୬

ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଓ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗ

Linear Inequation and their applications

ଦୁଇ ବା ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଓ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ ବିଷୟରେ ତୁମେ ପଢ଼ିଛ । ତୁମେ ମଧ୍ୟ ଏଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପ୍ରଣାଳୀ ଜାଣିଛ ଏବଂ ଏହି ଜ୍ଞାନକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନର ସମସ୍ୟାମାନ ସମାଧାନ କରିଛ ।

ବେଳେବେଳେ ଭାଷା ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ କେତେକ ପ୍ରଶ୍ନକୁ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ସମ୍ଭବ ହୁଏ ନାହିଁ । ଆସ ନିମ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିର ବିଚାର କରିବା ।

ଆଲୋକ 30 ଟଙ୍କା ନେଇ ପେନ୍‌ସିଲ୍ କିଣିବାକୁ ବଜାରକୁ ଗଲା । ଗୋଟିଏ ପେନ୍‌ସିଲର ମୂଲ୍ୟ 2.60 ଟଙ୍କା । ଯଦି ସେ କିଣିଥିବା ପେନସିଲ୍ ସଂଖ୍ୟା x ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ସେ ଖର୍ଚ୍ଚ କରିବ $2.60x$ ଟଙ୍କା । ଏହି ପରିମାଣ 30 ଟଙ୍କା ସହ ସମାନ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ, ଯେହେତୁ x ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ

$$2.60\,x < 30 \quad .....(i)$$

ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଦେଖ । ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ଟ. 50,000 ରେ ଚେୟାର ଓ ଟେବୁଲ କିଣିବାକୁ ଚାହୁଁଛନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲର ମୂଲ୍ୟ ଟ 550 ଓ ଗୋଟିଏ ଚେୟାରର ମୂଲ୍ୟ ଟ 450 । ଯଦି x ଓ y ଯଥାକ୍ରମେ ସେ କିଣିଥିବା ଟେବୁଲ୍ ଓ ଚେୟାର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ତା'ର ମୋଟ୍ ମୂଲ୍ୟ = $(550x + 450\,y)$ ଟଙ୍କା ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା, $550\,x + 450\,y \le 50,000$

କିମ୍ବା, $11x + 9y \le 1000$ ...(ii)

ଉକ୍ତି (i) ସହ ଅସମାନତା ଚିହ୍ନ '<' ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏବଂ ଉକ୍ତି (ii) ରେ ଦୁଇଟି ବିବୃତ୍ତି $11x + 9y \le 1000$ ଓ $11x + 9y = 1000$ ଏହିପରି ଦୁଇଟି ଉକ୍ତି ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏହି ଉକ୍ତି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମଟି ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣ ନୁହେଁ । ଏହିପରି ଉକ୍ତିକୁ ଅସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଏଇ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏବଂ ଖାଦ୍ୟ, ବ୍ୟବସାୟ ଓ ପରିବହନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ-ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟଟି ଅଧ୍ୟୟନ କଲାପରେ, ତୁମେ

- ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଓ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଦର୍ଶାଇବାରେ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଗୋଟିଏ ସମତଳୀୟ କ୍ଷେତ୍ର ଯେ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନକୁ ପ୍ରକାଶ କରେ, ତାହା ବ୍ୟକ୍ତ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣକୁ ଲେଖ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଏକ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନକୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଛାୟାଙ୍କିତ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଲେଖ ମାଧ୍ୟମରେ ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇ ବା ତିନି ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସମାଧାନ କରିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ (Objective function), ଅବରୋଧକ (Constraints), ସମ୍ଭବପର କ୍ଷେତ୍ର (Feasible region) ଭଳି ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବାରେ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ଖାଦ୍ୟ, ବ୍ୟବସାୟ, ପରିବହନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ସମସ୍ୟା ଗଠନ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ଅଙ୍କନ ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଏକ ବା ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ।
- ଏକ ସମତଳରେ ଏକ ବା ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଆଲେଖ ଅଙ୍କନ ।
- ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଲେଖିକି ସମାଧାନ

6.1 ଅସମୀକରଣ

ଏଇ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଓ ଏହାର ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସମାନତା ଚିହ୍ନ (=) ବିଶିଷ୍ଟ ଉକ୍ତି ହେଉଛି ଏକ ସମୀକରଣ । ସେହିପରି ଅସମାନତା ଚିହ୍ନ $<, >, \geq$ କିମ୍ବା $\leq$ ବିଶିଷ୍ଟ ଉକ୍ତିକୁ ଅସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଅସମୀକରଣର କେତେକ ବ୍ୟବହାର :

(i) $2x + 5 > 0$ (ii) $3x - 7 < 0$

(iii) $ax + b \geq 0, a \neq 0$ (iv) $ax + b \leq c, a \neq 0$

(v) $3x + 4y \leq 12$ (vi) $x^2 - 5x + 6 < 0$ (vi) $ax + by + c \geq 0$

(v) ଏବଂ (vi) ହେଉଛନ୍ତି ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଅସମୀକରଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଅସମୀକରଣ ଏକ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଅଟନ୍ତି । (i) ଠାରୁ (v) ଓ (vii) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଏବଂ (vi) ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ଦୁଇଘାତୀ ସମୀକରଣ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ କେବଳ ଏକ କିମ୍ବା ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିବା ।

6.2 ଏକ କିମ୍ବା ଦୁଇ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solutions of linear inequations in one/two variables)

ଏକ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଅର୍ଥ ଅଜ୍ଞାତରାଶି (ମାନଙ୍କ)ର ମାନ ନିରୂପଣ, ଯେପରିକି ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାନ ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : ଅସମୀକରଣ $2.60x < 30$ ଉକ୍ତି (i) ପାଇଁ, $x \le 11$ ର ସମସ୍ତମାନ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ । (x ଏକ ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟା) । ଅସମୀକରଣ $2x + 16 > 0$, ପାଇଁ, x ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, xର ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟ > -8 ଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ।

ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଅସମୀକରଣ ଯେପରିକି $ax + by + c \ge 0$, ପାଇଁ ଆମକୁ x ଓ y ର ମାନ ଯୋଡ଼ି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କିରବାକୁ ହେବ, ଯାହା ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ।

ଆସ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିସ୍ଥିତିକୁ ବିଚାର କରିବା :

ଅନୀଲ ପାଖରେ ଟ 60 ଅଛି ଏବଂ ସେ ଏକ ଦୋକାନରୁ କଲମ ଓ ପେନସିଲ୍ କିଣିବାକୁ ଚାହୁଁଛି ।

ଗୋଟିଏ କଲମର ଦାମ୍ 5 ଟଙ୍କା ଏବଂ ଗୋଟିଏ ପେନସିଲ୍‌ର ଦାମ୍ 3 ଟଙ୍କା । ଯଦି x ଓ y ଯଥାକ୍ରମେ ଅନିଲ୍ କିଣିଥିବା କଲମ ଓ ପେନ୍‌ସିଲ୍ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ, ତେବେ ଆମେ ପାଇବା ଅସମାନତାଟି ହେବ $5x + 3y \le 60$ ...(i)

ଏଠାରେ, $x = 6$, $y = 10$ ଏଇ ଅସମୀକରଣ (i)ର ସମାଧାନ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ । ସେହିପରି $x = 5$, $y = 11$, $x = 4$, $y = 13$, $x = 10$, $y = 3$ ହେଉଛନ୍ତି ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟ କେତେକ ସମାଧାନ ।

1. ଅସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମାନ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ (କିମ୍ବା ବିୟୋଗ) କରାଯାଇପାରେ ।

   ଏହିପରି (i) ଯଦି $a > b$, ତେବେ $a + c > b + c$ ଏବଂ $a - c > b - c$ ଏବଂ (ii) ଯଦି $a \le b$, ତେବେ, $a + d \le b + d$ ଏବଂ $a - d \le b - d$

2. ଅସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାନ ସମାନ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ (କିମ୍ବା ହରଣ) କରାଯାଇପାରେ ।

   ଏହିପରି (i) ଯଦି $a > b$ ଏବଂ $c > 0$, ତେବେ $ac > bc$ ଏବଂ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

   ଏବଂ (ii) ଯଦି $a \le b$ ଏବଂ $c > 0$ ତେବେ, $ac \le bc$ ଏବଂ $\frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$

3. ଯେତେବେଳେ ଅସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାନ ସମାନ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ, ଅସମତାର ଚିହ୍ନ ବଦଳିଯାଏ ।

   ଯଥା : (i) ଯଦି $a > b$ ଏବଂ $d < 0$ ତେବେ $ad < bd$ ଏବଂ $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

   ଏବଂ (ii) ଯଦି $a \le b$ ଓ $c < 0$ ତେବେ $ac \ge bc$ ଏବଂ $\frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$

6.3 ଏକ ବା ଦୁଇ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣର ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ Graphical representation of linear inequations in one or two variables

ଅସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବା ଲାଗି ନିମ୍ନ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ହେବ ।

ବିଭାଗ 6.2ରେ, ପେନ୍ ଓ ପେନ୍‌ସିଲ୍ କିଣା ସମସ୍ୟାକୁ ଅସମୀକରଣରେ ପ୍ରକାଶ କରି ଆମେ x ଓ y ସମ୍ବଳିତ ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣଟି ପାଇଥିଲେ :

$5x + 3y \le 60$ ... (i)

ଆସ ଆମେ x ଓ y କୁ କେବଳ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ବିଚାର କରି, ଅସମୀକରଣର ସମସ୍ତ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

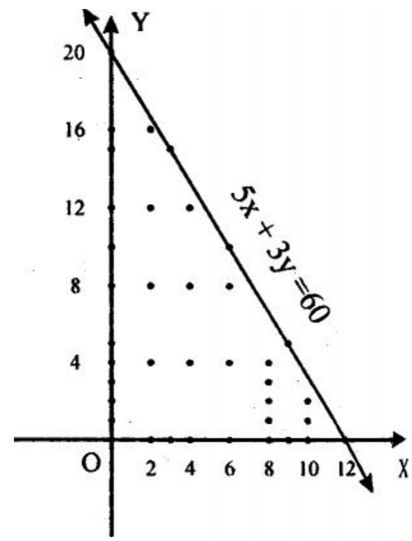
ମନେକର $x = 0$ । $\therefore$ $3y \le 60$ କିମ୍ବା $y \le 20$, ଅର୍ଥାତ୍ $x = 0$ ପାଇଁ y ର ଅନୁରୂପ ମାନ ହେଉଛନ୍ତି 0, 1, 2, 3 ... 20 ହୋଇପାରେ ।

ଏହିପରି, x = 0 ସହ ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛନ୍ତି (0, 0) (0, 1) (0, 2) ... (0, 20)

ସେହିପରି ଭାବରେ, ଯେତେବେଳେ x = 1, 2, ... , 12, ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକ ହେବେ

(1, 0) (1, 1) (1, 2) .... (1, 18)
(2, 0) (2, 1) (2, 2) .... (2, 16)
....
(10, 0) (10, 1) (10, 2) (10, 3)
(11, 0) (11, 1)
(12, 0)

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଉପରୋକ୍ତ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ, ଯଥା (0, 20) (3, 15) (6, 10) (9, 5), (12, 0) ସମୀକରଣ 5x + 3y = 60କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ଯାହାକି ଉକ୍ତ ଅସମୀକରଣର ଏକ ଅଂଶ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ, ସରଳରେଖା 5x + 3y = 60 ଦ୍ୱାରା xy-ସମତଳକୁ ଦୁଇଭାଗରେ ବିଭାଜିତ କରି ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ, ସେ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



ଚିତ୍ର 6.1

ଆମେ ଯଦି x ଓ y ର ପରିସରକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାରୁ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାକୁ ସମ୍ପ୍ରସାରିତ କରୁ ତେବେ $5x + 3y \le 60$ ଅସମୀକରଣଟି, 5x + 3y = 60 ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା xy- ସମତଳଟି ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ତଳରେ ବିଭକ୍ତ, ତନ୍ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ ସୂଚାଇବ ।

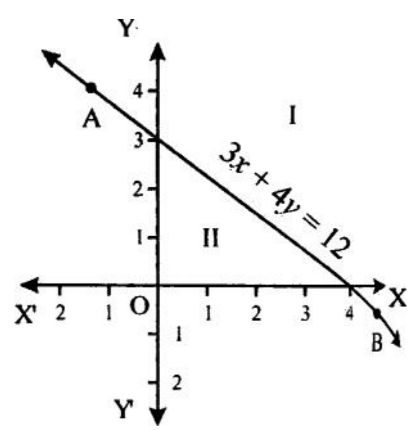
ଏଣୁ, ଆମେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ବ୍ୟାପକିକୃତ କରିପାରିବା ।

ଯଦି a, b, c ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ax + by + c = 0 କୁ x ଓ y ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ କହିବା । ଅନ୍ୟପକ୍ଷେ $ax+ by + c \le 0$ କିମ୍ବା $ax + by + c \ge 0$, ax + by + c > 0 ଏବଂ ax + by + c < 0 କୁ x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଅସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ax + by + c = 0 ଏକ ସରଳରେଖା ଅଟେ, ଯାହା xy- ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ଯାହା $ax + by + c \ge 0$ ଓ $ax + by + c \le 0$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିପାଦିତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ : 3x + 4y – 12 = 0 (ଲେଖ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଇଲେ) xy–ସମତଳରେ

AB ସରଳରେଖା ଗଠନ କରେ ।



ଚିତ୍ର 6.2

(i) AB ସରଳରେଖାର ଉପରେ ଥିବା ସଂକେତ I ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ

(ii) AB ସରଳରେଖାର ନିମ୍ନରେ ଥିବା ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ସଙ୍କେତ II ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ । ଉପରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ କ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ $3x + 4y - 12 \le 0$ ... (i) ଓ ଅନ୍ୟଟି $3x + 4y - 12 \ge 0$ ... (ii) ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ହୁଏ ।

ଅସମୀକରଣ (i) ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ଅର୍ଦ୍ଧସମତଳକୁ ଚିହ୍ନଟ ପାଇଁ ଆମେ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ (arbitrary) ବିନ୍ଦୁ, ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ ନିଆଯାଇପାରେ, ଯଦି ତାହା AB ସରଳରେଖା ଉପରେ ନଥାଏ । ଯଦି ତାହା ଅସମୀକରଣ (i)କୁ ସିଦ୍ଧକରେ ତେବେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ଯେଉଁ ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅଛି, ତାହା ହେବ ଇପ୍ସିତ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଭାବରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ ନେଲେ, ଆମେ $0 + 0 - 12 \le 0$ ପାଇବା, ଅର୍ଥାତ୍ $-12 \le 0$ । ଏହିପରି ମୂଳବିନ୍ଦୁ $3x + 4y - 12 \le 0$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ (ii)ରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଫଳରେ, ଅସମୀକରଣ $3x + 4y - 12 \le 0$ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ(ii)କୁ ଦର୍ଶାଏ ଏବଂ $3x + 4y - 12 \ge 0$ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ Iକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ଉଦାହରଣ 6.1 ଲେଖ ମାଧ୍ୟମରେ $x + 2y \ge 5$ ଅସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ନିରୂପିତ ଅଞ୍ଚଳକୁ ଦେଖାଅ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଟି $x + 2y \ge 5$

