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆସ ଆମେ ଆଉ କେତେକ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କରିବା ଏବଂ କେତେକ ସଂପ୍ରସାରଣର ସାଧାରଣ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 8.15 $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ (r + 1) ତମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ସଂପ୍ରସାରଣର ପ୍ରଥମ ପଦ ପାଇଁ ନିଜ ଉତ୍ତରର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

ସମାଧାନ : ସଂପ୍ରସାରଣର ସାଧାରଣ ପଦ ହେଉଛି :

$$T_{r+1} = {}^nC_r\, (x^2)^{(n-r)} \left(\frac{1}{x}\right)^r$$

$$= {}^n C_r\, x^{2n-2r} \frac{1}{x^r}$$

$$= {}^n C_r\, x^{2n-3r} \quad ...(i)$$

ଏଥିପାଇଁ, ସଂପ୍ରସାରଣରେ (r + 1) ତମପଦ ${}^nC_r\, x^{2n-3r}$ ଅଟେ ।

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ କଲେ, ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ, ପ୍ରଥମ ପଦ $(x^2)^n$ ଅଥବା x^{2n} ଅଟେ ।

(i) ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, r = 0 ନେଇ ଆମେ ପ୍ରଥମପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଯେହେତୁ $T_1 = T_{0+1}$

$\therefore\ T_1 = {}^nC_0\, x^{2n-0} = x^{2n}$

ଏହା ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରେ ଯେ, r + 1 = 1 ପାଇଁ T_{r+1} ର ପରିପ୍ରକାଶ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 8.16 $\left(1 - \frac{2}{3}x^3\right)^6$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର ପଞ୍ଚମପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $T_{r+1} = T_5$, ଯେଉଁଥିରୁ ପାଇବା r + 1 = 5

ଅର୍ଥାତ୍ r = 4 ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଏଠାରେ n = 6 ଓ $a = \frac{-2}{3}x^3$

$$\therefore T_5 = {}^6C_4\left(\frac{-2}{3}x^3\right)^4$$

$$= {}^6C_2\left(\frac{16}{81}\times r^{12}\right)$$

$$= \frac{6\times 5}{2}\times\frac{16}{81}\times x^{12} = \frac{80}{27}x^{12}$$

ଏହି ସଂପ୍ରସାରଣର ପଞ୍ଚମପଦ ହେଉଛି $\frac{80}{27}x^{12}$ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.4

1. ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ, ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିପଦୀମାନଙ୍କର ସଂପ୍ରସାରଣର $(r+1)$ ତମ ପଦ ଲେଖ ।

   (a) $(2x+y)^n$ (b) $(2a^2-1)^n$

   (c) $(1-a)^n$ (d) $\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^n$

2. ନିମ୍ନ ଦ୍ୱିପଦୀମାନଙ୍କର ସଂପ୍ରସାରଣର ସୂଚିତ ପଦ ଲେଖ ।

   (a) $(1+2y)^8$; ଷଷ୍ଠ ପଦ (b) $(2x+3)^7$; ଚତୁର୍ଥ ପଦ

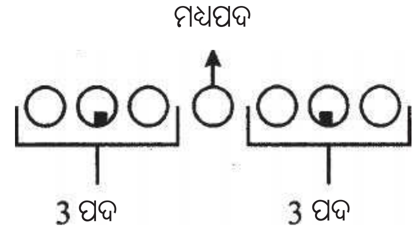
   (c) $(2a-b)^{11}$, ସପ୍ତମ ପଦ (d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; ଚତୁର୍ଥ ପଦ

   (e) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^7$; ପଞ୍ଚମ ପଦ

ଏବେ ତୁମେ ଏକ ସଂପ୍ରସାରଣର ସାଧାରଣ ପଦ ସହ ପରିଚିତ ହୋଇଗଲଣି । ଆସ ଦେଖିବା କିଭଳି ଏକ ଦ୍ୱିପଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣର **ମଧ୍ୟପଦ** (ମଧ୍ୟପଦ ଗୁଡ଼ିକ) କିପରି ପାଇପାରିବା । ମନେପକାଅ ଯେ ଏକ ଦ୍ୱିପଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣର ପଦସଂଖ୍ୟା ସର୍ବଦା ସମ୍ପୃକ୍ତ ଦ୍ୱିପଦର ଘାତାଙ୍କ ଠାରୁ ଏକ ବେଶୀ । ଏହା ସୂଚାଏ ଯେ, ଯଦି ଘାତାଙ୍କ ଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ପଦସଂଖ୍ୟା ଅଯୁଗ୍ମ ଏବଂ ଯଦି ଘାତାଙ୍କ ଅଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ପଦସଂଖ୍ୟା ଯୁଗ୍ମ । ଯେତେବେଳେ ଆମେ କୌଣସି ଦ୍ୱିପଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣର ମଧ୍ୟପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ସେତେବେଳେ ଆମେ ଦୁଇଗୋଟି ପରିସ୍ଥିତିର ସମ୍ମୁଖୀନ ହେବା ।

ପରିସ୍ଥିତି -1 : ଯେତେବେଳେ n ଯୁଗ୍ମ

ଏଭଳି ଏକ ପରିସ୍ଥିତିର ଅଧ୍ୟୟନ କରିବାକୁ, ଆସ n ର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ନେବା ଯଥା : $n = 6$ । ସଂପ୍ରସାରଣର ପଦସଂଖ୍ୟା 7 ହେବ । ଚିତ୍ର 8.1 ରୁ ଦେଖି ପାରିବା ଯେ 4ର୍ଥ ପଦର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 3 ଗୋଟିପଦ ରହିବ ।

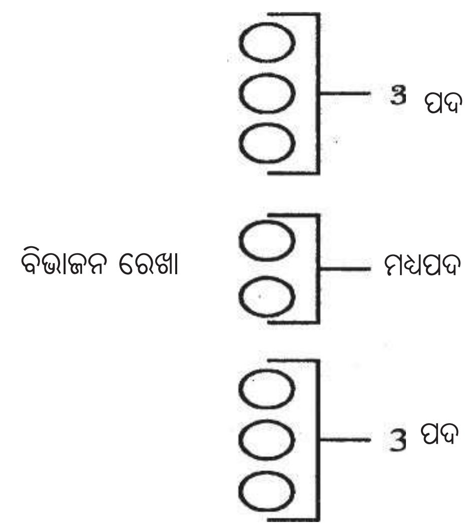


ଚିତ୍ର 8.1

ସାଧାରଣଭାବରେ,ଏକ ଦ୍ୱିପଦର ଘାତାଙ୍କ n ଯୁଗ୍ମ ହେଲେ; $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ତମ ପଦର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $\frac{n}{2}$ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ରହିବେ । ତେଣୁ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ତମ ପଦ ହେବ ମଧ୍ୟମ ପଦ ।

ପରିସ୍ଥିତି -2 : ଯେତେବେଳେ n ଅଯୁଗ୍ମ

ଆସ ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ $n = 7$ ନେଇ ଦେଖିବା, ଏଇ ପରିସ୍ଥିତିରେ କ'ଣ ହୁଏ । ଏହାର ସଂପ୍ରସାରଣର ପଦସଂଖ୍ୟା 8 ହେବ । ଚିତ୍ର 8.2 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ, ଏଠାରେ ତୁମେ ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟପଦ ପାଉଛ କି ? ନା, । କିନ୍ତୁ ଆମେ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଗଲା ଭଳି ଏକରେଖା ଦ୍ୱାରା ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ସମାନ ଭାଗରେ ପରିଣତ କରିପାରିବା । ଆମେ ବିଭାଜନ ରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ନିକଟତମ ପଦଦ୍ୱୟକୁ ମଧ୍ୟପଦ କହିବା । କାରଣ ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟପଦର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଅନ୍ୟ ମଧ୍ୟ ପଦର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱର ପଦସଂଖ୍ୟା ସମାନ ଅଟେ ।



ଚିତ୍ର 8.2

ଏହିପରି ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟପଦ ଅଛି ।

ପ୍ରଥମଟି ହେଉଛି ଚତୁର୍ଥପଦ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{7+1}{2}$ ତମପଦ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟଟି ହେଉଛି ପଞ୍ଚମପଦ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{7+3}{2}$ ତମପଦ ।

ସେହିପରି $n = 13$ ହେଲେ, $\frac{13+1}{2}$ ତମପଦ ଓ $\frac{13+3}{2}$ ତମପଦ ଦ୍ୱୟକୁ, ଅର୍ଥାତ୍ ୭ମ ପଦ ଓ ୮ମ ପଦକୁ ମଧ୍ୟପଦ କହିବା । ଏହା ଚିତ୍ର 8.3 ରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ।

ଚିତ୍ର **8.3**

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲେ ଯେ, ଯେତେବେଳେ ଏକ ଦ୍ୱିପଦର ଘାତାଙ୍କ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା, ସେତେବେଳେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସଂପ୍ରସାରଣରେ $\frac{n+1}{2}$ ତମପଦ ଓ $\frac{n+3}{2}$ ତମ ପଦଦ୍ୱୟ ହେଉଛି ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟପଦ ।

ଆସ ଆମେ ଅନ୍ୟ କିଛି ଉଦାହରଣର ବିଚାର କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 8.17 $(x^2 + y^2)^8$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର ମଧ୍ୟପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $\because n = 8$ (ଏକ ଯୁଗ୍ମସଂଖ୍ୟା)

ତେଣୁ, $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ ତମପଦ ଅର୍ଥାତ୍ ୫ମ ପଦ ହେବ ମଧ୍ୟପଦ ।

ସାଧାରଣ ପଦ $T_{r+1} = {}^8C_r\,(x^2)^{8-r}\,y^r$ ରେ $r = 4$ ନେଲେ, ପାଇବା

$T_5 = {}^8C_4(8^2)^{8-4}\,(y^2)^4 = 70x^8\,y^8$

ଉଦାହରଣ 8.18 $\left(2x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର ମଧ୍ୟପଦ (ପଦଗୁଡ଼ିକ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $n = 9$ (ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା)

ତେଣୁ $\frac{9+1}{2}$ ତମ ଓ $\frac{9+3}{2}$ ତମ ପଦ, ଅର୍ଥାତ୍, T_5 ଓ T_6 ମଧ୍ୟପଦ ଅଟନ୍ତି ।

T_5 ଓ T_6 ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ, ସାଧାରଣ ପଦରେ $r = 4$ ଓ $r = 5$ ନେବା ।

$$T_{r+1} = {}^9C_r\,(2x^2)^{9-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r,$$

$$T_5 = {}^9C_4\,(2x^2)^{9-4}\left(\frac{1}{x}\right)^4$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} \times (32x^{10}) \times \left(\frac{1}{x}\right)^4 = 4032x^6$$

ଏବଂ $T_6 = {}^9C_5 (2x^2)^{9-5}\left(\frac{1}{x}\right)^5 = 2016x^3$

ଏଣୁ ମଧ୍ୟପଦ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି $4032\,x^6$ ଓ $2016\,x^3$ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.5

1. ନିମ୍ନ ଦ୍ୱିପଦୀମାନଙ୍କର ସଂପ୍ରସାରଣର ମଧ୍ୟପଦ (ପଦ ଗୁଡ଼ିକ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $(2x + y)^{10}$ (b) $\left(1+\frac{2}{3}x^3\right)^8$

   (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$ (d) $(1 - x^2)^{10}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିପଦୀମାନଙ୍କର ସଂପ୍ରସାରଣର ମଧ୍ୟପଦ (ପଦଗୁଡ଼ିକ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $(a + b)^7$ (b) $(2a - b)^9$

   (c) $\left(\frac{3x}{4}-\frac{4y}{3}\right)^7$ (d) $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$

8.5 ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦୀ ଉପପାଦ୍ୟ (Binomial theorem for Rational Exponets)

ବର୍ତ୍ତମାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ତୁମେ ଦ୍ୱିପଦ ପରିପ୍ରକାଶର ଘାତାଙ୍କ ଏକ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ଥିଲେ, ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରିଛ । ତେବେ, ଘାତାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଏକ ଭଗ୍ନାଂଶ ହେଲେ, କ'ଣ ହେବ ? ଆମେ ଏପରି ଏକ ଫଳାଫଳ ବ୍ୟକ୍ତ କରିବା, ଯାହାଦ୍ୱାରା ପୂର୍ବୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଦ୍ୱିପଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣ ପାଇବା, କିନ୍ତୁ ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଏହି ସଂପ୍ରସାରଣ ଅସୀମ ହେବ । ଏହି ଫଳାଫଳ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ପଢ଼ିଥିବା ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ବ୍ୟାପକ ରୂପାନ୍ତର ଅଟେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 8.2 **ଏକ ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ।**

ଯଦି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ x ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯେପରିକି

$|x| < 1$, ତେବେ

$$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2-1}\,x^2 + \ldots.(D)$$

ଏଠାରେ ଆମେ ଏହାକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବା ନାହିଁ, କାରଣ ଏହା ଏହି ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ପ୍ରକୃତରେ, ସାର୍ ଆଇଜାକ୍ ନିଉଟନ, ଯାହାକୁ ଏହି ବ୍ୟାପକୀକରଣ ଲାଗି ଶ୍ରେୟ ଦିଆଯାଏ, ମଧ୍ୟ ବିନା ପ୍ରମାଣରେ 1676 ଖ୍ରୀ.ରେ ଏହି