ଆସ ପ୍ରଥମେ ଅନୁରୂପ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $x + 2y = 5$ କୁ ନେବା ଏବଂ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହାର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

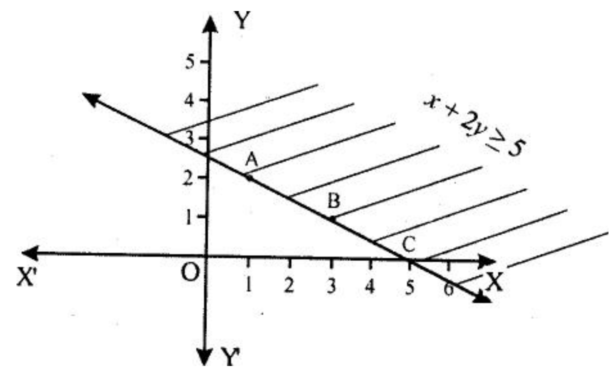
x	1	3	5
y	2	1	0

ଯେହେତୁ (0, 0) ବିନ୍ଦୁଟି AB ଉପରେ ନାହିଁ, ଆମେ (0, 0) କୁ ଯାଦୃଚ୍ଛିକବିନ୍ଦୁ (Arbitrary point) ଭାବରେ ନେବା ।

$\because$ $0 + 0 \ge 5$ ଉକ୍ତିଟି ଅସତ୍ୟ

$\therefore$ ଇପ୍ସିତ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ହେଉଛି ସେଇଟି ଯାହା ଉପରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ ରେଖାଙ୍କିତ ଅର୍ଦ୍ଧତଳଟି (ଚିତ୍ର 6.3) ହେଉଛି ଇପ୍ସିତ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ।



ଚିତ୍ର 6.3

ଅଧିକ ଉଦାହରଣ ନେବାପୂର୍ବରୁ, ଆମେ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ସଂଜ୍ଞାକରଣ କରିବା ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ :

(i) **ଆବଦ୍ଧ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ :** ଦୁଇ ଅର୍ଦ୍ଧତଳକୁ ପୃଥକ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେଉଥିଲେ, ଅର୍ଦ୍ଧତଳଟିକୁ ଆବଦ୍ଧ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହଣ 6.1 ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ।

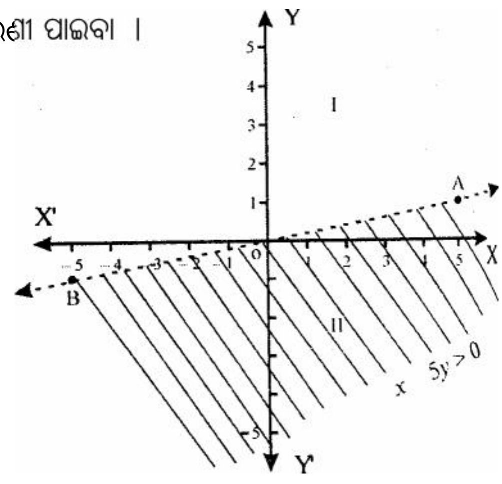
(ii) **ଖୋଲା ଅର୍ଦ୍ଧତଳ :** xy - ସମତଳରେ ଥିବା ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧତଳକୁ ଖୋଲା ଅର୍ଦ୍ଧତଳ କହିବା, ଯଦି ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ଦ୍ୱୟକୁ ପୃଥକ କରୁଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଅର୍ଦ୍ଧତଳର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 6.2 $x - 5y > 0$ ଅସମୀକରଣର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର

ସମାଧାନ : ଅସମୀକରଣଟି $x - 5y > 0$

ଅନୁରୂପ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $x - 5y = 0$ ରୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ପାଇବା ।

x	0	5	–5
y	0	1	–1



ଚିତ୍ର **6.4**

AOB ସରଳରେଖା xy- ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧତଳ I ଏବଂ II ରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ଯେହେତୁ AOB ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅଟେ, ଆମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକବିନ୍ଦୁ P(3, 4) ନେବା ଯାହା I ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅଛି । ଆସ ଦେଖିବା, ଅସମୀକରଣ $x - 5y > 0$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ କି ନାହିଁ ।

$\therefore$ ତେବେ $3 - 5(4) > 0$ କିମ୍ବା, $3 - 20 > 0$ କିମ୍ବା $-17 > 0$ ସତ୍ୟ ନୁହଁ ।

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅର୍ଦ୍ଧ ତଳଟି II;

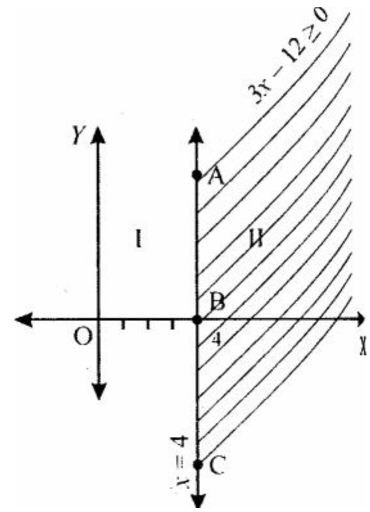
ପୁନଶ୍ଚ ଅସମୀକରଣଟି ଗୋଟିଏ ଯଥାର୍ଥ ଅସମୀକରଣ $x - 5y > 0$

$\therefore$ AOB ରେଖା ଲେଖର ଏକ ଅଂଶ ନୁହେଁ ଏବଂ ସେଥିପାଇଁ ଚିତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁ(Dot) ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କରାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ 6.3

ଅସମୀକରଣ $3x - 12 \geq 0$ କୁ ଲେଖ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଟି $3x - 12 \geq 0$ ଏବଂ ଅନୁରୂପ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $3x - 12 = 0$ କିମ୍ବା $x - 4 = 0$ କିମ୍ବା $x = 4$, ଯାହା xy- ସମତଳରେ ABC ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି (ଚିତ୍ର 6.5) । (0, 0) କୁ ଯାଦୃଚ୍ଛିକବିନ୍ଦୁ ନେଇ ଆମେ ଦେଖିପାରିବା $0 \ngeq 4$ । ଏଣୁ II ଅର୍ଦ୍ଧତଳ ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

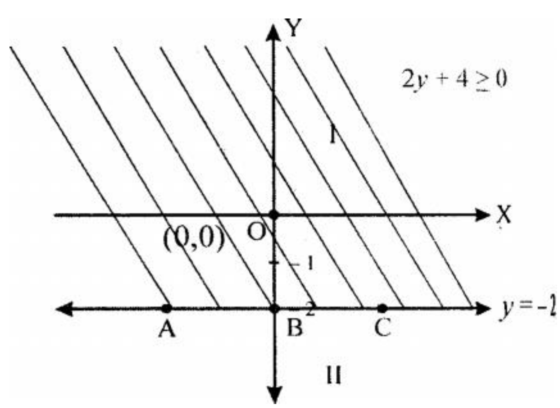


ଚିତ୍ର **6.5**

ଉଦାହରଣ 6.4 ଅସମୀକରଣ $2y + 4 \geq 0$ କୁ ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଅସମୀକରଣଟି ହେଉଛି $2y + 4 \geq 0$ ଏବଂ ଅନୁରୂପ ସମୀକରଣଟି $2y + 4 = 0$ କିମ୍ବା, $y = -2$

ABC ସରଳରେଖା $y = -2$ କୁ ଦର୍ଶାଏ । ଏହା xy ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ବିଭକ୍ତ କରେ । ଅର୍ଦ୍ଧତଳ I ଦ୍ୱାରା ଅସମୀକରଣ $2y + 4 \geq 0$ ସୂଚିତ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର **6.6**

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.1

ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣମାନଙ୍କର ସମାଧାନ ଦୁଇମାତ୍ରିକ ସମତଳରେ, ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଅ ।

1. $2x + y \geq 8$
2. $x - 2y \leq 0$
3. $3x + 6 \geq 0$
4. $8 - 2y \geq 2$
5. $3y \geq 6 - 2x$
6. $3x \geq 0$
7. $y \leq 4$
8. $y > 2x - 8$
9. $-y < x - 5$
10. $2y \leq 8 - 4x$

6.4 ଦୁଇ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ (Graphical solution of a system of linear inequations in two variables)

ଦୁଇ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଜାଣିଲ । ଏବେ ଆମେ ସହ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କୌଶଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ସହ ଅସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କହିଲେ ଆମେ ବୁଝୁ ଯେ, ସମସ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (x, y) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯାହା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ସହ ଅସମୀକରଣର ଏକ ଗୋଷ୍ଠୀର ଆଦୌ ସମାଧାନ ନଥାଇପାରେ କିମ୍ବା, ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଥାଇପାରେ ଯାହା ଅନୁରୂପ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୀମାବଦ୍ଧ ହୋଇଥିବା ବା ସୀମାବଦ୍ଧ ହୋଇନଥିବା କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ଆମେ ଉକ୍ତ କୌଶଳକୁ ବୁଝିବାପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉଦାହରଣକୁ ନେଇ ପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 6.5 ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କର :

$$x + y \geq 6; \ 2x - y \geq 0$$

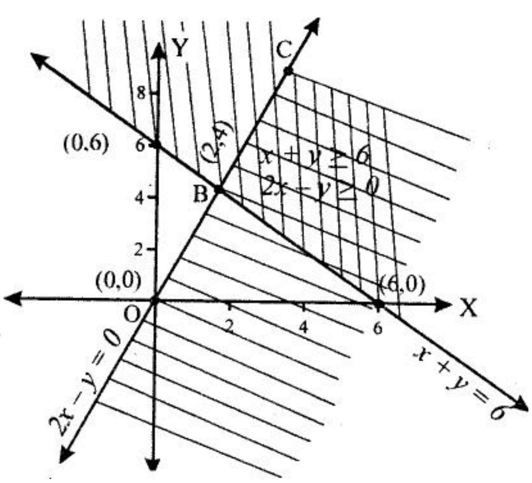
ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ $x + y \geq 6$ ... (i)

ଏବଂ $2x - y \geq 0$ ... (ii)

ଚିତ୍ର 6.7ରେ $x + y = 6$ ଏବଂ $2x - y = 0$ ର ଗ୍ରାଫ୍ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

ଅସମୀକରଣ (i) ଦ୍ୱାରା $x + 3 = 6$ ରେଖାର ଉପରେ ଥିବା ରେଖାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ର ସୂଚିତ ଏବଂ ଅସମୀକରଣ (ii) ଦ୍ୱାରା $2x - y = 0$ ସରଳରେଖାର ଡାହାଣରେ ଥିବା କ୍ଷେତ୍ର ସୂଚିତ ।

ଚିତ୍ର 6.7 ରେ ଦୁଇପ୍ରକାର ରେଖାଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ କ୍ଷେତ୍ର ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନକୁ ଦର୍ଶାଏ ।



ଚିତ୍ର 6.7

ଉଦାହରଣ 6.6 ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$x + y \le 5$, $4x + y \ge 4$, $x + 5y \ge 5$, $x \le 4$, $y \le 3$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ $x + y \le 5$ ... (i)

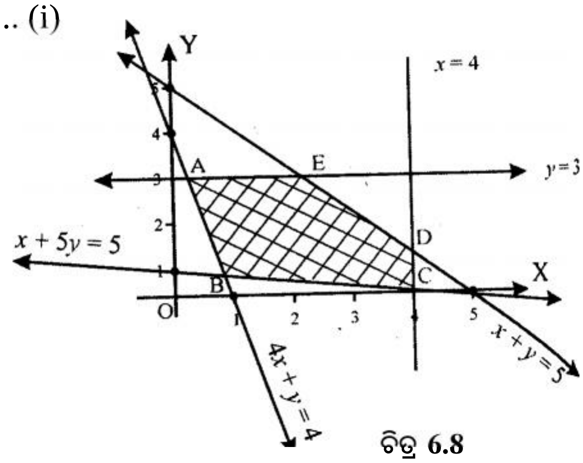
$4x + y \ge 4$ ... (ii)

$x + 5y \ge 5$ ... (iii)

$x \le 4$ ... (iv)

ଏବଂ $y \le 3$ ... (v)

ଆମେ $x + y = 5$, $4x + y = 4$, $x + 5y = 5$, $x = 4$ ଏବଂ $y = 3$ ସରଳରେଖାର ଗ୍ରାଫ୍ ଅଙ୍କନ କରୁ (ଚିତ୍ର 6.8 ଦେଖ) ।



ଚିତ୍ର 6.8

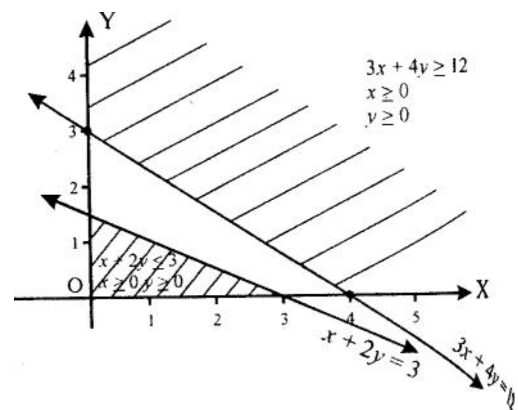
ଅସମୀକରଣ (i), $x + y = 5$ ସରଳରେଖାର ନିମ୍ନରେ ଥିବା କ୍ଷେତ୍ରକୁ ସୂଚାଏ । ଅସମୀକରଣ (ii), $4x + y = 4$ ସରଳରେଖାର ଡାହାଣରେ ଥିବା କ୍ଷେତ୍ରକୁ ସୂଚାଏ ଏବଂ $x + 5y = 5$ ସରଳରେଖାର ଉପର ଅଂଶ ଅସମୀକରଣ (iii) ସୂଚାଏ । ଅସମୀକରଣ (iv) ଓ (v) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଏହିପରି ଛାୟାଙ୍କିତ କଲେ, ABCDE ଆବଦ୍ଧକ୍ଷେତ୍ର (ଚିତ୍ର 6.8 ରେ ଦର୍ଶାଗଲା ପରି) ପାଇବା । ଏହି ଛାୟାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ତେଣୁ ସେହି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏହି ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 6.7 ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ, ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସମାଧାନ କର ।

$x + 2y \le 3$, $3x + 4y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

ସମାଧାନ : ଆମେ $x + 2y \le 3$, $3x + 4y \ge 12$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ, ଅନୁରୂପ କ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିର (ଚିତ୍ର 6.9 ରେ ଦର୍ଶାଗଲା ପରି) ରେଖାଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଇ ପାରିବା । ଏଠାରେ ଆମେ କୌଣସି ସାଧାରଣ କ୍ଷେତ୍ର ପାଇବା ନାହିଁ ଯାହା ଉପରୋକ୍ତ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଏ । ଆମେ ତେଣୁ ଏ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା ଯେ, ଉକ୍ତ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ ।



ଚିତ୍ର 6.9

ଉଦାହରଣ 6.8 ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ, ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