ଉପପାଦ୍ୟର କଥନକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିଥିଲେ । ଏହାର ପ୍ରମାଣ, ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଅନ୍ୟ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ବିଭିନ୍ନ r ର ପରିମେୟମାନ ପାଇଁ ଇଂରାଜୀ ଗଣିତଜ୍ଞ କଲିନ ମ୍ୟାକ୍ଲରିନ୍ (1698-1746 ଖ୍ରୀ.ଅ.) ଏବଂ r ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଜର୍ମାନ ଗଣିତଜ୍ଞ ଆବ୍ରାହମ୍ ଜି.କାଷ୍ଟର (1719-1800 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ), r ର ଏକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ ମାନ ପାଇଁ ସ୍ୱିଜ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଲିଓନାର୍ଡ ଅଏଲର୍ (1707 - 1783 ଖ୍ରୀ.ଅ.)ଏବଂ rର ସମିଶ୍ରମାନ ପାଇଁ ନରୱେର ଗଣିତଜ୍ଞ ନିଲ୍ସ ହେନ୍‌ରିକ୍ ଆବେଲ (1802-1829) ହିଁ ଥିଲେ ।

ଆସ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟକୁ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ କିଛି ଉଦାହରଣ ନେବା ।

ଉଦାହରଣ 8.19 $(1 + x)^{-1}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ କର, ଯେଉଁଠି $|x| < 1$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $r = -1$ [ଉପରୋକ୍ତ D ଅନୁଯାୟୀ] ଅଟେ ।

ଏଣୁ, $(1+x)^{-1} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)\,(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + ..$

ଅର୍ଥାତ୍, $(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + ...$

ଏହିପରି, ତୁମେ ସଂପ୍ରସାରଣ $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 ...$ ଲେଖିପାରିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସଂପ୍ରସାରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । $(1 + x)^{-1}$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପଦଗୁଡ଼ିକ ଏକାନ୍ତର ଭାବରେ ଧନାତ୍ମକ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଟନ୍ତି । ଯେତେବେଳେ $(1 - x)^{-1}$ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସମସ୍ତ ପଦ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଟନ୍ତି ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଦ୍ୱିପାଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣ (D) ରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବ ।

1. ଯଦି r ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, $|x| < 1$ କ୍ଷେତ୍ରରେ, (C) ଓ (D) ସମାନ ହେବେ ।

2. ଧ୍ୟାନ ଦିଅ ଯେ, ${}^{r}C_0 = 1,\ {}^{r}C_1 = 1,\ {}^{r}C_2 = \frac{r(r-1)}{2!}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

   ଏହିପରି (D) ର ସହଗ ଗୁଡ଼ିକ ଯଥା, $1, r, \frac{r(r-1)}{2!}$ .... ସଂଯୋଗାତ୍ମକ ସହଗ ଭଳି ଦେଖାଯା'ନ୍ତି । ତଥାପି ମନେପକାଅ ଯେ, r ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ 5 ସାମଗ୍ରିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ${}^{r}C_s$ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ ହୁଏ ।

   ଏଥିପାଇଁ ବର୍ତ୍ତମାନର ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ${}^{r}C_0$, ${}^{r}C_1$, ${}^{r}C_2$ ଇତ୍ୟାଦିର କୌଣସି ଅର୍ଥ ନାହିଁ ।

3. ସଂପ୍ରସାରଣ (D) ରେ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ରହିବ ।

4. ଯଦି $x > 1$ ହୁଏ, ତେବେ (D) ର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ଶ୍ରେଣୀର ଯୋଗର କୌଣସି ଅର୍ଥ ନଥାଇପାରେ ।

   ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି ଆମେ ଉଦାହରଣ 1 ରେ $x = 2$ ନେବା, ତେବେ ଆମେ ପାଇବା

   $(1 + 2)^{-1} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + ...$

   ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1}{3} = (1-2) + (4-8) + (16-32) + ...$

   ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1}{3} = -1 - 4 - 16 - ...$

   ଯାହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ଅସତ୍ୟ ।

ତେଣୁ (D) ସତ୍ୟ ହେବା ପାଇଁ, $|x| < 1$ ହେବା ଅନିବାର୍ଯ୍ୟ । ଆସ ଏହି ଦ୍ୱିପଦ ସଂପ୍ରସାରଣର ଆଉ କିଛି ଉଦାହରଣ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 8.20 $(x + y)^r$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ କର, ଯେଉଁଠି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ ।

ତେଣୁ $(3 + 5P)^{2/5}$ ସଂପ୍ରସାରଣ କର, ଯେଉଁଠି $|P| < \frac{3}{5}$

ସମାଧାନ : $(x + y)^r = x^r\left(1+\frac{y}{x}\right)^r$ ...(1)

ଯେହେତୁ ଏହାଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, ଆମେ ପାଇବା

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)^r = 1+r\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\ldots$$

ତେଣୁ, (1) ରୁ ପାଇବା ।

$$(x+y)^r = x^r\left[1+r\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{r(r-1)}{2!}\left(\frac{y}{x}\right)^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\left(\frac{y}{x}\right)^3+\ldots\right]$$

ଅର୍ଥାତ୍, $(x+y)^r = x^r + rx^{r-1}y+\frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2+\frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3+$ ...(2)

ବର୍ତ୍ତମାନ, ପ୍ରଶ୍ନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଂଶକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, $|P| < \frac{3}{5}$

ଯଦି $\left|\frac{5P}{3}\right| < 1$, ତେବେ (2) ରେ $x = 3$, $y = 5p$, $r = \frac{2}{5}$ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$(3+5p)^{2/5} = 3^{2/5}+\frac{2}{5}(3)^{\frac{2}{5}-1}(5p)^1+\frac{\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}-1\right)}{2!}(3)^{\frac{2}{5}-2}(5p)^2 \cdots$$

$$= 3^{\frac{2}{5}}+(3)^{-\frac{3}{5}}(2p)+\frac{\frac{2}{5}\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}(5)^{-8/5}25p^2+\ldots$$

$$= 3^{\frac{2}{5}} + 3^{-\frac{3}{5}}(2p) - 3^{-3/5}p^2 + ...$$

ଉଦାହରଣ 8.20 ରେ ମିଳିଥିବା ଫଳ ହେଉଛି **ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ** ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିପାଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ । ଆସ ତାକୁ ପୁନର୍ବାର ଔପଚାରିକ ଭାବରେ ବ୍ୟକ୍ତ କରିବା ।

ଯଦି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ ହୁଏ,

$$(x+y)^r = x^r + rx^{r-1}y + \frac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3 + ...(E)$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଯଦି $\left|\frac{x}{y}\right| > 1$, ତେବେ $(x + y)^r$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ ଅନ୍ୟ ଉପାୟରେ କରାଯାଇପାରେ ।

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ତୁମ ପାଖରେ $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ ହେବ ଓ

$$(x+y)^r = y^r\left(1+\frac{x}{y}\right)^r = y^r + r\,y^{r-1}x + ...$$ ହେବ

ଏହାର ପରିଣାମସ୍ୱରୂପ, ନିମ୍ନ ଫଳାଫଳ ପାଇବା

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା r ପାଇଁ, $(ax + by)^r$ ଭଳି ପରିପ୍ରକାଶର ସଂପ୍ରସାରଣ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ସମ୍ପ୍ରସାରିତ ହୋଇପାରିବ, ଯାହା ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

$\left|\frac{by}{ax}\right| < 1$ କିମ୍ବା, $\left|\frac{ax}{by}\right| < 1$

ଉଦାହରଣ 8.21 $(x + y)^{-5}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ କର ଯେତେବେଳେ

(i) $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ ଓ (ii) $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$

ସମାଧାନ : (i) ଯେହେତୁ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, (E) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା ।

$$(x+y)^{-5} = x^{-5} + (-5)x^{-5-1}\cdot y + \frac{(-5)(-6)}{2!}x^{-5-2}y^2 + \frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}x^{-5-3}y^3...$$

$$= \frac{1}{x^5} - \frac{5y}{x^6} + \frac{15y^2}{x^7} - \frac{35y^3}{x^8} + ...$$

(ii) $\because \left|\frac{x}{y}\right| < 1$, ଆମକୁ $(x+y)^5$ କୁ $(y+x)^{-5}$ ରୂପେ ଲେଖିବାକୁ ହେବ । (E) ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$$(y+x)^{-5} = y^{-5} + (-5)\,y^{-5-1}x + \frac{(-5)(-6)}{2!}y^{-5-2}x^2$$

$$+\frac{(-5)(-6)(-7)}{3!}y^{-5-3}x^3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{y^5} - \frac{5x}{y^6} + \frac{15x^2}{y^7} - \frac{35x^3}{y^8} + \ldots$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, (i) ରେ ଆମେ ସମ୍ପ୍ରସାରଣକୁ y ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ପାଉ, ମାତ୍ର (ii) ରେ, ଆମେ ସମ୍ପ୍ରସାରଣକୁ x ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ପାଉ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.6

1. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣ କର :

(a) $(1-p)^{-3}$, $|p| < 1$ ପାଇଁ

(b) $(1+3x)^{\frac{4}{3}}$, $|x| < \frac{1}{3}$ ପାଇଁ

(c) $(1-5z)^{\frac{6}{5}}$, $|z| < \frac{1}{5}$ ପାଇଁ

2. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣ କର :

(a) $(27-6x)^{\frac{-2}{3}}$, $\left|\frac{2x}{9}\right| < 1$ ପାଇଁ

(b) $(2a+x)^{-3}$, $\left|\frac{x}{2a}\right| < 1$ ପାଇଁ

(c) $(2+3y)^{\frac{1}{7}}$, $|y| > \frac{2}{3}$ ପାଇଁ

3. (a) ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ, $(x+2y)^{-5}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ ବୈଧ ହେବ

(i) x ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ

(ii) y ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସଂପ୍ରସାରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(b) $(3+6y)^{-4/3}$ କୁ ସଂପ୍ରସାରଣ କର ଏବଂ y ର ମାନର ସୀମାକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କର, ଯେଉଁଥିପାଇଁ ସଂପ୍ରସାରଣ ବୈଧ ହେବ ।

8.6 ଆସନ୍ନ ମାନରେ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ବ୍ୟବହାର (Use of Binomial Theorem is approxi mation)

ତୁମେ ଯେପରି ଦେଖିଛ, କେବେ କେବେ ଦ୍ୱିପଦୀ ସଂପ୍ରସାରଣରେ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ଥାଏ । ଏହିସବୁ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଆଗକୁ ହିସାବ ପାଇଁ, କେବଳ ପ୍ରଥମେ ଥିବା କିଛି ପଦର ମୂଲ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବା, ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ହୋଇପାରେ । ଆସ, ଯେଉଁକ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ଆସନ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହୁଁ ସେପରି କେତେକ ଉଦାହରଣ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 8.22 1·03 ର ଘନମୂଳ ଦଶମିକ ତିନି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ସମାଧାନ : ଆମେ $(1\cdot03)^{1/3}$ ର ମୂଲ୍ୟ ଦଶମିକ 3 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $(1\cdot03)^{\frac{1}{3}} = (1+0\cdot03)^{\frac{1}{3}}$

$\because |0\cdot03| < 1$, (E) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$(1+0\cdot03)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}(0\cdot03)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(0\cdot03)^2+\ldots\text{(i)}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମେ ଦଶିମିକ ତିନି ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହାନ୍ତି । ଯେହେତୁ ଦଶମିକ ଅଂଶର ଚତୁର୍ଥସ୍ଥାନରେ ଥିବା ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଙ୍କ, ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କକୁ ପ୍ରଭାବିତ କରିପାରେ, ଏଥିପାଇଁ ସଂପ୍ରସାରଣରେ ସେହି ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାରକୁ ନେବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ଯାହା ଦଶମିକ ପ୍ରଥମ, ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ କିମ୍ବା ଚତୁର୍ଥ ସ୍ଥାନରେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଙ୍କ ପ୍ରଦାନ କରେ ।

ଏଣୁ ଆମେ ସଂପ୍ରସାରଣ (i) ରେ ଥିବା ପ୍ରଥମ ତିନିଗୋଟି ପଦର ଯୋଗକୁ ନେଇପାରିବା ଏବଂ ଅନ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଛାଡ଼ି ଦେଇପାରିବା ।

$$\therefore (1\cdot03)^{\frac{1}{3}} \approx 1+0\cdot01+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}(0\cdot0009)$$

$= 1 + 0\cdot01 - 0\cdot0001$

$= 1\cdot0099$

$\approx$ 1.010 ଦଶମିକ 3 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅଙ୍କ ନେଲେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦଶମିକ ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନ ପରର ଅଙ୍କ 5 ଠାରୁ ବେଶୀ । ତେଣୁ ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନର ଅଙ୍କକୁ 1 ବଢ଼ାଇଛୁ ।

ଏହିପରି 1·03 ର ଘନମୂଳ ଦଶମିକ 3 ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ 1·010 ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 8.23 y କୁ ଖୁବ୍ ସାନ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି ମନେକଲେ, y^2 ଏବଂ y ର ଉଚ୍ଚତର ଘାତକୁ ଛାଡ଼ିଦେଇ