$x - y < 2$, $2x + y < 6$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

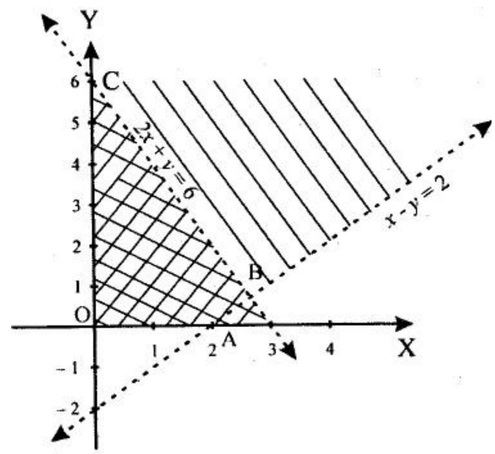
ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ

$x - y < 2$ ... (i)

$2x + y < 6$ ... (ii)

$x \ge 0$; $y \ge 0$ ... (iii)

ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣ $x - y < 2$, $2x + y < 6$, $x \geq 0$ ଗୁଡ଼ିକୁ ଗ୍ରାଫ୍‌ରେ ଦର୍ଶାଇଲେ, ଆମେ ଏକ ସାଧାରଣ ଆବଦ୍ଧକ୍ଷେତ୍ର OABC(ଚିତ୍ର 6.10 ରେ ଦର୍ଶାଗଲା ପରି) ପାଇବା ।



ଚିତ୍ର **6.10**

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.2

ନିମ୍ନ ଦୁଇ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସହ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ କର ।

1. $x \geq 3, y \geq 1$
2. $y \geq 2x, y \leq 2$
3. $2x + y - 3 \geq 0, x - 2y + 1 \leq 0$
4. $3x + 4y \leq 12, 4x + 3y \leq 12, x \geq 0, y \geq 0$
5. $2x + 3y \geq 3, 3x + 4y \leq 18, 7x - 4y + 14 \geq 0,$
   $x - 6y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0.$
6. $x + y \geq 9, 3x + y \geq 12, x \geq 0, y \geq 0$
7. $x + y \geq 1; 2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0.$
8. $x + 3y \geq 10; x + 2y \leq 3, x - 2y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$

6.5 ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗାମିଂ ସମସ୍ୟାର ପରିଚୟ (Introduction to linear programming)

ଜଣେ ଖେଳନା ବିକାଳି 1500 ଟଙ୍କା ନେଇ ଖେଳନା କିଣିବା ପାଇଁ ବଜାର ଗଲା । ବଜାରରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଖେଳନା ଅଛି । ଗୁଣ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସେ A ଓ B ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ଖେଳନା ବାଛିଲା । A ପ୍ରକାରର ଖେଳନା ଗୋଟି ପ୍ରତି ଦାମ୍ 300 ଟଙ୍କା ଏବଂ B ପ୍ରକାର ଖେଳନା ଗୋଟି ପ୍ରତି ଦାମ୍ 250 ଟଙ୍କା । ସେ A ପ୍ରକାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଖେଳନାକୁ ଟଙ୍କା 325 ଟଙ୍କାରେ ଏବଂ B କୁ 265 ଟଙ୍କା ଦରରେ ବିକି ପାରିବ ବୋଲି ଅନୁଭବ କଲା । ନିଜ ପାଖରେ ଥିବା ଅର୍ଥରେ ସେ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ କରିବାକୁ ଚାହୁଁଥିଲା । ବର୍ତ୍ତମାନର ସମସ୍ୟା ଏହା କି, ସେ A ଓ B ଦୁଇ ପ୍ରକାର ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଥିରୁ କେତୋଟି କିଣିଲେ, ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ସେ ପାଇବ ।

ବିନିଯୋଗର ସୀମାକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି A ଓ B ପ୍ରକାରର ଖେଳନାର ସମସ୍ତ ସଂଭାବ୍ୟ ସଂଯୋଗକୁ ନେଇ ସେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତାଲିକା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିପାରେ ।

A ପ୍ରକାର	B ପ୍ରକାର	ବିନିଯୋଗ	ବିକ୍ରିପରେ ମୂଲ୍ୟ (ଅଣ ବିନିଯୁକ୍ତ ରାଶି ଯଦି ଅଛି)	ବିନିଯୋଗ ଉପରେ ଲାଭ
0	6	1500.00	1590.00	90.00
1	4	1300.00	1385.00	85.00
2	3	1350.00	1445.00	95.00
3	2	1400.00	1505.00	105.00
4	1	1450.00	1565.00	115.00
5	0	1500.00	1625.00	125.00

ବର୍ତ୍ତମାନ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ କରିବା ପାଇଁ ନିଷ୍ପତ୍ତି ଅତି ସ୍ୱଷ୍ଟ । A ପ୍ରକାରର 5ଟି ଖେଳନା କିଣିବା ଉଚିତ୍ । ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ ସହଜ ଥିଲା, କାରଣ ବାଛିବା କାର୍ଯ୍ୟ କେବଳ ଦୁଇ ପ୍ରକାର ଖେଳନା ମଧ୍ୟରେ ସୀମିତ ଥିଲା ଏବଂ କିଣା ଯାଉଥିବା ଜିନିଷର ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ କମ୍ ଥିଲା । ଏଠାରେ ସମସ୍ତ ସଂଯୋଗ (Combination) ବିଷୟରେ ଚିନ୍ତା କରାଯାଇ ପାରିଲା ଏବଂ ଏହା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଲାଭ ମଧ୍ୟ ହିସାବ କରାଯାଇପାରିଲା । କିନ୍ତୁ ଏହା ନିଶ୍ଚିତ ହେବା ଉଚିତ୍ କି ସମସ୍ତ ସମ୍ଭାବନାକୁ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଇଛି ।

ଉପରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ସମସ୍ୟା ଭଳି, ଏକ ରେଡ଼ିଓ ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ ସମ୍ମୁଖୀନ ହୋଇଥିବା ସମସ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ସମ୍ମୁଖୀନ ହେଲେ । ଏହାର ବର୍ଣ୍ଣନା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ଜଣେ ରେଡ଼ିଓ ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ, ପାଇକାରି ବେପାରୀଠାରୁ କେତେକ ଟ୍ରାନ୍‌ଜିଷ୍ଟର ରେଡ଼ିଓ ସେଟ୍ କିଣିବା ପାଇଁ ଇଚ୍ଛା କଲେ । ସେଠାରେ A ଓ B ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ରେଡ଼ିଓ ସେଟ୍ ଥିଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ A ପ୍ରକାର ସେଟ୍‌ର ଦାମ୍ 360 ଟଙ୍କା ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ B- ପ୍ରକାର ସେଟ୍‌ର ଦାମ୍ 240 ଟଙ୍କା । ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ 5760 ଟଙ୍କା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିନିଯୋଗ କରିପାରିବେ । ରେଡ଼ିଓ ସେଟ୍‌କୁ ବିକ୍ରିକରି ପ୍ରତ୍ୟେକ A ସେଟ୍‌ରେ ସେ 50 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ B- ସେଟ୍‌ରେ 40 ଟଙ୍କା ଲାଭ କରିପାରିବେ । ତାଙ୍କର ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ସେ କେଉଁଥିରୁ କେତୋଟି କିଣିବେ ?

ଏଠାରେ ଆମେ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କରିବାକୁ ହେବ । କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ କିଣାଦାମ୍‌କୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟାକରିଥାଉ ।

ନିମ୍ନ ସମସ୍ୟାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଦୁଇ ଜଣ ଦରଜୀ A ଓ B ଦୈନିକ ଯଥାକ୍ରମେ 150 ଓ ଟଙ୍କା 200 ଟଙ୍କା ରୋଜଗାର କରନ୍ତି । A ଦୈନିକ 6ଟି ସାର୍ଟ ଓ 4ଟି ପ୍ୟାଣ୍ଟ ସିଲେଇ କରିପାରନ୍ତି, ଯେତେବେଳେ B ଦୈନିକ 4ଟି ସାର୍ଟ ଓ 7 ଟି ପ୍ୟାଣ୍ଟ ତିଆରି କରିପାରନ୍ତି । ପ୍ରତ୍ୟେକଙ୍କୁ କେତେଦିନ କାମ କରିବାକୁ ହେବ ଯେପରି କି ସର୍ବନିମ୍ନ ପାରିଶ୍ରମିକରେ ଅତିକମ୍‌ରେ 60ଟି ସାର୍ଟ ଓ 72ଟି ପ୍ୟାଣ୍ଟ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିହେବ ।

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମକୁ ପାରିଶ୍ରମିକକୁ ନ୍ୟୁନତମ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଏହି ପ୍ରକାରର ସର୍ବାଧିକୀକରଣ (Maximisation) ଓ ସର୍ବନିମ୍ନୀକରଣ (Minimisation) କୁ ଇଷ୍ଟତମ (Optimisation) ସମସ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଏହି ପ୍ରକାରର ସମସ୍ୟାକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ଗଣିତଜ୍ଞମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଉଥିବା କୌଶଳକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍ (Linear Programming) କୁହାଯାଏ ।

6.51 ଐତିହାସିକ ପୃଷ୍ଠଭୂମି :

ଲିନିୟର୍ ପୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍ (Linear Programming) ବିଧିର ଉପ୍ତତ୍ତି ଖୁବ୍ ଅଳ୍ପ ଦିନର । ଏହାର ପରିକଳ୍ପନା ଦ୍ୱିତୀୟ ବିଶ୍ୱଯୁଦ୍ଧ ସମୟରେ, ଯେତେବେଳେ ଯୁଦ୍ଧ କାର୍ଯ୍ୟର ଖର୍ଚ୍ଚ କମ୍ କରିବା ଓ କ୍ଷତିକୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କରିବା ସହିତ ଶତ୍ରୁ ପକ୍ଷର କ୍ଷୟକ୍ଷତିକୁ ଅଧିକ କରିବା ପାଇଁ ଯୋଜନା କରିବା ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ ହେଲା ।

1941 ମସିହାରେ L.Kantorovich ଋଷିୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଓ ଆମେରିକାର ଅର୍ଥନୀତିଜ୍ଞ F.L. Hilcheock ଉଭୟ ସ୍ୱାଧୀନଭାବରେ ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍‌ର ପ୍ରଥମ ସମସ୍ୟା ପ୍ରସ୍ତୁତ କଲେ । ଏହା ଏକ ସୁବିଖ୍ୟାତ ପରିବହନ ସମସ୍ୟା (Transportation Problem) ଥିଲା ଯାହା ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍‌ର ଏକ ବିଭାଗ ପ୍ରସ୍ତୁତ କଲା ।

1945 ମସିହାରେ ଜଣେ ଇଂରେଜ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ରୀ G.Stigler ଅନ୍ୟ ଏକ ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍ ସମସ୍ୟାର ବର୍ଣ୍ଣନା କଲେ ଯେଉଁଥିରେ ଇଷ୍ଟତମ (Optimal) ସୁଷମ ଆହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଥିଲା । ମୁଖ୍ୟତଃ ଏହି ସମସ୍ୟା ଥିଲା କିପରି 77 ପ୍ରକାରର ଖାଦ୍ୟର ଗୁଣକୁ ଆଧାର କରି ଏବଂ ନଅଗୋଟି ପୁଷ୍ଟିର ସର୍ବନିମ୍ନ ଆବଶ୍ୟକତାକୁ ପୂରଣ କରିବା ପାଇଁ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟରେ କିଣିବାର ବ୍ୟବସ୍ଥା ।

1947 ମସିହାରେ ଆମେରିକାର ଅର୍ଥନୀତିଜ୍ଞ ଜି.ବି.ଡାଜିଙ୍ଗ୍ (G.B. Dantzig) Econometrics ନାମକ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ପତ୍ରିକାରେ ଏକ ଲେଖା ପ୍ରକାଶ କରିଥିଲେ, ଯେଉଁଥିରେ ସେ ସାଧାରଣ ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍‌କୁ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କରିଥିଲେ । ଡାନ୍‌ଜିଂଙ୍କୁ ''ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ'' ପଦ ପ୍ରୟୋଗ କରିବାର ଏବଂ ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ପଦ୍ଧତିରେ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଶ୍ରେୟ ମଧ୍ୟ ଦିଆଯାଏ ।

1974 ମସିହାରେ L.Kantorovich ଏବଂ ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଆମେରିକୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ରୀ T.C. Koopmans ଉଭୟଙ୍କୁ ଅର୍ଥାଶାସ୍ତ୍ର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏହି ସମସ୍ୟା ଉପରେ କାମ କରିଥିବାରୁ ନୋବେଲ ପୁରସ୍କାର ଦିଆଯାଇଥିଲା ।

6.6 ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗାମିଂ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିଭିନ୍ନ ପଦର ସଂଜ୍ଞା (Definitions of various terms involved in linear programming)

ଉପକ୍ରମରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉଦାହରଣର ସୂକ୍ଷ୍ମ ପରୀକ୍ଷଣ ଦ୍ୱାରା, ଏକ ମୁଖ୍ୟ ଲକ୍ଷଣ ଦେଖାଯାଏ ଯାହା ସମସ୍ତ ସମସ୍ୟା ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉଦାହରଣରେ ଆମେ କୌଣସି ରାଶିର ସର୍ବାଧିକ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁଛନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ 1 ଓ 2 ରେ, ଆମେ ବିନିଯୋଗ ଅର୍ଥରୁ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ଆଶା କରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ 3ରେ, ଆମେ ପାରଶ୍ରମିକକୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କିରବାକୁ ଚାହାଁନ୍ତି । ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂର ଶବ୍ଦାବଳୀରେ କୌଣସି ରାଶିକୁ ସର୍ବାଧିକ ବା ସର୍ବନିମ୍ନ କରିବା ଉକ୍ତ ସମସ୍ୟାର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ।

6.6.1 ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ (Objective Function) :

ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାରେ ଚଳରାଶିର ଏକଘାତୀ ଫଳନ z, ଯାହାର ଇଷ୍ଟତମ (Optimal) ମାନ ଜାଣିବାକୁ ହୁଏ, ତାହାକୁ **ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ଏକଘାତୀ ରୂପର ଅର୍ଥ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଗଣିତୀୟ ପରିପ୍ରକାଶ ଅଟେ ।

$a_1x_1 + a_2x_2 + ... a_nx_n$, ଯେଉଁଠାରେ $a_1, a_2, ... a_n$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧ୍ରୁବକ ଓ $x_1, x_2 ... x_n$ ଚଳ ରାଶି ।

ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଉତ୍ପାଦ, ସେବା, ପ୍ରୋଜେକ୍ଟ ଆଦି ଯାହା ଦିଆଯାଇଥିବା ସୀମିତ ସାଧନର ଭାଗପାଇଁ ପରସ୍ପରକୁ ପ୍ରଭାବିତ କରନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଚଳରାଶି କୁହାଯାଏ ।

6.6.2 ଅବରୋଧ (Constraint) :

ସମ୍ବଳ (ଯେପରିକି ନଗଦ ଅର୍ଥ, ଉତ୍ପାଦନ କ୍ଷମତା, ମାନବ ସମ୍ବଳ, ସମୟ, ମେସିନ ଇତ୍ୟାଦି)ର ସୀମା ଯାହା ପ୍ରତିଯୋଗିତା ମୂଳକ ଚଳ ରାଶି ସହ ସଂପର୍କ ଦର୍ଶାନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଅବରୋଧକ କୁହାଯାଏ । (Constraints କିମ୍ବା Restrictions) ଏହାର ସୀମା ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ କିମ୍ବା ଅସମୀକରଣ ରୂପରେ ଥାଇପାରେ ।