$(1-2y)^{2/3}(4+5y)^{3/2}$ ର ମାନନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ y ଖୁବ୍ କ୍ଷୁଦ୍ର । ତେଣୁ ଆମେ ମନେକରି ପାଇବା $|y| < \frac{1}{2}$ । ତେବେ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$(1-2y)^{2/3} = 1+\frac{2}{3}(-2y)+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!}(-2y)^2+\ldots$$

ଏବଂ $(4+5y)^{\frac{-3}{2}} = 4^{\frac{-3}{2}} + \left(-\frac{3}{2}\right)(4)^{-\frac{3}{2}-1}(5y)+\frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)}{2!}(4)^{-\frac{3}{2}-2}\cdot(5y)^2+\ldots.$

ଯେହେତୁ y^2 ଓ y ର ଅନ୍ୟ ଉଚ୍ଚତର ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ଛାଡ଼ି ପାରିବା, ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା

$(1-2y)^{2/3} \approx 1+\frac{2}{3}(-2y) = 1-\frac{4}{3}y$ ଏବଂ

$$(4+5y)^{-\frac{3}{2}} \approx (4)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}(4)^{-\frac{5}{2}}(5y)$$

$$=\frac{1}{8}-\frac{15}{64}y$$

ଏହିପରି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳର ଆସନ୍ନମାନ ହେବ

$\left(1-\frac{4}{3}y\right)\left(\frac{1}{8}-\frac{15}{64}y\right) = \frac{1}{8}-\frac{1}{6}y-\frac{15}{64}y+\frac{5}{16}y^2 \approx \frac{1}{8}-\frac{77}{192}y$, y^2 ବିଶିଷ୍ଟ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଛାଡ଼ିଦେଲେ ।

ତେଣୁ $(1-2y)^{2/3}(4+5y)^{-3/2} = \frac{1}{8}-\frac{77}{192}y,$

ଯଦି ଆମେ y^2 ଓ y ର ଉଚ୍ଚତର ଘାତଗୁଡ଼ିକୁ ଛାଡ଼ି ଦେଉ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.7

1. ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିମ୍ନରାଶି ମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $(1{\cdot}02)^2$ (b) $(1{\cdot}01)^{-3}$ (c) $(0{\cdot}97)^{-4}$

   (d) $\sqrt[3]{7{\cdot}60}$ [ସୂଚନା : $(7{\cdot}60)^{1/3} = (8-0{\cdot}4)^{1/3}$]

   (e) $\sqrt[4]{82}$ [ସୂଚନା : $(82)^{\frac{1}{4}} = (81+1)^{\frac{1}{4}} = 3\left(1+\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$]

   (f) $(24)^{-1/2}$ [ସୂଚନା : $(24)^{-1/2} = (25-1)^{-1/2}$]

2. z କୁ ଖୁବ୍ ଛୋଟ ମନେକର ଯେପରିକି z^2 ଏବଂ z ର ଉଚ୍ଚତର ଘାତକୁ ଛାଡ଼ି ଦିଆଯାଇପାରେ । ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $(3+2z)^{-5}$ (b) $(1+3z)^{2/3}(1-5z)^{-2}$

(c) $\dfrac{\sqrt{1+z}+(1-z)^{\frac{2}{3}}}{(1+z)+\sqrt{(1+z)}}$ [ସୂଚନା : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $\approx \dfrac{1+\frac{1}{2}z+1-\frac{2}{3}z}{(1+z)+\left(1+\frac{1}{2}z\right)}$]

(d) $\dfrac{(1-z)^{1/3}+(11-5z)^2}{\sqrt[4]{16-z}}$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତିର କଥନ ।

  ସମସ୍ତ $n \geq 1$ ପାଇଁ, ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା n ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉକ୍ତି P(n), ଯେଉଁଠି n ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସତ୍ୟ ଅଟେ ଯଦି

  (i) P(1) ସତ୍ୟ ହୁଏ ଏବଂ

  (ii) $k \in N$ ପାଇଁ, ଯେତେବେଳେ P(k) ସତ୍ୟ, ସେତେବେଳେ P(k + 1) ସତ୍ୟ ହେବ ।

- ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ,

  $(x + y)^n = {}^nC_0 x^n + {}^nC_1 x^{n-1} y + {}^nC_2 x^{n-2} y^2 + ... + {}^nC_{n-1} xy^{n-1} + {}^nC_n y^n$

  ଏହାକୁ **ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (ଅଥବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା) ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ କୁହାଯାଏ** ।

- ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ, ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାର ଅଟେ ।

  $(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + ... + {}^nC_{n-1} a^{n-1} + {}^nC_n a^n$

- $(x+y)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ ସାଧାରଣ ପଦ ହେଉଛି ${}^nC_r x^{n-r} y^2$ ଅଟେ ଏବଂ $(1+a)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ ଏହା ହେଉଛି ${}^nC_r a^r$ ଯେଉଁଠି n ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $0 \leq r \leq n$ ଅଟେ ।

- ଯଦି n ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $(x+y)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମଧ୍ୟପଦ ଅଛି । ଯଦି n ଅଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟପଦ ରହିବ ।

- ଏକ ସଂପ୍ରସାରଣରେ ମଧ୍ୟପଦ (ମଧ୍ୟପଦଗୁଡ଼ିକ) ଓ କିଛି ଅନ୍ୟ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସାଧାରଣ ପଦର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

- ଉକ୍ତି $(1+x)^r = 1 + rx + \dfrac{r(r-1)}{2!}x^2 + \dfrac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^3 + ...$

  ଯେଉଁଠି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $|x| < 1$, କୁ **ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ** କୁହାଯାଏ । ଯଦି r ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ବା 0 ନୁହଁ, ତେବେ ଏହି ସଂପ୍ରସାରଣ ଅସୀମ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

  $(x+y)^r = x^r + r\,x^{r-1} \cdot y + \dfrac{r(r-1)}{2!}x^{r-2}y^2 + \dfrac{r(r-1)(r-2)}{3!}x^{r-3}y^3 + ...$

ଯେଉଁଠି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$, ଏହା ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ ।

- $(ax + by)^r$ ପ୍ରକାର ପରିପ୍ରକାଶ (ଯେଉଁଠି r ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା)ର ଦୁଇ ପ୍ରକାରେ ସଂପ୍ରସାରଣ କରାଯାଇପାରେ । ଯାହା $\left|\frac{by}{ax}\right| < 1$ ବା $\left|\frac{ax}{by}\right| < 1$ ଏହା ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଗାଣିତିକ ଆରୋହଣ ନୀତିର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

 (a) n ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ସଂଖ୍ୟା 2^n ।

 (b) $(a + b)^n > a^n + b^n \ \forall\ n \geq 2$, ଯେଉଁଠି a ଓ b ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

 (c) $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$, ଯେଉଁଠି r > 1 ଓ a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

 (d) $(x^{2n} - 1)$ ହେଉଛି $(x + 1)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ $\forall\ x \in N$ ।

 (e) $(10^{2n-1} + 1)$ ହେଉଛି 11 ର ଏକ ଗୁଣିତକ ।

 ସୂଚନା : $10^{2k+1} + 1 = 10^2[(10^{2k-1} + 1) - 99]$

 (f) $(4\times10^{2n} + 9\times10^{2n-1} + 5)$ ହେଉଛି 99 ର ଏକ ଗୁଣିତକ ।

 (g) $n(n^2 - 1)$ ହେଉଛି 24 ର ଏକ ଗୁଣିତକ, ଯେତେବେଳେ n ଅଯୁଗ୍ମ ।

 [ଯେହେତୁ n ଅଯୁଗ୍ମ ହେଉଛି ମନେକର P(2k + 3) ସତ୍ୟ, ଯେହେତୁ (2k + 3) ସର୍ବଦା ଅଯୁଗ୍ମ । ତା'ପରେ P(2k + 3) ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କର]

 (h) $(1 + x)^n > 1 + nx$, ଯେଉଁଠି x > 0 ।

 (i) ଯଦି f ଓ g, x ର ବାସ୍ତବ ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ ହୁଏ ଏବଂ $f + g \neq 0$, ତେବେ $(f + g)$ ଦ୍ୱାରା $(f^{2n-1} + g^{2n-1})\ \forall\ n \in N$ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ବିଭାଜିତ ହୁଏ ।

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ ।

 (a) $(3x + 2y)^5$ (b) $(p - q)^8$ (c) $(1 - x)^8$

(d) $\left(1+\frac{2}{3}x\right)^6$ (e) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$ (f) $(3x-y^2)^5$

(g) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{2}{x}\right)^4$ (h) $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^7$ (i) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^5$

(j) $\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)^4$

3. ଯେଉଁଠି $n \in N$; ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣର $(r + 1)$ ତମ ପଦ ଲେଖ ।

(a) $(3x - y^2)^n$ (b) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^n$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣର ଉଲ୍ଲିଖିତ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $(1 - 2x)^7$: ତୃତୀୟ ପଦ [ସୂଚନା : ଏଠାରେ $r = 2$]

(b) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$: ମଧ୍ୟମପଦ (ଗୁଡ଼ିକ)

(c) $(3x - 4y)^6$: ଚତୁର୍ଥପଦ

(d) $\left(y^2-\frac{1}{y}\right)^{11}$: ମଧ୍ୟମପଦ (ଗୁଡ଼ିକ)

(e) $(x^3 - y^3)^{12}$: ଚତୁର୍ଥପଦ (f) $(1 - 3x^2)^{10}$: ମଧ୍ୟମପଦ (ଗୁଡ଼ିକ)

(g) $(-3x -4y)^6$: ପଞ୍ଚମ ପଦ (h) $(x - 2y)^6$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର r ତମ ଲେଖ ।

(h) $(1 + 2x)^8$ ର ସଂପ୍ରସାରଣର $(r - 1)$ ତମ ପଦ ଲେଖ ।

5. $n \in N$ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $(1 + x)^n$ ର x ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ଥିବା ସମ୍ପ୍ରସାରଣର r ତମ ପଦକୁ T_r ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $r(r + 1) T_{r+2} = (n - r + 1)(n - r) x^2 T_r$

[ସୂଚନା : $Tr = {}^nC_{r-1}\, x^{r-1}$ ଓ $T_{r+2} = {}^nC_{r+1} x^{r+1}$]

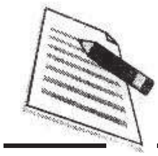
6. x ର ଘାତର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ ଥିବା $(1+x)^{10}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ x^{r-1} ର ସହଗ k_r ଏବଂ ଯଦି $k_{r+2} = 4k_r$ ହୁଏ, ତେବେ r ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସୂଚନା : [$k_r = {}^{10}C_{r-1}\, 2^{r-1}$ ଓ $k_{r+2} = {}^{10}C_{r+1}\, 2^{r+1}$]

7. $(1 + a)^n$ ର ସଂପ୍ରସାରଣରେ (ଯେଉଁଠି n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା) 5ମ, 6ଷ୍ଠ ଓ 7ମ ପଦର ସହଗ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥିଲେ, n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

[**ସୂଚନା** ${}^nC_5 - {}^nC_4 = {}^nC_6 - {}^nC_5$]

8. $(1 + y + y^2)^4$ ବିସ୍ତାର କର । [**ସୂଚନା** $(1 + y + y^2)^4 = \{(1 + y) + y^2\}^4$]



9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ :

(a) $(1 - x)^{-4}, |x| < 1$ (b) $\frac{1}{(1+x)^3}, |x| < 1$

(c) $(3 - z)^{-4}, |z| < 3$ (d) $\frac{1}{(1+3x)^{3/2}}, |x| < \frac{1}{3}$

10. କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ yର ଘାତର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ $(x - 2y)^{-3}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ ବୈଧ ହେବ ? ଏହାକୁ ନେଇ ସଂପ୍ରସାରଣଟିକୁ ଲେଖ ।

11. ସମ୍ପ୍ରସାରଣଟି ଲେଖ । କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ x ର ଘାତାଙ୍କର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ $(x - 3y)^{-y/2}$ ର ସଂପ୍ରସାରଣ ବୈଧ ହେବ ? ସମ୍ପ୍ରସାରଣଟି ଲେଖ ।

12. ନିମ୍ନଲିଖିତର ସଂପ୍ରସାରଣ ଲେଖ । y ର କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ ସଂପ୍ରସାରଣ ଗ୍ରାହ୍ୟ ?