6.6.3 ଅଣ ରଣାତ୍ମକ ଅବରୋଧକ :

ଯେହେତୁ ଭୌତିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ରଣାତ୍ମକମାନ ଅସମ୍ଭବ, ତେଣୁ ସମସ୍ତ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ଧନାତ୍ମକ ମାନ ଗ୍ରହଣ କରିଥା'ନ୍ତି ।

6.7 ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗାମିଂ ସମସ୍ୟାର ସୂତ୍ରବଦ୍ଧତା (Formulation of a linear programming problem)

ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ସୂତ୍ରବଦ୍ଧତା ଭଳି ଗାଣିତିକ ମଡେଲ ଲାଗି ନିମ୍ନ ପାଦଗୁଡ଼ିକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ।

ସୋପାନ - 1 : ନିରୂପଣ କରିବାକୁ ଥିବା ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଚଳକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକେତ ରୂପରେ ଲେଖ, ଯେପରିକି $x_1, x_2, x_3...$

ସୋପାନ - 2 : ଦତ୍ତ ସମସ୍ୟାର ସମସ୍ତ ସୀମା ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଚଳ ରାଶି ମାଧ୍ୟମରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ କିମ୍ବା ଅସମୀକରଣ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସୋପାନ - 3 : ଯେଉଁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଚଳର ଇଷ୍ଟତମ (Optimum) ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଅଛି ତାକୁ ଚିହ୍ନଟକର ଏବଂ ଏହାକୁ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଚଳରାଶିର ଏକଘାତୀ ଫଳନ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ଉଦାହରଣ 6.9 ଜଣେ ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ A ଓ B ପ୍ରକାରର ଟ୍ରାଞ୍ଜିଷ୍ଟର ରେଡ଼ିଓ କିଣିବା ପାଇଁ ଚାହିଁଲେ । A ପ୍ରକାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଡ଼ିଓର ମୂଲ୍ୟ ଟ. 360.00 ଏବଂ B ପ୍ରକାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଡ଼ିଓର ମୂଲ୍ୟ ଟ. 240.00 । ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ ଏହା ଜାଣନ୍ତି ଯେ ସେ 20 ସେଟ୍‌ରୁ ଅଧିକ ବିକିପାରିବେ ନାହିଁ । ଏଥିପାଇଁ ସେ 20 ସେଟ୍‌ରୁ ଅଧିକ କିଣିବାକୁ ଚାହାନ୍ତି ନାହିଁ । ସେ ଟ.5760 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଖର୍ଚ୍ଚ କରିପାରିବେ । ସେ A ପ୍ରକାରର ସେଟ୍ ପ୍ରତି ଟ.50.00 ଓ B ପ୍ରକାରର ସେଟ୍ ପ୍ରତି ଟ.40.00 ଲାଭ ପାଇବାକୁ ଚାହାନ୍ତି । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ତାଙ୍କୁ ଉଭୟରୁ କେତେ ସେଟ୍ ଲେଖାଏଁ କିଣିବାକୁ ହେବ ତା'ର ଏକ ଗାଣିତିକ ନମୁନା ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଖୁଚୁରା ବେପାରୀ A ପ୍ରକାରରୁ x_1 ସେଟ୍ ଓ B ପ୍ରକାରରୁ x_2 ସେଟ୍ କିଣିଲେ । ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାରର ସେଟ୍‌ର ସଂଖ୍ୟା ରଣାତ୍ମକ ହୋଇ ପାରିବନାହିଁ, ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା

$$x_1 \geq 0 \qquad ... (1)$$

$$x_2 \geq 0 \qquad ... (2)$$

A ପ୍ରକାରର x_1 ସଂଖ୍ୟକ ସେଟ୍ ଓ B ପ୍ରକାରର x_2 ସଂଖ୍ୟକ ସେଟ୍‌ର ଦାମ୍ $360\, x_1 + 240\, x_2$ ଅଟେ ଯାହା ଟ. 5760.00 ସହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ କମ୍ ହେବା ଉଚିତ୍ । ଅର୍ଥାତ୍

$$360\, x_1 + 240\, x_2 \leq 5760$$

ଅଥବା, $3x_1 + 2x_2 \leq 48 \qquad ... (3)$

ପୁନଶ୍ଚ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ସେଟ୍‌ର ମୋଟ ସଂଖ୍ୟା 20ରୁ ଅଧିକ ହେବନାହିଁ ।

ଏଣୁ $x_1 + x_2 \leq 20 \qquad ... (4)$

ଯେହେତୁ ମୋଟ ଲାଭ A ପ୍ରକାରର x_1 ସେଟ୍ ବିକ୍ରିରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଲାଭ ଓ B ପ୍ରକାରର x_2 ସେଟ୍ ବିକ୍ରିରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଲାଭର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ, ଏଣୁ ଖୁଚୁରା ବେପାରୀଙ୍କର ମୋଟ ଲାଭ ହେବ A ପ୍ରକାରର ସେଟ୍ ଉପରେ ଲାଭ $50x_1$ ଟଙ୍କା ଓ B ପ୍ରକାରର ସେଟ୍‌ରେ ଲାଭ $40x_2$ ଟଙ୍କାର ସମଷ୍ଟି । ତେଣୁ ମୋଟ ଲାଭ ନିମ୍ନମତେ ହେବ ।

$$z = 50\,x_1 + 40\,x_2 \qquad \ldots (5)$$

ଏଣୁ : ଦତ୍ତ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାଟି ଗାଣିତିକ ସୂତ୍ର ରୂପରେ ନିମ୍ନ ପରି ହେବ । x_1 ଓ x_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଥିପାଇଁ ସମସ୍ତ ସୀମା ମଧ୍ୟରେ $z = 50\,x_1 + 40x_2$ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ) ସର୍ବାଧିକ ହେବ ।

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\le 48 \\ x_1 + x_2 &\le 20 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}\right\} \text{ ଅବରୋଧକ}$$

ଉଦାହରଣ 6.10 ଏକ ମୃଦୁ ପାନୀୟ କମ୍ପାନୀର ବୋତଲ ଭର୍ତ୍ତି କରିବା ଲାଗି ଦୁଇଟି ପ୍ଲାଣ୍ଟ ଅଛି । ଗୋଟିଏ P ସ୍ଥାନରେ ଓ ଅନ୍ୟଟି Q ସ୍ଥାନରେ ସ୍ଥାପିତ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ଲାଣ୍ଟରେ ତିନିପ୍ରକାରର A, B ଓ C ଥଣ୍ଡା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଏ । ଦୈନିକ ଭର୍ତ୍ତି କରୁଥିବା ବୋତଲ ସଂଖ୍ୟା ମାଧ୍ୟମରେ ଉଭୟ ପ୍ଲାଣ୍ଟର ଭର୍ତ୍ତି କରିବାର ସାମର୍ଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

ପ୍ଲାଣ୍ଟ → / ଉତ୍ପାଦ ↓	P	Q
A	3000	1000
B	1000	1000
C	2000	6000

ଏକ ବଜାର ସର୍ଭେରୁ ସୂଚିତ ହୁଏ ଯେ, ମେ ମାସରେ 24000 ବୋତଲ A, 16000 ବୋତଲ B ଓ 48000 ବୋତଲ C ର ଚାହିଦା ଅଛି । P ଓ Q ପ୍ଲାଣ୍ଟକୁ ପ୍ରତିଦିନ ଚଳାଇବା ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ ଟ.6000.00 ଓ ଟ.4000.00 ଖର୍ଚ୍ଚ ହୁଏ । ମେ ମାସରେ କମ୍ପାନୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ଲାଣ୍ଟକୁ କେତେଦିନ ଚଳାଇବା ଉଚିତ୍ ଯେପରିକି ଉତ୍ପାଦନ ଖର୍ଚ୍ଚ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଏବଂ ବଜାରର ଚାହିଦା ପୂରଣ ହୋଇପାରିବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ବଜାରର ଚାହିଦା ପୂରଣ ପାଇଁ କମ୍ପାନୀ ମେ ମାସରେ ପ୍ଲାଣ୍ଟ P କୁ x_1 ଦିନ ଓ ପ୍ଲାଣ୍ଟ Q କୁ x_2 ଦିନ ଚଳାଏ ।

ପ୍ଲାଣ୍ଟ P କୁ ପ୍ରତିଦିନ ଚଳାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ ଟ. 6000.00

ଏଣୁ, x_1 ଦିନ ଚଳାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ 6000 x_1 ଟଙ୍କା

ପ୍ଲାଣ୍ଟ Q କୁ ପ୍ରତିଦି ଚଳାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ ଟ.4000.00

ଏଣୁ, x_2 ଦିନ ଚଳାଇବା ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ 4000.00 x_2 ଟଙ୍କା ।

ଏଣୁ ଦୁଇ ପ୍ଲାଣ୍ଟକୁ ଚଳାଇବା ପାଇଁ ମୋଟ ଖର୍ଚ୍ଚ ହେବ

$$z = 6000\,x_1 + 4000\,x_2 \ldots (1)$$

ପ୍ଲାଣ୍ଟ P ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ A ପ୍ରକାର ପାନୀୟ 3000 ବୋତଲ ତିଆରି କରେ ।

ଏଣୁ x_1 ଦିନରେ ପ୍ଲାଣ୍ଟ P, 3000 x_1 ବୋତଲ ପାନୀୟ ତିଆରି କରିବ ।

ପ୍ଲାଣ୍ଟ Q ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ 1000 ବୋତଲ A ପ୍ରକାରର ପାନୀୟ ତିଆରି କରେ ।

ତେଣୁ x_2 ଦିନରେ ପ୍ଲାଣ୍ଟ Q, 1000 x_2 ବୋତଲ ପାନୀୟ ତିଆରି କରିବ ।

ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ସମୟ ପରେ ସର୍ବମୋଟ A ପ୍ରକାରର ପାନୀୟ $3000\,x_1 + 1000\,x_2$ ବୋତଲ ଉତ୍ପାଦିତ ହେବ ।

କିନ୍ତୁ A ପ୍ରକାର ପାନୀୟର ବଜାର ଚାହିଦା 24000 ବୋତଲ । ତେଣୁ ଏ ପ୍ରକାରର ଥଣ୍ଡା ପାନୀୟର ମୋଟ ଉତ୍ପାଦନ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ବଜାର ଚାହିଦାଠାରୁ ଅଧିକ କିମ୍ବା ସମାନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

$\therefore\ 3000\,x_1 + 1000\,x_2 \geq 24000$

କିମ୍ବା $3x_1 + x_2 \geq 24$ ... (2)

ସେହିପରି ଭାବରେ, ଅନ୍ୟ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ମୃଦୁପାନୀୟ ପାଇଁ ଆମେ ପାଉଥିବା ଅବରୋଧକ

$1000\,x_1 + 1000\,x_2 \geq 16000$

କିମ୍ବା, $x_1 + x_2 \geq 16$ ... (3)

ଏବଂ $2000\,x_1 + 6000\,x_2 \geq 48000$

କିମ୍ବା, $x_1 + 3x_2 \geq 24$ ... (4)

x_1 ଓ x_2 ଦିନସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ ଅଣରଣାତ୍ମକ ହେବ ।

ତେଣୁ, $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ ... (5)

ତେଣୁ, ଆମର ସମସ୍ୟା ହେଉଛି x_1 ଏବଂ x_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯାହା z (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ)କୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କରେ ।

$z = 6000\,x_1 + 4000\,x_2$ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ)

ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 24 \\ x_1 + x_2 &\geq 16 \\ x_1 + 3x_2 &\geq 24 \end{aligned}\right\} \text{ ଅବରୋଧକ}$$

ଏବଂ $x_1 \geq 0\ x_2 \geq 0$

ଉଦାହରଣ 6.11 ଏକ କାରଖାନା ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ A ଓ B ଉତ୍ପାଦନ କରେ ଏବଂ A ପ୍ରକାର ବସ୍ତୁକୁ 2ଟଙ୍କା ଏବଂ B ପ୍ରକାର ବସ୍ତୁକୁ 3ଟଙ୍କା ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କରେ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ବସ୍ତୁର ପ୍ରସ୍ତୁତି କାର୍ଯ୍ୟ ଦୁଇଟି ଯନ୍ତ୍ର G ଓ H ଦ୍ୱାରା କରା ହୁଏ । A ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ପାଇଁ G ଯନ୍ତ୍ରରେ 1 ମିନିଟ୍ ଓ H ପ୍ରକାରର ମେସିନ୍‌ରେ 2 ମିନିଟ୍ ଏବଂ B ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ପାଇଁ

Gରେ 1ମିନିଟ୍ ଓ H ରେ 1ମିନିଟ୍ ସମୟ କାର୍ଯ୍ୟ ହୁଏ । G ପ୍ରକାରର ମେସିନଟି ଦୈନିକ 6 ଘ. 40 ମି. ଠାରୁ ଅଧିକ ସମୟ ପାଇଁ ଉପଲବ୍ଧ ନୁହଁ । H ପ୍ରକାରର ମେସିନ ଦୈନିକ 10ଘଣ୍ଟା ପାଇଁ ଉପଲବ୍ଧ । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ଭାବରେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟା x_1 ଏବଂ B ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁସଂଖ୍ୟା x_2 ।

ସମସ୍ୟାରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂଚନାକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ସଜାଯାଇପାରେ ।

ମେସିନ୍	**ବସ୍ତୁ ପାଇଁ ପ୍ରସ୍ତୁତି କାର୍ଯ୍ୟ ସମୟ (ମିନିଟ୍‌ରେ)**		**ଉପଲବ୍ଧ ସମୟ ମିନିଟ୍‌ରେ**
	A ପ୍ରକାର (x_1ଟି)	B ପ୍ରକାରର (2ଟି)	
G	1	1	400
H	2	1	600
ଏକକ ପ୍ରତି ଲାଭ	ଟ.2	ଟ.3	

ଯେହେତୁ A ପ୍ରକାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବସ୍ତୁ ଉପରେ ଲାଭ 2ଟଙ୍କା, ଏଣୁ x_1 ସଂଖ୍ୟକ ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରି କଲେ $2x_1$ ଟଙ୍କା ଲାଭ ହେବ । ସେହିପରି B ପ୍ରକାରର x_2 ସଂଖ୍ୟକ ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରି କଲେ ଲାଭ $3x_2$ ଟ. ହେବ । ତେଣୁ x_1 ସଂଖ୍ୟକ A ପ୍ରକାରର ଓ x_2 ସଂଖ୍ୟକ B ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରିକଲେ

ମୋଟ ଲାଭ $z = 2x_1 + 3x_2$ ହେବ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ) ... (1)

ଯେହେତୁ G ମେସିନ୍ A ଉପରେ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପାଇଁ 1 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନିଏ ଓ B ଉପରେ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପାଇଁ ଏକ ମିନିଟ୍ ସମୟ ନିଏ, ତେଣୁ