(a) $\frac{1}{(2+y)^4}$ (b) $(3-y)^{\frac{-2}{3}}$

13. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂପ୍ରସାରଣରେ ଆବଶ୍ୟକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ପ୍ରୟୋଗ କରି, ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦଶମିକ ତିନିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $(0{\cdot}99)^{-4}$ (b) $(1{\cdot}03)^{-3}$

(c) $\sqrt[3]{26}$ **[ସୂଚନା** : $(26)^{1/3} = (27 - 1)^{1/3}$]

(d) $\sqrt[7]{127}$ **[ସୂଚନା** : $(127)^{\frac{1}{7}} = (128-1)^{\frac{1}{7}}$]

(e) $\sqrt[5]{35}$ **[ସୂଚନା** : $(35)^{\frac{1}{5}} = \{3+2+3\}^{1/5}$]

(f) $\sqrt[5]{31}$ **[ସୂଚନା** : $(31)^{\frac{1}{5}} = \{32-1\}^{1/5}$]

(g) $\sqrt[3]{1001}$ **[ସୂଚନା** : $(1001)^{1/3} = (1000+1)^{1/3}$]

14. y କୁ ଏତେ ଛୋଟ ମନେକର, ଯେପରିକି y^2 ଓ y ର ବୃହତ୍ତର ଘାତାଙ୍କୁ ଛାଡ଼ିଦିଆଯାଇପାରେ । ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(a) $(1 + 5y)^{-2} (1 + 2y)^{-3/2}$ (b) $\frac{(1-4y)^{-3}(1-2y)^{\frac{1}{2}}}{(4-y)^{3/2}}$

(c) $\frac{\sqrt{1-3y}+(1-y)^{\frac{5}{3}}}{\sqrt{4-y}}$

15. ଜଣେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{21} + ... + x^n$ ରେ $n = 0$ ନେଲା ଓ $(1 + x)^0 = 1 + 0 + 0 + ... + x^0$ ଅର୍ଥାତ୍ $1 = 1 + 1 = 2$ ପାଇଲା ।

ତୁମେ କ'ଣ ଏହି ସମାଧାନରେ ଥିବା ଭୁଲଟି ଦର୍ଶାଇ ପାରିବ ?

16. ସଂପ୍ରସାରଣ ସମ୍ଭବ ମନେକରି $(1 - 4y)^2 (1 - 2y^2)^{1/2}$ ରେ y^3 ର ସହଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. $(1 + x + x^2 + x^3 + ...) (1 - x + x^2 - x^3 + ...) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 ...$ ପ୍ରମାଣ କର ।

[**ସୂଚନା :** ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1-x)^{-1} (1 + x)^{-1} = (1 - x^2)^{-1}$]

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.1

1. (b), (e) ଏବଂ (f) ଉକ୍ତି ଅଟେ; (a) ଉକ୍ତି ନୁହଁ, ଯେହେତୁ n ର ସୀମା ଦିଆଯାଇ ନାହିଁ । ତେଣୁ ଏହା ସତ୍ୟ ବା ମିଥ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ନାହିଁ । (c) ବ୍ୟକ୍ତିନିଷ୍ଠ ଏବଂ ଏଥିପାଇଁ ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତି ନୁହଁ । (d) ଏକ ପ୍ରଶ୍ନ, ଗାଣିତିକ ଉକ୍ତି ନୁହଁ । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ (f) ସାର୍ବଜନୀନ ମିଥ୍ୟା ।

2. $P(1) : 6, 1^3 + 5\times1$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

   $P(2) : 6, 2^3 + 5\times2$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

   $P(k) : 6, k^3 + 5k$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

   $P(k + 1) : 6, (k + 1)^3 + 5(k + 1)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

3. (a) $P(1) : 2 \geq 2$

   $P(k) : 2^k \geq k + 1$

   $P(k + 1) : 2^{k+1} \geq k + 2$

   (b) $P(1) : 1 + x \geq 1 + x$

   $P(k) : (1 + x)^k \geq 1 + kx$

   $P(x + 1) : (1 + x)^{k+1} \geq 1 +(k + 1) x$

   (c) $P(1) : 6, 6$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   $P(k) : k (k + 1)(k + 2), 6$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   $P(k + 1) : (k + 1) (k + 2) (k + 3), 6$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   (d) $P(1) : (x - y), (x - y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

   $P(k) : (x^k - y^k), (x - y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   $P(k + 1) : (x^{k+1} - y^{k+1}), (x - y)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ

   (e) $P(1) : ab = ab$

   $P(k) : (ab)^k = a^k b^k$

   $P(k + 1) : (ab)^{k+1} = a^{k+1} \cdot b^{k+1}$

ଟିପ୍ପଣୀ

(f) $P(1) : \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

$P(1) : \frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

$P(k+1) : \frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

4. (a) $P(1) : \frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$

$P(2) : \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$

$P(k) : \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

$P(k+1) : \frac{1}{1\times 2}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$

(b) $P(1) : 1 = 1^2$

$P(2) : 1 + 3 = 2^2$

$P(k) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$

$P(k + 1) : 1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + [2 (k + 1) - 1] = (k + 1)^2$

(c) $P(1) : 1 \times 2 < 1(2)^2$

$P(2) : (1\times 2) + (2 \times 3) < 2(3)^2$

$P(k) : (1 \times 2) + (2 \times 3) + ... + k (k + 1) < k(k + 1)^2$

$P(k + 1) : (1 \times 2) + (2 \times 3) + ... + (k + 1)(k + 2) < (k + 1) (k + 1)^2$

(d) $P(1) : \frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$

$P(2) : \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{2}{5}$

$P(k) : \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$

$P(k+1) : \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.3

1. (a) $8a^3 + 12a^2b + 6ab^2 + b^3$

   (b) $x^{12} - 18x^{10}y + 135x^8y^2 - 540\,x^6y^3 + 1215x^4y^4 - 1458x^2y^5 + 729y^6$

   (c) $256a^4 - 1280a^3b + 2400a^2b^2 - 2000ab^3 + 625b^4$

   (d) $a^nx^n + n\,a^{n-1}x^{n-1}by + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^{n-2}b^2y^2 + ... + b^ny^n$

2. (a) $1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + 7x^6 - x^7$

   (b) $1 + \dfrac{7x}{y} + \dfrac{21x^2}{y^2} + \dfrac{35x^3}{y^3} + \dfrac{35x^4}{y^4} + \dfrac{21x^5}{y^5} + \dfrac{7x^6}{y^6} + \dfrac{x^7}{y^7}$

   (c) $1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$

3. (a) $\dfrac{a^5}{243} + \dfrac{5a^4b}{162} + \dfrac{5a^3b^2}{54} + \dfrac{5a^2b^3}{36} + \dfrac{5ab^4}{48} + \dfrac{b^5}{32}$

   (b) $2187x^7 - 25515x^4 + 127575x - \dfrac{354375}{x^2} + \dfrac{590625}{x^5} - \dfrac{590625}{x^8}$

   $+ \dfrac{328125}{x^{11}} - \dfrac{78125}{x^{14}}$

   (c) $x^4 + 4x^2 + 6 + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{x^4}$

   (d) $\dfrac{x^5}{y^5} + 5\dfrac{x^3}{y^3} + 10\dfrac{x}{y} + 10\dfrac{y}{x} + 5\dfrac{y^3}{x^3} + \dfrac{y^5}{x^5}$

4. 4·96 ଲକ୍ଷ ଟଙ୍କା

5. 162360

6. (i) 104060401

   (ii) 96059601

   (iii) 1·061208

   (iv) 0·941192

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.4

1. (a) ${}^{n}C_{r}2^{n-r}\, x^{n-r}\, y^{r}$

   (b) ${}^{n}C_{r}\, 2^{n-r}\, a^{2n-2r}(-1)^{r}$

   (c) ${}^{n}C_{r}\, (-1)^{r}\, a^{r}$

   (d) ${}^{n}C_{r}\, 3^{n-r}\, x^{-2r}$

2. (a) $1792y^{5}$

   (b) $15120x^{4}$

   (c) $14784a^{5}b^{6}$

   (d) 20

   (e) 35x

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.5

1. (a) $8064x^{5}y^{5}$

   (b) $\frac{1120}{81}x^{12}$

   (c) 20

   (d) $-252x^{10}$

2. (a) $35a^{4}b^{3}, 35a^{3}b^{4}$

   (b) $4032a^{5}b^{4}, -2016a^{4}b^{5}$

   (c) $\frac{-105}{4}x^{4}y^{3}, \frac{140}{3}x^{3}y^{4}$

   (d) $\frac{462}{x^{4}}, \frac{462}{x^{7}}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.6

1. (a) $1 + 3p + 6p^{2} + 10p^{3} + ...$

   (b) $1 + 4x + 2x^{2} + ...$

   (c) $1 - 6z + 3x^{2} + 4z^{3} + ...$

2. (a) $\frac{1}{9}+\frac{4x}{243}+\frac{20}{6561}x^2+\ldots$

(b) $\frac{1}{8a^3}-\frac{3x}{16a^4}+\frac{3x^2}{16a^5}-\ldots$

(c) $3^{\frac{1}{7}}y^{\frac{1}{7}}\left[1+\frac{2}{21y}-\frac{4}{147y^2}+\ldots\right]$

3. (a) (i) $\left|\frac{x}{2y}\right|<1: \frac{1}{32y^5}-\frac{5x}{64y^6}+\frac{15x^2}{128y^7}-\ldots.$

(ii) $\left|\frac{2y}{x}\right|<1: \frac{1}{x^5}-\frac{10y}{x^6}+\frac{60y^2}{x^7}-\ldots.$

(b) $|y|<\frac{1}{2}: 3^{-4/3}-8(3)^{-7/3}y+56(3)^{-10/3}y^2+\ldots.$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 8.7

1. (a) 1·041

(b) 0·971

(c) 1·130

(d) 1·968

(e) 3·009

(f) 0·204

2. (a) $\frac{1}{243}-\frac{10z}{729}$

(b) 1 + 12z

(c) $1-\frac{5z}{6}$

(d) $61-\frac{10409}{192}z$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ :

2. (a) $243x^5 + 810\,x^4y + 1080x^3y^2 + 720\,x^2y^3 + 240\,xy^4 + 32y^5$

(b) $p^8 - 8p^7q + 28\,p^6q^2 - 56p^5q^3 + 70p^4q^4 - 56p^3q^5 + 28p^2q^6 - 8pq^7 + q^8$

(c) $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$

(d) $1+4x+\frac{20}{3}x^2+\frac{160}{27}x^3+\frac{80}{27}x^4+\frac{64}{81}x^5+\frac{64}{729}x^6$

(e) $x^6+3x^4+\frac{15}{4}x^2+\frac{5}{2}+\frac{15}{16x^2}+\frac{3}{16x^4}+\frac{1}{64x^6}$

(f) $243x^5 - 405x^4y^2 + 270x^3y^4 - 90x^2y^6 + 15xy^8 - y^{10}$

(g) $\frac{x^8}{256}+\frac{x^5}{8}+\frac{3}{2}x^2+\frac{8}{x}+\frac{16}{x^4}$

(h) $x^{14}-7x^9+21x^4-\frac{35}{x}+\frac{35}{x^6}-\frac{21}{x^{11}}+\frac{7}{x^{16}}-\frac{1}{x^{21}}$

(i) $x^{15}+5x^{10}+10x^5+10+\frac{5}{x^5}+\frac{1}{x^{10}}$

(j) $\frac{1}{x^8}-\frac{4}{x^3}+6x^2-4x^7+x^{12}$

3. (a) $(-1)^r\,{}^nC_r\,3^{n-r}\,x^{n-r}\,y^{2r}$

(b) ${}^nC_r\,x^{3n-4r}$

4. (a) $84x^2$

(b) $\frac{5}{2}$

(c) $-34560\,x^3y^3$

(d) $-462\,y^7$, $462\,y^4$

(e) $-220\,x^{27}y^9$

(f) $-61236\,x^{10}$

(g) $34560\,x^2y^4$

(h) $(-2)^{r-1}\,{}^6C_{r-1}\,x^{7-r}\,y^{r-1}$

(i) $-2^{r-2}\,{}^8C_{r-2}\,x^{r-2}$

6. 5

7. 7, 14

8. $1 + 4y + 10y^2 + 16y^3 + 19y^4 + 16y^5 + 10y^6 + 4y^7 + y^8$

9. (a) $1 + 4x + 10x^2 + ...$

   (b) $1 - 3x + 6x^2 - 10x^3 + ...$

   (c) $\frac{1}{81} + \frac{4}{243}z + \frac{10}{729}z^2 + ...$

   (d) $1 - \frac{9}{2}x + \frac{135}{8}x^2 - \frac{945}{16}x^3 + ...$

10. $\left|\frac{2y}{x}\right| < 1 : \frac{1}{x^3} + \frac{6y}{x^4} + \frac{24y^2}{x^5} + ...$

11. $\left|\frac{x}{3y}\right| < 1 : \frac{1}{\sqrt{-3y}} + \frac{x}{6y\sqrt{-3y}} + \frac{x^2}{24y^2\sqrt{-3y}} + ...$

12. (a) $\frac{1}{16} - \frac{y}{8} + \frac{5y^2}{32} - \frac{5y^3}{32} + ... |y| < 2$

    (b) $\frac{1}{3^{2/3}} + \frac{2x}{9 \times 3^{\frac{2}{3}}} + \frac{5x^2}{81 \times 3^{2/3}} + ... |y| < 3$

13. (a) 1·041

    (b) 0·915

    (c) 2·833

    (d) 1·998

    (e) 2·037

    (f) 1·987

    (g) 10·003

14. (a) $1 - 13y$

    (b) $\frac{8 + 99y}{64}$

    (c) $1 - \frac{35}{24}y$

15. ଯେତେବେଳେ n ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ସଂପ୍ରାସାରଣଟି ବୈଧ । ଏଠାରେ, $n = 0$

16. 8