G ପାଇଁ ମୋଟ୍ ସମୟ ଲାଗିବ $x_1 + x_2$ ମିନିଟ୍

ମାତ୍ର ମେସିନ୍ G 6 ଘ., 40 ମି. (ଅର୍ଥାତ୍ 400 ମିନିଟ୍) ଠାରୁ ଅଧିକ ସମୟ ଉପଲବ୍ଧ ନୁହଁ

ତେଣୁ $x_1 + x_2 \leq 400$ ... (2)

ସମଭାବରେ ମେସିନ୍ Hରେ ମୋଟ ସମୟ ଲାଗିବ $2x_1 + x_2$ ।

ମେସିନ୍ H ମଧ୍ୟ 10 ଘଣ୍ଟା (600 ମି.) ପାଇଁ ଉପଲବ୍ଧ

ତେଣୁ $2x_1 + x_2 \leq 600$ ... (3)

ଯେହେତୁ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ ବସ୍ତୁ ଉତ୍ପାଦନ କରିବା ଅସମ୍ଭବ

ତେଣୁ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ... (4)

ଏଠାରେ, ସମସ୍ୟା ହେଉଛି x_1 ଓ x_2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

ଯେଉଁଠି ସର୍ବାଧିକ $z = 2x_1 + 3x_2$ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ)

ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ

$$x_1 + x_2 \leq 400$$
$$2x_1 + x_2 \leq 600$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

ଉଦାହରଣ 6.12 ଏକ ଫର୍ନିଚର ନିର୍ମାତା ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ସୋଫା ଯଥା : A-ପ୍ରକାର ଓ B-ପ୍ରକାର ତିଆରି କରେ । ସରଳତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଉତ୍ପାଦନ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ତିନିଟି ପୃଥକ କାର୍ଯ୍ୟରେ, ଯଥା - କାରିଗରୀ, ପରିଷ୍କରଣ ଓ ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି (Upholstery)ରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଶ୍ରମ ପରିମାଣର ଆବଶ୍ୟକତା ପୃଥକ ପୃଥକ । A ପ୍ରକାରର ସୋଫାପାଇଁ 6 ଘଣ୍ଟାର କାରୀଗରୀ 1ଘଣ୍ଟାର ପରିଷ୍କରଣ ଓ 2 ଘଣ୍ଟାର ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି ଆବଶ୍ୟକ । B ପ୍ରକାର ସୋଫା ପାଇଁ 3 ଘଣ୍ଟାର କାରିଗରୀ, 1 ଘଣ୍ଟାର ପରିଷ୍କରଣ ଓ 6 ଘଣ୍ଟାର ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି ଆବଶ୍ୟକ । କୁଶଳୀ କାରିଗର ଏବଂ ଉପକରଣର ସୀମିତ ଉପଲବ୍ଧତା ଯୋଗୁଁ କାରଖାନାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ 96 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା କାରିଗରୀ ପାଇଁ, 18 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା ପରିଷ୍କରଣ ପାଇଁ ଏବଂ 72 ମାନବ- ଘଣ୍ଟା ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି ପାଇଁ ଉପଲବ୍ଧ । A ପ୍ରକାର ପ୍ରତି ସୋଫାରେ 80 ଟଙ୍କା ଲାଭ ଓ B ପ୍ରକାରର ପ୍ରତି ସୋଫାରେ 70 ଟଙ୍କା ଲାଭ ହୁଏ । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ A ଓ B ପ୍ରକାରର କେତୋଟି ସୋଫା ତିଆରି ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ? ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପରେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

ସମାଧାନ : ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କାମ ପାଇଁ ଉପଲବ୍ଧ ମାନବ-ଘଣ୍ଟାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖିପାରିବା

ପ୍ରକ୍ରିୟା	A - ପ୍ରକାରର ସୋଫା	B- ପ୍ରକାରର ସୋଫା	ଉପଲବ୍ଧ ସମୟ
କାରିଗରୀ	6ଘଣ୍ଟା	3ଘଣ୍ଟା	96 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା
ପରିଷ୍କରଣ	1ଘଣ୍ଟା	1ଘଣ୍ଟା	18 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା
ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି	2ଘଣ୍ଟା	6ଘଣ୍ଟା	72 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା
ଲାଭ	ଟ.80	ଟ.70	

ମନେକର x_1 ଓ x_2 ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ପ୍ରକାରର ସୋଫା ସଂଖ୍ୟା । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟାରେ A ଓ B ପ୍ରକାରର ସୋଫା ତିଆରି କରିବାକୁ ଜଣେ ଚାହିଁବ । ମାତ୍ର ଶ୍ରମିକ ଓ ଉପକରଣର ସୀମିତତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ କାରଖାନା ଅସଂଖ୍ୟ ସୋଫା ତିଆରି କରି ପାରିବନାହିଁ । ତାଲିକାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଙ୍କ୍ତି ଗୋଟିଏ ଅବରୋଧକ ବା ପ୍ରତିବନ୍ଧ ତିଆରି କରେ । ପ୍ରଥମ ପଙ୍କ୍ତି ଦର୍ଶାଏ ଯେ, Aପ୍ରକାର ଓ B ପ୍ରକାର ସୋଫାର କାରିଗରୀ ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ 6 ଘଣ୍ଟା ଓ 3 ଘଣ୍ଟା ଆବଶ୍ୟକ । ପୁନଶ୍ଚ ଏଥିପାଇଁ କେବେଳ 96 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା ଦୈନିକ ଉପଲବ୍ଧ । x_1 ସଂଖ୍ୟକ A ଓ x_2 ସଂଖ୍ୟକ B ସୋଫା ସେଟ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତି ପାଇଁ ମୋଟ ମାନବ-ଘଣ୍ଟାର ହିସାବ ନିମ୍ନମତେ କରିପାରିବା । କାରିଗରୀ ପାଇଁ ଦୈନିକ ମାନବ ଘଣ୍ଟା ସଂଖ୍ୟା = {(A ପ୍ରକାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୋଫାର କାରିଗରୀ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଘଣ୍ଟା ସଂଖ୍ୟା × A ପ୍ରକାରର ସୋଫା ସଂଖ୍ୟା)} + {(B ପ୍ରକାରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୋଫା କାରିଗରୀ ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଘଣ୍ଟା ସଂଖ୍ୟା) × (B ପ୍ରକାରର ସୋଫା ସଂଖ୍ୟା)}

$= 6x_1 + 3x_2$

ମାତ୍ର କାରିଗରୀ ପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ 96 ମାନବ-ଘଣ୍ଟା ଉପଲବ୍ଧ, ଅର୍ଥାତ୍ $6x_1 + 3x_2 \leq 96$

ବା, $2x_1 + x_2 \leq 32$ ... (1)

ସେହିପରି ଭାବରେ, ତାଲିକାର 2ୟ ଓ 3ୟ ପଙ୍କ୍ତିରେ ପରିଷ୍କରଣ ଓ ଆସନ ପ୍ରସ୍ତୁତି ପାଇଁ ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

$x_1 + x_2 \leq 18$ ... (2)

ଏବଂ $2x_1 + 6x_2 \leq 72$

ବା, $x_1 + 3x_2 \leq 36$ ... (3)

ଯେହେତୁ ସୋଫାସଂଖ୍ୟା ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ତେଣୁ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ ... (4)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲାଭ ଦୁଇଟି ଉତ୍ସ, A ପ୍ରକାର ସୋଫା ଓ B ପ୍ରକାରର ସୋଫାରୁ ଆସିପାରେ ।

ତେଣୁ ଲାଭ = (A ପ୍ରକାରରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଲାଭ) + (B ପ୍ରକାରରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଲାଭ)

= {(A ପ୍ରକାର ପ୍ରତି ଲାଭ) × (Aପ୍ରକାରର ସୋଫାସଂଖ୍ୟା)}

+ (B ପ୍ରକାର ପ୍ରତିଲାଭ) × (B ପ୍ରକାରର ସୋଫାସଂଖ୍ୟା)}

$z = 80\,x_1 + 70\,x_2$ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ) ... (5)

ଏଣୁ, ଏଠାରେ ସମସ୍ୟା ହେଉଛି x_1 ଓ x_2 କରିବା ଯେପରିକି $z = 80x_1 + 70x_2$

(ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ) ସର୍ବାଧିକ ହେବ । ଏଥିପାଇଁ ଅବରୋଧକ (ବା ପ୍ରତିବନ୍ଧ) ହେବ ।

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 32 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ x_1 + x_2 &\leq 36 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \text{ପ୍ରତିବନ୍ଧ}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.3

1. ଏକ କମ୍ପାନୀ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ A ଓ B ତିଆରି କରେ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ବସ୍ତୁର ପ୍ରସ୍ତୁତି କାର୍ଯ୍ୟ ଦୁଇଟି ମେସିନ୍ G ଓ H ଦ୍ୱାରା କରାଯାଏ । A ପ୍ରକାର ଉପରେ G ର 3ଘଣ୍ଟାର ଓ H ର 4ଘଣ୍ଟାର କାମ ହୁଏ । B ପ୍ରକାର ଉପରେ G ର 4 ଘଣ୍ଟାର ଓ H ର 5 ଘଣ୍ଟାର କାମ ଦରକାର ପଡ଼େ । G ଓ H ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉପଲବ୍ଧ ସମୟ ପ୍ରତି 10 ଘଣ୍ଟା ଓ 21 ଘଣ୍ଟା । A ଓ B ଉତ୍ପାଦଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ ଗୋଟିକୁ ଟ.3 ଓ ଟ.8 ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କରାଯାଇପାରେ । ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

2. ଏକ ଫର୍ଣ୍ଣିଚର ବିକ୍ରେତା ଦୁଇଟି ବସ୍ତୁ, ଟେବୁଲ ଓ ଚୌକିର ବେପାର କରନ୍ତି । ତାଙ୍କ ପାଖରେ ବିନିଯୋଗ ପାଇଁ ଟ. 5000 ଅଛି ଏବଂ 60 ଟି ପାଇଁ ରଖିବାର ସ୍ଥାନ ଅଛି । ସେ ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲକୁ 250 ଟଙ୍କା ଦାମ୍‌ରେ ଓ ଗୋଟିଏ ଚୌକିକୁ 50 ଟ. ଦାମ୍‌ରେ କିଣନ୍ତି । ସେ ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲକୁ ଟ.50 ଲାଭରେ ଓ ଗୋଟିଏ ଚୌକିକୁ 15ଟ. ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କରନ୍ତି । ମନେକର ସେ ଯାହା କିଣନ୍ତି ସେ ସବୁକୁ ବିକ୍ରି କରିଦିଅନ୍ତି । ସେ କିପରି ଅର୍ଥ ବିନିଯୋଗ କଲେ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇବେ ଏହାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ଭାବରେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

3. ଏକ ଦୁଗ୍ଧ ଶାଳାର ଦୁଇଟି ସ୍ଥାନ P ଓ Q ରେ ଦୁଇଟି ଯନ୍ତ୍ର ଲାଗିଛି । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯନ୍ତ୍ର, 1 କି.ଗ୍ରା. ପ୍ୟାକେଟ୍ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇପ୍ରକାରର ଉତ୍ପାଦ A ଓ B ଉତ୍ପାଦନ କରେ । ପ୍ରତିଦିନ ପ୍ୟାକେଟ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବାର ଉଭୟ ଯନ୍ତ୍ରର କ୍ଷମତା ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅଟେ ।

ଯନ୍ତ୍ର → / ଉତ୍ପାଦ ↓	P	Q
A	2000	1500
B	4000	6000

ଏକ ବଜାର ସର୍ବେକ୍ଷଣ ଅନୁଯାୟୀ, ଏପ୍ରିଲ ମାସରେ A ପ୍ରକାର 20,000 ପ୍ୟାକେଟ୍ ଓ B ପ୍ରକାରର 16000 ପ୍ୟାକେଟ୍‌ର ଚାହିଦା ଅଛି । ଯନ୍ତ୍ର P ଓ Q କୁ ଚଳାଇବା ପାଇଁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ ଯଥାକ୍ରମେ ଟ.4000 ଓ ଟ.7500 ଖର୍ଚ୍ଚ ହୁଏ । ଏପ୍ରିଲ୍ ମାସରେ କମ୍ପାନୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯନ୍ତ୍ରକୁ କେତେ ଦିନ ଚଳାଇବାର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡ଼ିବ ଯେପରିକି ଉତ୍ପାଦନ ମୂଲ୍ୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଏବଂ ବଜାରର ଚାହିଦା ପୂରଣ ହୋଇପାରିବ ? ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

4. ଏକ କାରଖାନା ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ A ଓ B ଉତ୍ପାଦନ କରେ । A ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ମେସିନ୍‌କୁ 1ଘଣ୍ଟା 30 ମିନିଟ୍ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ ହୁଏ ଏବଂ ଏକ ଶିଳ୍ପୀକୁ ମଧ୍ୟ 2ଘଣ୍ଟା କାମ କରିବାକୁ ହୁଏ । B ପ୍ରକାରର ବସ୍ତୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ପାଇଁ ମେସିନ୍‌କୁ ଘ.2.30ମି. କାର୍ଯ୍ୟ କରିବାକୁ ହୁଏ ଏବଂ ଏକ ଶିଳ୍ପୀକୁ ମଧ ଘ1.30ମି. କାମ କରିବାକୁ ହୁଏ । ଗୋଟିଏ ସପ୍ତାହରେ କାରଖାନାରେ 80 ଘଣ୍ଟା ମେସିନ୍‌ର ସମୟ ଓ 70 ଘଣ୍ଟା ଶିଳ୍ପୀର ସମୟ ଉପଲବ୍ଧ ହୋଇପାରେ । A ପ୍ରକାରର ଗୋଟି ପ୍ରତି ଲାଭ ଟ.5 ଓ B ପ୍ରକାରର ଗୋଟି ପ୍ରତି ଲାଭ ଟ.4 । ଯଦି ଉତ୍ପାଦିତ ହୋଇଥିବା ସବୁ ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରି ହୁଏ, ତେବେ ସପ୍ତାହକୁ ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେତେ ସଂଖ୍ୟକ ଉତ୍ପାଦିତ ହେଲେ, ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ହେବ ? ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

6.8 ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା (Geometric approach of Linear Programming problem)

ଦୁଇ ଚଳରାଶି x ଓ y ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳ ପ୍ରଶ୍ନ ନେବା । x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

$x + y = 4$

$3x + 4y = 14$

ଏହି ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା $x = 2$ ଓ $y = 2$ । ଯଦି ସମୀକରଣ ସଂଖ୍ୟା ଅଧିକ ଓ ଅଜ୍ଞାତରାଶି ସଂଖ୍ୟା ଅଧିକ ହୁଏ କ'ଣ ହେବ ?

ଆମେ କ'ଣ ଏପରି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇପାରିବା ?

n ସଂଖ୍ୟକ ଚଳରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସହସମୀକରଣ ସମୂହର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ମିଳିବ ଯଦି ଠିକ୍ n ସଂଖ୍ୟକ ସମ୍ବନ୍ଧ (ସମୀକରଣ) ଦିଆଯାଇଥାଏ । ଯଦି ସମ୍ବନ୍ଧର ସଂଖ୍ୟା n ଠାରୁ ଅଧିକ କିମ୍ବା କମ୍ ହୁଏ, ତେବେ କ'ଣ ହେବ ?

ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅସମ୍ଭବ, ମାତ୍ର କେତେକ ପରୀକ୍ଷାମୂଳକ ସମାଧାନ (Trial solution) ମିଳିପାରେ । ପୁନଶ୍ଚ ଯଦି ସଂପୃକ୍ତ ଚଳ ରାଶି ସଂଖ୍ୟାଠାରୁ କମ୍ କିମ୍ବା ବେଶୀ ସଂଖ୍ୟାର ସମ୍ବନ୍ଧ (ସମୀକରଣ) ଥାଏ ଏବଂ ସମ୍ବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକ ଅସମୀକରଣ ରୂପରେ ଥାଏ, ତେବେ ସେ ପ୍ରକାର ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ ଆମେ ସମାଧାନ ପାଇ ପାରିବା କି ?

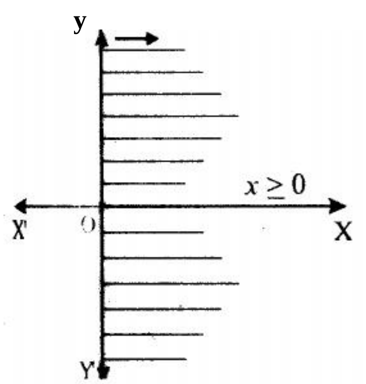
ଯେବେ କୌଣସି ଏକ ସମସ୍ୟାର ବିଶ୍ଳେଷଣ, ଯେଉଁଥିରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ କେତେକ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବାକୁ ହୁଏ, କୌଣସି ଏକଘାତୀ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କିମ୍ବା ସର୍ବାଧିକ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଥାଏ, ତେବେ ତା'ର ସମାଧାନ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ କୌଶଳର ଉପଯୋଗ କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ, ଯେଉଁଥିରେ କେବଳ ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିଥାଏ, ତାକୁ ସମାଧାନ କରିବପାଇଁ ଜ୍ୟାମିତିକ ଉପାୟ ଅବଲମ୍ବନ କରିବାକୁ ହୁଏ । ଏହାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଗ୍ରାଫିକ୍ ସମାଧାନ କହନ୍ତି ।

6.8 ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ (Solution of Liner Programming Problem)

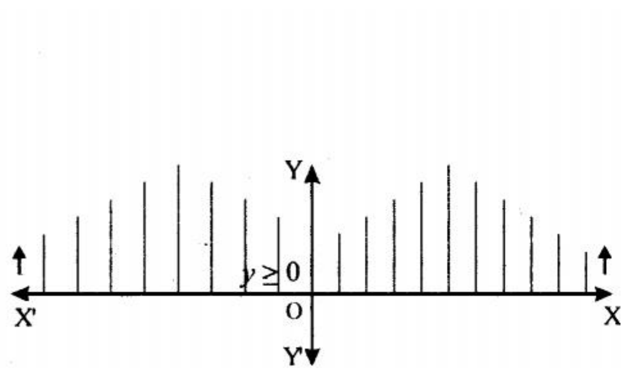
ପୂର୍ବ ବିଭାଗରେ ଆମେ ଏପରି ସମସ୍ୟାକୁ ଦେଖିଲେ ଯେଉଁଥିରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସଂଖ୍ୟା ଚଳ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । ଏବଂ ଅନେକଗୁଡ଼ିଏ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ଅସମୀକରଣ ମାଧ୍ୟମରେ (ଅର୍ଥାତ୍ $\leq$ କିମ୍ବା $\geq$) ରୂପରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିଲା, ଯେଉଁଥିରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସର୍ତ୍ତଗୁଡ଼ିକ ଅଜ୍ଞାତରାଶିର ଫଳନକୁ ସର୍ବାଧିକ (କିମ୍ବା ସର୍ବନିମ୍ନ) କରିବାକୁ ହୁଏ ।

ଏବେ ପ୍ରଶ୍ନ ହେଉଛି ଏପରି ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କିପରି ମିଳିପାରିବ ?

ଏ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ପାଇଁ, ଆସ କେତେକ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ଓ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ (ଅସମାନତା)କୁ ବିଚାର କରିବା ।



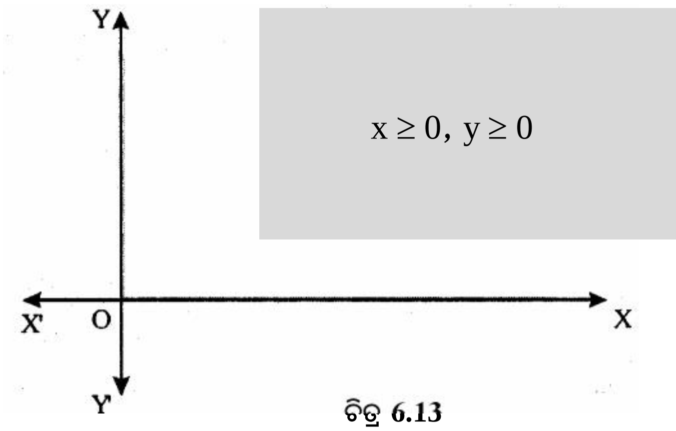
ଚିତ୍ର **6.11**



ଚିତ୍ର **6.12**

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $x \geq 0$, y ଅକ୍ଷ ସହିତ y-ଅକ୍ଷର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦର୍ଶାଏ । ସେହିପରି $y \geq 0$, x- ଅକ୍ଷ ସହିତ x- ଅକ୍ଷର ଉପରିସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ, $x \geq 0$ ଏବଂ $y \geq 0$ ଏକତ୍ର କେଉଁ ଅଂଶକୁ ଦର୍ଶାଏ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $x \geq 0$ ଓ $y \geq 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଅଞ୍ଚଳରେ ରହିବ $x \geq 0$ ଓ $y \geq 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ । ଏହା ହେଉଛି ସମତଳର ପ୍ରଥମ ପାଦ ।

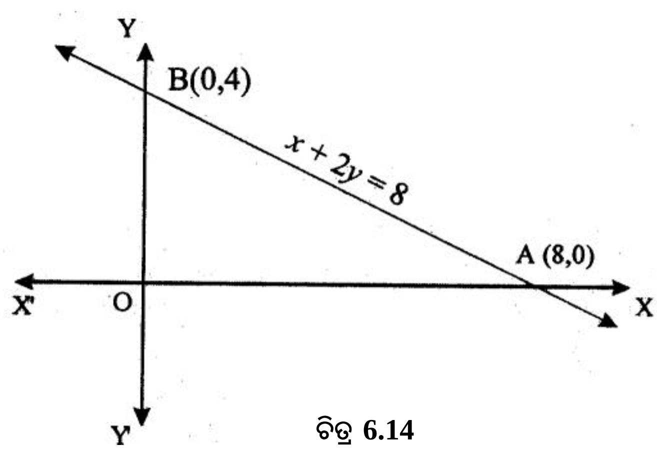


ଚିତ୍ର **6.13**

ପରେ ଆମେ ଅସମୀକରଣ $x + 2y \leq 8$ର ଗ୍ରାଫ୍ ନେବା ଓ ଏଥିପାଇଁ ସରଳରେଖା $x + 2y = 8$ ଅଙ୍କନ କରିବା । ତା'ପରେ $x + 2y \leq 8$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା କ୍ଷେତ୍ରକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

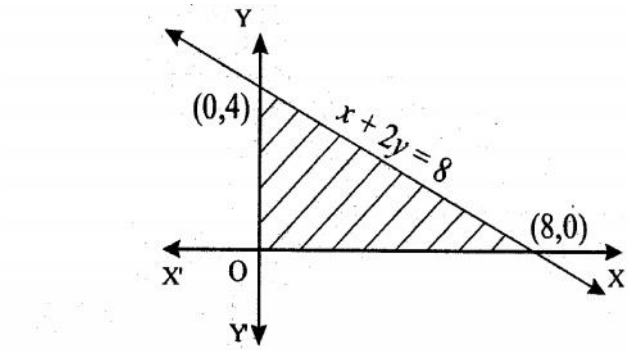
ସାଧାରଣତଃ $x = 0$ ନେଇ yର ଅନୁରୂପ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ଏବଂ $y = 0$ ନେଇ yର ଅନୁରୂପ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ ଦୁଇସେଟ୍ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ (ଯଦି ସରଳରେଖା ଦୁଇ ଅକ୍ଷ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସହ ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ମୂଳ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହୋଇଥାଏ ତେବେ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଉପଯୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଓ y ର କୌଣସି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛକ ମାନ ନିଅନ୍ତି, ଯାହା ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।)

$(0, 4)$ ଓ $(8, 0)$ ବିନ୍ଦୁକୁ ଗ୍ରାଫ୍ ଉପରେ ଦର୍ଶାଇ ଏବଂ ସେ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱାରା ମିଳୁଥିବା ଲେଖଚିତ୍ର



ଚିତ୍ର **6.14**

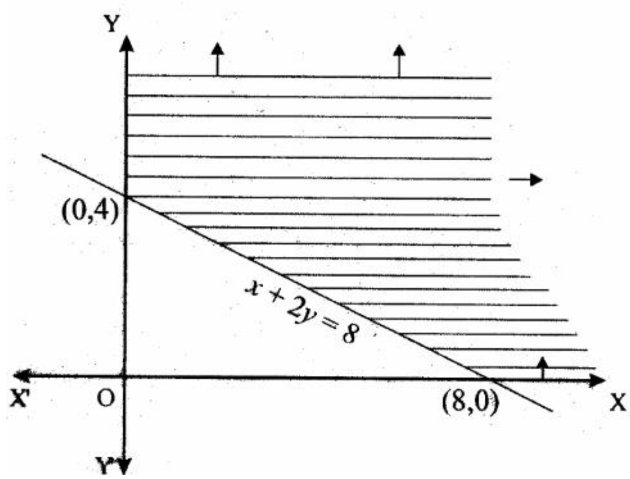
ଚିତ୍ରକୁ 6.14ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 6.15

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଦେଖିଛନ୍ତି ଯେ, $x \geq 0$ ଓ $y \leq 0$ ଏକତ୍ର ପ୍ରଥମ ପାଦକୁ ଦର୍ଶାଏ । $x + 2y < 8$ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଲେଖଚିତ୍ର, $x + 2y = 8$ର ସେହି ପାଖରେ ଅଛି ଯେଉଁ ପାଖରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଥାଏ । କାରଣ ଏହି ଅଂଶର କୌଣସିବିନ୍ଦୁ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ଏଣୁ ଚିତ୍ର 6.15ରେ ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ ଏକ ସାଙ୍ଗରେ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ଏବଂ $x + 2y \leq 8$କୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ସେହିପରି, ଯଦି ଆମେ $x \geq 0$, $y \geq 0$ ଏବଂ $x + 2y \geq 8$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ଅଂଶ ନେବା, ତେବେ ଏହା ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଓ $x + 2y = 8$ ସରଳରେଖାର ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ, ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନଥାଏ । ଚିତ୍ର 6.16ରେ ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ ଏହି ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ସୂଚିତ କରେ ।



ଚିତ୍ର 6.16

ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ, ଯେଉଁଥିରେ ଦତ୍ତ ସମସ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ (Constraints) ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତାହାକୁ **ସଂଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର (Feasible region)** କୁହାଯାଏ ।

6.9. ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ (Feasible Solution)

ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚଳଗୁଡ଼ିକର ସେହି ମାନଗୁଡ଼ିକୁ **ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ** କୁହାଯାଏ, ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସମସ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ (Constraints) ଏବଂ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପ୍ରତିବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

6.9.2 ଇଷ୍ଟତମ (Optimal) ସମାଧାନ

ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ସେହି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକୁ ସମସ୍ୟାର ଇଷ୍ଟତମ **(Optimal)** ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ, ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଉର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ (Objective) ଫଳନକୁ ସର୍ବାଧିକ ବା ସର୍ବନିମ୍ନ (ଇଷ୍ଟତମ) କରାଏ ।

ଟୀକା : ଯଦି କୌଣସି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ଉର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନକୁ ସର୍ବାଧିକ (ବା ସର୍ବନିମ୍ନ) ନକରେ, କିମ୍ବା ସମସ୍ୟାର କୌଣସି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ନଥାଏ, ତେବେ ଲିନିୟର ତେବେ ରୈଖୀକ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଗ୍ରାଫ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମାଧାନ ପାଇବା ପାଇଁ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୋପାନଗୁଡ଼ିକ ଅନୁସରଣ କରାଯାଏ ।

ସୋପାନ -1 : ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା

ସୋପାନ -2 : ପ୍ରତିବନ୍ଧିତ ଅସମୀକରଣରୁ ପୂର୍ବରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଗ୍ରାଫ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବ ।

ସୋପାନ -3 : ଏକା ସାଙ୍ଗରେ ସମସ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା । କ୍ଷୁଦ୍ରତର କିମ୍ବା ସମାନ ($\le$) ପ୍ରତିବନ୍ଧ ପାଇଁ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସାଧାରଣତଃ ସରଳରେଖାର ନିମ୍ନରେ ଏବଂ ବୃହତ୍ତର ବା ସମାନ ($\ge$) ପ୍ରତିବନ୍ଧ ପାଇଁ କ୍ଷେତ୍ରଟି ସରଳ ରେଖାର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ ରହେ ।

ସୋପାନ - 4 : ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମାଧାନ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଚିହ୍ନଟ କର । ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବଦା ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷରେ ରହେ ।

ସୋପାନ - 5 : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷରେ (କୌଣିକ ବିନ୍ଦୁ) ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟାୟନ କର

ସୋପାନ - 6 : ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନର ଇଷ୍ଟତମ ମାନକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

ଉଦାହରଣ 6.13 ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ସୀମା ମଧ୍ୟରେ, z ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି

$$z = x_1 + 2x_2$$

$$x_1 + x_2 \ge 1$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

ସମାଧାନ : ଫଳନ $z = x_1 + 2x_2$ ଯାହା ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ, ତାହା

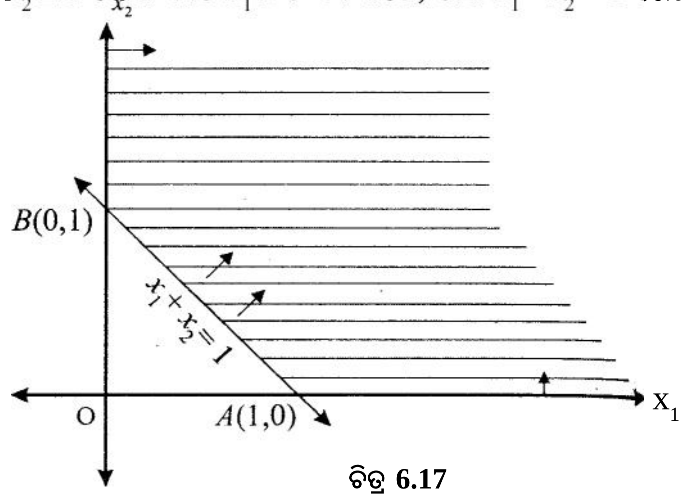
ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧର ଅନ୍ତର୍ଗତ

$$x_1 + x_2 \ge 1$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

ସର୍ବପ୍ରଥମେ, ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ପରି ଆମେ ଏହି ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଗ୍ରାପ୍ ଅଙ୍କନ କରିବା :

ଯେପରି ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା କରିଛେ, ଯେଉଁ ଅଂଶ $x_1 \ge 0$ ଏବଂ $x_2 \ge 0$ କୁ ସିଦ୍ଧକରେ, ତାହା ପ୍ରଥମ ପାଦ ଅଟେ ଏବଂ ଯେଉଁ ଅଂଶ $x_1 + x_2 \ge 1$ ରେଖା ସହିତ $x_1 \ge 0$ ସିଦ୍ଧ କରେ, ତାହା $x_1 + x_2 = 1$ ରେଖାର ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ



ଚିତ୍ର 6.17

ଅବସ୍ଥିତ, ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇନଥାଏ । ତେଣୁ, ରେଖାଙ୍କିତ ଅଞ୍ଚଳ ହେଉଛି ଆମର ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ, କାରଣ ଏହି ଅଂଶରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସମସ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମକୁ ଇଷ୍ଟତମ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ । ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେଉଛନ୍ତି A (1, 0) ଏବଂ B (0, 1) ।

A ରେ zର ମୂଲ୍ୟ = 1

B ରେ z ର ମୂଲ୍ୟ = 2

ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ନିଅ, ଯଥା : (1, 1) (2, 0) (0, 2) ଇତ୍ୟାଦି ।

ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ A (1, 0) ରେ z ର ମାନ ସର୍ବନିମ୍ନ ।

ଉଦାହରଣ 6.14 ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧର ସୀମା ମଧ୍ୟରେ, z ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି,

$z = x_1 + 2x_2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$2x_1 + 4x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ସମାଧାନ : ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ଯାହା ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ, ତାହା ହେଉଛି

$z = x_1 + 2x_2$

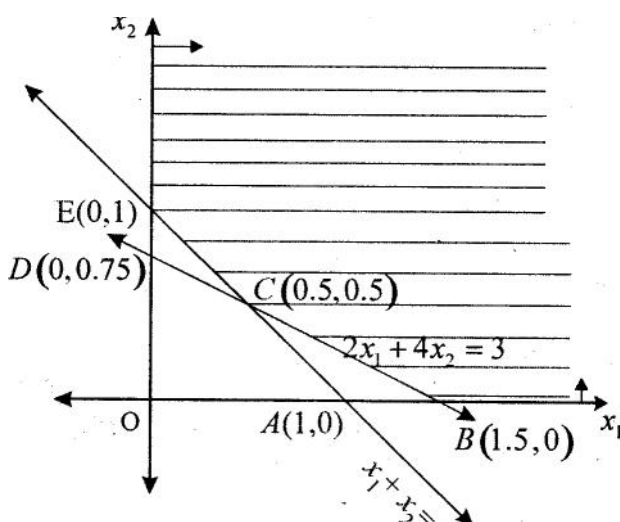
ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ (Constraints) ଅନ୍ତର୍ଗତ

$x_1 + x_2 \geq 4$

$2x_1 + 4x_2 \geq 3$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ପ୍ରଥମେ ଆମେ ସମସ୍ତ ଅସମୀକରଣର ଗ୍ରାଫ୍ ନିମ୍ନପରି ଅଙ୍କନ କରିବା (ଯେପରି ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି):



ଚିତ୍ର 6.18

ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ ହେଉଛି ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର । ଏହି ଅଂଶର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସମସ୍ତ ଗାଣିତିକ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ଏଣୁ ଏହା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମକୁ ଇଷ୍ଟତମ (Optimal) ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

B (1.5, 0) ରେ, z ର ମାନ 1.5

C (0.5, 0.5) ରେ, z ର ମାନ 1.5

E (0, 1) ରେ, z ର ମାନ 2

ଯଦି ଆମେ $2x_1 + 4x_2 = 3$ ରେଖା ଉପରେ B ଓ C ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ନେବା, ତେବେ ଆମେ $\frac{3}{2}$ ପାଇବା ଏବଂ ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଅନ୍ୟ କେଉଁ ଠାରେ $\frac{3}{2}$ ଠାରୁ ଅଧିକ ପାଇବା । $2x_1 + 4x_2 = 3$ ଉପରେ କୌଣସି ବି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ (B ଓ C ମଧ୍ୟରେ) ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ $z = x_1 + 2x_2$ କୁ ସର୍ବନିମ୍ନ କରେ, ଏହାର କାରଣ, ରେଖାଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ଅଟନ୍ତି । (ଦୁଇଟିର ସ୍ଲୋପ୍ $^1/_2$) । ଏହିପରି, ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଥାଏ, ଯେଉଁଥିରୁ ଦୁଇଟି ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳେ ।

ଉଦାହରଣ 6.15

$z = 0.25\,x_1 + 0.45\,x_2$ ର ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ଅନ୍ତର୍ଗତ, ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିରୂପଣ କର

$x_1 + 2x_2 \leq 300$

$3x_1 + 2x_2 \leq 480$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

ସମାଧାନ : $z = 0.25\,x_1 + 0.45\,x_2$ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ଅଟେ, ଯାହାର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ ।

ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ଅନ୍ତର୍ଗତ

$x_1 + 2x_2 \leq 300$

$3x_1 + 2x_2 \leq 480$

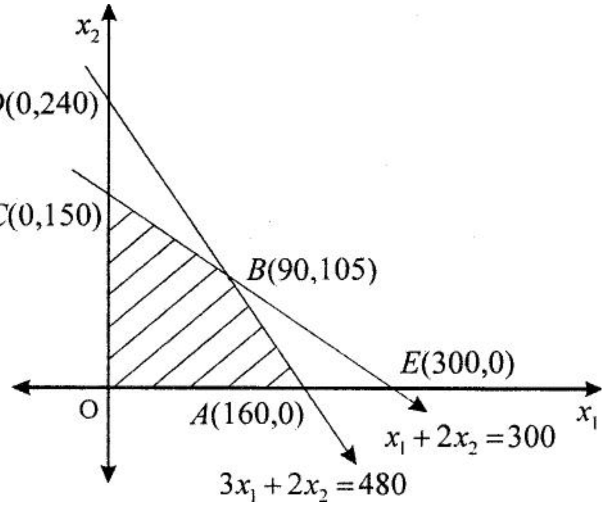
$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

ପ୍ରଥମେ ଆମେ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା, ଯାହା ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅଟେ ।

ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ OABC ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର ଅଟେ । ଏହି ଅଂଶସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସମସ୍ତ ଗାଣିତିକ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ଏଣୁ ଏହା ହିଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ।

ଏବେ ଆମକୁ ଇଷ୍ଟତମ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ । A (160, 0) ରେ, z ର ମାନ 40.00 ଅଟେ । B (90, 105) ରେ, z ର ମାନ 69.75 । C (0, 0)ରେ, z ର, ମାନ 67.50 । O (0, 0) ରେ, z ର ମାନ 0 ।

ଯଦି ଆମେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଅଂଶରେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ମାନ, ଯେପରିକି (60, 120) (80, 80) ଆଦି ନେବା, ତେବେବି ସର୍ବାଧିକ ମାନ 69·75 ମିଳିବ, ଯେପରି ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ B (90, 105)ରେ ମିଳିଥିଲା ।



ଚିତ୍ର 6.19

ଟୀକା : କୌଣସି ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ପାଇଁ, ଯାହାର ସମାଧାନ ସମ୍ଭବ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ସାଧାରଣ ନିୟମ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଯଦି ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଏକ ସମାଧାନ ଥାଏ, ତେବେ ଏହା ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଏକ ଶୀର୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଏକାଧିକ ସମାଧାନ ଥାଏ, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ଶୀର୍ଷରେ ରହିବ । ଏଇ ଦୁଇ ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନର ଅନନ୍ୟ ମାନ ରହିବ ।

ଉଦାହରଣ 6.16 ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଶିଳ୍ପ କାରଖାନାରେ, ଜଣେ ନିର୍ମାତା ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରନ୍ତି । ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପ୍ରସ୍ତୁତି ପାଇଁ ମେସିନ A କୁ 3 ଘଣ୍ଟା ଏବଂ ମେସିନ B କୁ 2 ଘଣ୍ଟା କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ଆଲମାରୀ ପାଇଁ ମେସିନ A କୁ 3 ଘଣ୍ଟା ଓ B କୁ 3ଘଣ୍ଟା କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଦୈନିକ ମେସିନ୍ A ସର୍ବାଧିକ 18 ଘଣ୍ଟା ଏବଂ ମେସିନ B ସର୍ବାଧିକ 14 ଘଣ୍ଟା ଚାଲିପାରେ । ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ଉପରେ 30 ଟଙ୍କା ଓ ଦ୍ୱିତିୟ ପ୍ରକାରରେ 40 ଟଙ୍କା ଲାଭ ହୁଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ ସେ ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେତୋଟି ବହି ଆଲମାରୀ ତିଆରି କଲେ ତାଙ୍କର ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ନିର୍ମାତା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନ ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର x_1 ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର x_2 ସଂଖ୍ୟକ ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ନିର୍ମାଣ କରେ । ଯେହେତୁ x_1 ଓ x_2 ହେଉଛି, ଆଲମାରୀ ସଂଖ୍ୟା, ଏଣୁ

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \qquad \text{... (1)}$$

ଯେହେତୁ ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ଆଲମାରୀ ପାଇଁ ମେସିନ୍ A କୁ 3 ଘଣ୍ଟା କାର୍ଯ୍ୟ କରବା ଆବଶ୍ୟକ, ଏଣୁ x_1 ସଂଖ୍ୟକ ଆଲମିରା ପାଇଁ A କୁ $3x_1$ ଘଣ୍ଟା ଆବଶ୍ୟକ । ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପ୍ରସ୍ତୁତି ପାଇଁ ମେସିନ A କୁ 3 ଘଣ୍ଟା ଲାଗେ, ତେଣୁ x_2 ସଂଖ୍ୟକ 2ୟ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପାଇଁ ମେସିନ୍ A କୁ $3x_2$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ଲାଗିବ ।

ଯେହେତୁ ମେସିନ A ର କାର୍ଯ୍ୟଦକ୍ଷତା ହେଉଛି ଦୈନିକ ସର୍ବାଧିକ 18 ଘଣ୍ଟା, ଏଣୁ

$3x_1 + 3x_2 \le 18$

କିମ୍ବା, $x_1 + x_2 \le 6$ ... (2)

ସେହିପରି, ମେସିନ B, ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପାଇଁ 2ଘଣ୍ଟା ନିଏ ଏବଂ 2ୟ ପ୍ରକାରର ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ପାଇଁ 3ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନିଏ । ମେସିନର ଦୈନିକ ସର୍ବାଧିକ କାର୍ଯ୍ୟ ଦକ୍ଷତା 14 ଘଣ୍ଟା, ଏଣୁ

$2x_1 + 3x_2$ á 14 ... (3)

ଦତ୍ତ ଅଛି, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନର ଲାଭ

$z = 30x_1 + 40x_2$ ... (4)

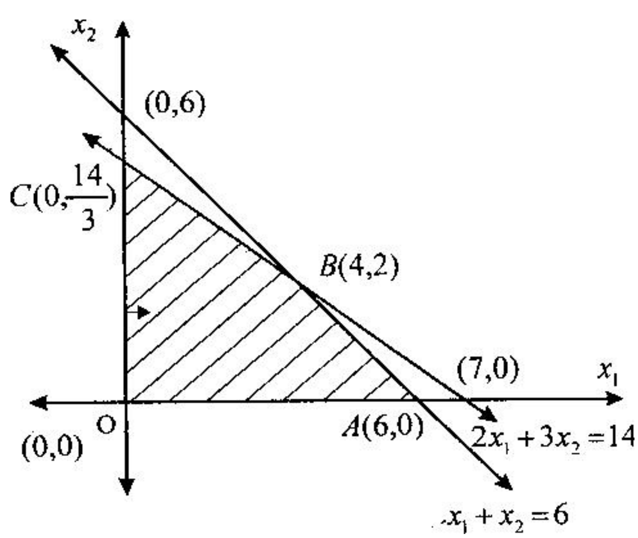
ଏବେ ଆମକୁ x_1 ଓ x_2 ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ, ଯେପରିକି z ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ମିଳିବ ।

ସର୍ବାଧିକ $z = 30x_1 + 40x_2$ (ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ)

ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ସୀମା ମଧ୍ୟରେ

$$\left.\begin{array}{r} x_1 + x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 14 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{array}\right\} \text{ ପ୍ରତିବନ୍ଧ}$$

ଏହି ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଲୈଖିକ ପଦ୍ଧତି ଉପଯୋଗ କରିବା । ସର୍ବପ୍ରଥମେ, ଆମେ ଉକ୍ତ ଅସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ।



ଚିତ୍ର **6.20**

ରେଖାଚିତ୍ର ଅଂଶ OABC ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର ଅଟେ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସମସ୍ତ ଗାଣିତିକ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ତେଣୁ ଏହା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଟେ ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଶୀର୍ଷ O (0, 0), A (6, 0) ଓ B (4, 2)ରେ ଇଷ୍ଟତମ (Optimal) ସମାଧାନ ମିଳିବ । C ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୋଇନଥିବାରୁ, ଆମେ ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଉପରେ ବିଚାର କରିପାରିବା ନାହିଁ । ରେଖାମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କର ଗଣନା କରାଯାଇପାରେ ।

ବିନ୍ଦୁ O ରେ, ଲାଭ ଶୂନ୍ୟ

A ରେ ଲାଭ $= 30 \times 6 + 40 \times 0$

$= 180$

B ରେ ଲାଭ $= 30 \times 4 + 40 \times 2$

$= 120 + 80$

$= 200$

ଏହିପରି, ନିର୍ମାତା ଯଦି ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର 4 ଟି ଓ 2ୟ ପ୍ରକାରର 2ଟି ପୁସ୍ତକ ଆଲମାରୀ ତିଆରି କରେ, ତେବେ ସେ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ 200 ଟଙ୍କା ପାଇବେ ।

ଉଦାହରଣ 6.17 ଉଦାହରଣ 6.10 କୁ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମାଧାନ କର :

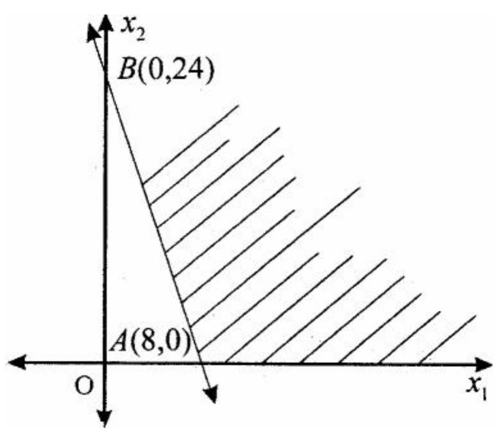
ସମାଧାନ : ଉଦାହରଣ 6.10ରେ

ବସ୍ତୁନିଷ୍ଠ ଫଳନ $z = 6000\,x_1 + 4000\,x_2$ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ନିମ୍ନସର୍ତ୍ତ ସୀମା ମଧ୍ୟରେ

$$\left.\begin{array}{r} 3x_1 + x_2 \geq 24 \\ x_1 + x_2 \geq 16 \\ x_1 + 3x_2 \geq 24 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ପ୍ରତିବନ୍ଧ}$$

ପ୍ରଥମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଯେ ପ୍ରଥମ ପାଦର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ $(x_1 x_2)$ ପାଇଁ $x_1 \geq 0$ ଓ $x_2 \geq 0$ ସର୍ତ୍ତକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ । ଏବେ ଆମେ ରେଖାର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ।



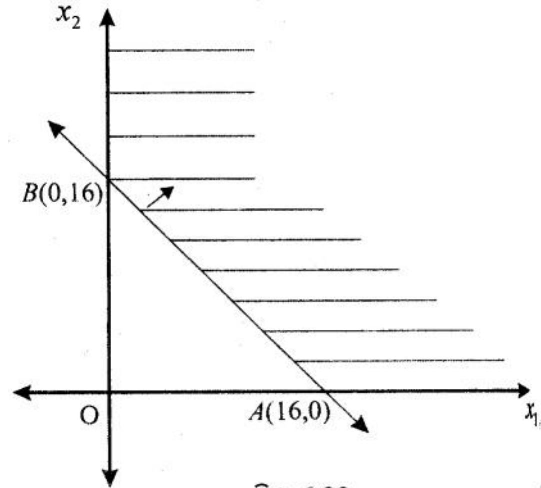
ଚିତ୍ର **6.21**

$$3x_1 + x_2 = 24$$

$$\text{କିମ୍ବା } \frac{x_1}{8} + \frac{x_2}{24} = 1$$

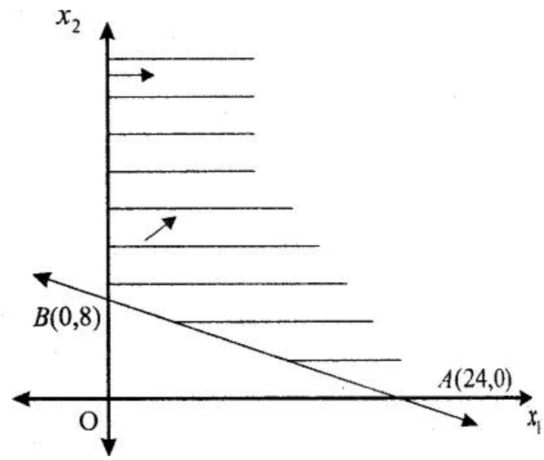
$3x_1 + x_2 = 24$ ର ରେଖା ଉପରେ ବା ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ ଥିବା କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ, ପ୍ରତିବନ୍ଧ $3x_1 + x_2 \geq 24$ ପ୍ରତିବନ୍ଧକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ (ଚିତ୍ର 6.21 ଦେଖ)

ଏହିପରି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ, ଯାହା $x_1 + x_2 = 16$ ରେ ଅଛି ବା ଏହାର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ ଅଛି, ତାହା ପ୍ରତିବନ୍ଧ $x_1 + x_2 \geq 16$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ (ଚିତ୍ର 6.22 ଦେଖ ।)



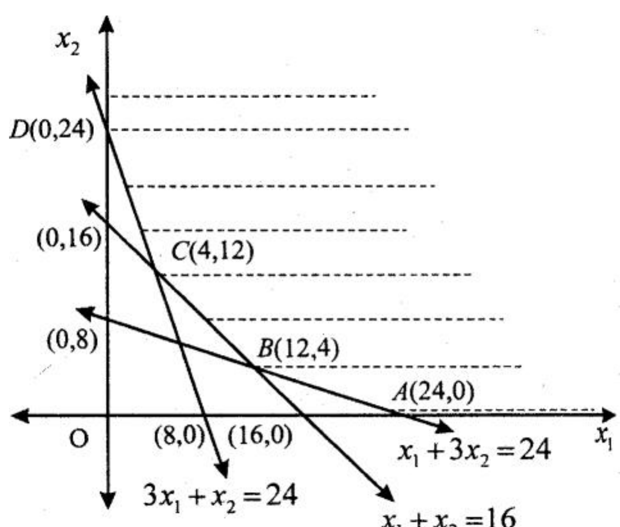
ଚିତ୍ର **6.22**

ପୁନଶ୍ଚ, କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ, ଯାହା $x_1 + 3x_2 = 24$ ରେଖା ବା ଏହାର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ ଅଛି, ତାହା $x_1 + 3x_2 \geq 24$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ (ଚିତ୍ର 6.23 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର **6.23**

ଏଣୁ, ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ଚିତ୍ରକୁ ଏକତ୍ର କଲେ, ଆମେ ଅଣସୀମାବଦ୍ଧ ସାଧାରଣ ରେଖାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ର ପାଇବା (ଚିତ୍ର 6.24 ଦେଖ) ।



ଚିତ୍ର **6.24**

A (24, 0), B (12, 4), C (4, 12) ଓ D (0, 24) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର $z = 6000\,x_1 + 4000\,x_2$ ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ରହିଛି ।

A ରେ : $z = 6000 \times 24 + 0 = 1{,}44{,}000$

B ରେ : $z = 6000 \times 12 + 4000 \times 4 = 88{,}000$

C ରେ : $z = 6000 \times 4 + 4000 \times 12 = 72{,}000$

D ରେ : $z = 0 + 4000 \times 24 = 96{,}000$

ଏଣୁ, ଆମେ ପାଇବା ଯେ C (4, 12) ଠାରେ ଯେଉଁଠି $x_1 = 4$ ଓ $x_2 = 12$ z ର ମାନ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ,

ଏଣୁ ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ, କମ୍ପାନୀ ମେସିନ P କୁ 4 ଦିନ ପାଇଁ ଓ ମେସିନ Q କୁ 12 ଦିନ ପାଇଁ ଚଳାଇବା ଆବଶ୍ୟକ । ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ହେବ 72000 ଟଙ୍କା ।

ଉଦାହରଣ 6.18 ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ ରାଶି $z = x_1 + 2x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମେ ଆମେ ପ୍ରତିବନ୍ଧ

$x_1 + x_2 \geq 1,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ।

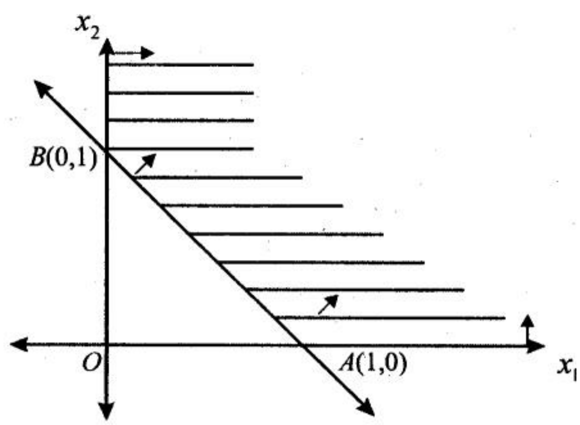
ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନର ସେଟ୍ ।

ଏବେ ଆମେ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନକୁ ସର୍ବାଧିକ କରିବା ।

A (1, 0) ଠାରେ, z ର ମୂଲ୍ୟ 1 ।

B (0, 1) ଠାରେ, z ର ମୂଲ୍ୟ 2 ।

ଯଦି ଆମେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରସ୍ଥ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି (1, 1) କିମ୍ବା, (2, 3) କିମ୍ବା (5, 4) ଆଦି ନେବା, ଏଥିପାଇଁ z ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ଆମକୁ ଜଣାପଡ଼ିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା, ଯେଉଁଠି ପୂର୍ବବିନ୍ଦୁ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ମୂଲ୍ୟ ମିଳିବ । ଏଣୁ କୌଣସି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ z ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । z ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ନଥିବାରୁ, ଆମେ ଏହା ଗ୍ରହଣ କରିବା ଯେ ଏହି ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ ।



ଚିତ୍ର 6.25

ଉଦାହରଣ 6.19 ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କର ।

$z = 2x_1 - 10\,x_2$ ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ଦତ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ

$x_1 - x_2 \geq 0$

$x_1 - 5x_2 \leq -5$

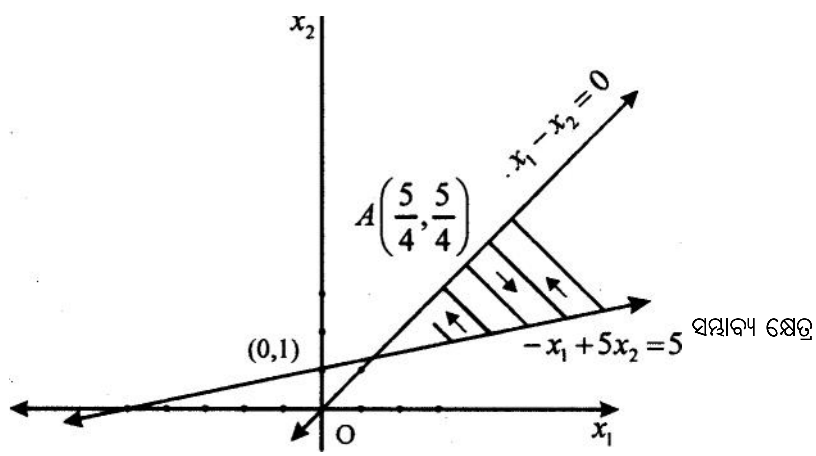
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମେ ଆମେ ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧର ରେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ।

$x_1 - x_2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 - x_1 \leq 0$

$x_1 - 5x_2 \leq -5 \Rightarrow \quad 5x_2 - x_1 \geq 5$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \Rightarrow \quad x_1 - x_2 = 0$



ଚିତ୍ର **6.26**

ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶ ହେଉଛି ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର ।

ଏଠାରେ, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅସୀମ । କିନ୍ତୁ ଚିତ୍ର 6.26 ରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $x_1 - x_2 = 0$ ଓ $-x_1 + 5x_2 = 5$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ଠାରେ, ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ପ୍ରାପ୍ତ କରେ । ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $x_1 = x_2 = \frac{5}{4}$ ।

ଏଣୁ, ଯେତେବେଳେ $x_1 = \frac{5}{4}$, $x_2 = \frac{5}{4}$, ସେତେବେଳେ z ର ମାନ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ଏବଂ z ର

ନ୍ୟୂନତମ ମାନ $= 2 \times \frac{5}{4} - 10 \times \frac{5}{4} = -10$ ଅଟେ ।

ଟୀକା : ଆମେ ଯଦି ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ z ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ପାଇବାକୁ ଚାହୁଁ, ତେବେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତାହା ମିଳିବ ନାହିଁ, କାରଣ ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଗୋଟିଏ ପାଖରେ କୌଣସି ସୀମାରେଖା ନାହିଁ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.4

ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସମାଧାନ କର ।

1. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧକ ମଧ୍ୟରେ, $z = 3x_1 + 4x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $x_1 + x_2 \leq 40$

   $x_1 + 2x_2 \leq 60$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ $z = 2x_1 + 3x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $x_1 + x_2 \leq 400$

   $2x_1 + x_2 \leq 600$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 60\,x_1 + 40\,x_2$ ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $3x_1 + x_2 \geq 24$

   $x_1 + x_2 \geq 16$

   $x_1 + 3x_2 \geq 24$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

4. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 20\,x_1 + 30\,x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $x_1 + x_2 \leq 12$

   $5x_1 + 2x_2 \leq 50$

   $x_1 + 3x_2 \leq 30$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

5. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ $z = 50\,x_1 + 15\,x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $5x_1 + x_2 \leq 100$

   $x_1 + x_2 \leq 60$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

6. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ $z = 4000\,x_1 + 7500\,x_2$ ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $4x_1 + 3x_2 \geq 40$

   $2x_1 + 3x_2 \geq 8$

   $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଯେଉଁ ଉକ୍ତିରେ $<, >, \leq, \geq$ ଭଳି ଚିହ୍ନ ଥାଏ ତାହାକୁ ଅସମୀକରଣ କହନ୍ତି ।
- $ax + by + c = 0$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖା xy ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ଯାହା $ax + by + c \geq 0$ ଏବଂ $ax + by + c \leq 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇଥାଏ ।
- ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ଅର୍ଥ, ସମସ୍ତ କ୍ରମିକ ଯୋଡ଼ି (x, y) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା, ଯାହା ଦତ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।
- ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ଏକ କୌଶଳ ଯାହାକୁ ଗଣିତଜ୍ଞମାନେ ଇଷ୍ଟତମ ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଉପଯୋଗ କରନ୍ତି ।

- ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚଳରାଶିମାନଙ୍କର ମାନର ଏକ ସେଟ୍, ଯାହା ଦତ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ଓ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପ୍ରତିବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ, ତାହାକୁ **ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ** କହନ୍ତି ।
- ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଏକ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ସମାଧାନ, ଯାହା ଏହାର ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନକୁ ଇଷ୍ଟତମ ମାନ ପ୍ରଦାନ କରେ ତାହାକୁ ଉକ୍ତ ସମସ୍ୟାର **ଇଷ୍ଟତମ ସମାଧାନ** କହନ୍ତି ।
- ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଇଷ୍ଟତମ ସମାଧାନ, ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଏକ ଶୀର୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ ।
- ଯଦି ଏକ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାର ଏକାଧିକ ସମାଧାନ ଥାଏ, ଏମାନଙ୍କମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ୟୂନ ଗୋଟିଏ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ । ମାତ୍ର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳନର ମାନ ସମାନ ରହେ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କର :

1. $x \geq -2$ 2. $y \leq 2$ 3. $x < 3$ 4. $y \geq -3$

5. $5 - 3y \geq -4$ 6. $2x - 5 \leq 3$, 7. $3x - 2y \leq 12$ 8. $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} \geq 1$

9. $2x - 3y \geq 0$ 10. $x + 2y \leq 0$

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦୁଇ ଚଳ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ଅସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟରେ ସମାଧାନ କର ।

11. $-1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 4$ 12. $2x + 3y \leq 6,\ 3x + 2y \leq 6$

13. $6x + 5y \leq 150$,
$x + 4y \leq 80$
$x \leq 15,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

14. $3x + 2y \leq 24,\ x + 2y \leq 16$
$x + y \leq 10,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

15. $x + y \geq 3,\quad 7x + 6y \leq 42$
$x \leq 5,\quad y \leq 4$
$x \geq 0,\quad y \geq 0$

16. ଏକ ବେପାରୀ ପାଖରେ ଧାନ ଓ ଗହମ କିଣିବା ପାଇଁ ମାତ୍ର 1500 ଟଙ୍କା ଅଛି । ଏକ ବସ୍ତା ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ 150 ଟଙ୍କା ଓ ଏକ ବସ୍ତା ଗହମର ଦାମ୍ 120 ଟଙ୍କା । ତାଙ୍କ ପାଖରେ କେବଳ 10 ବସ୍ତା ରଖିବା ପାଇଁ ସ୍ଥାନ ଅଛି । ଯଦି ବେପାରୀ ଜଣକ ଏକ ବସ୍ତା ଧାନ ଓ ଏକ ବସ୍ତା ଗହମରେ ଯଥାକ୍ରମେ 11 ଟଙ୍କା ଓ 8 ଟଙ୍କା ଲାଭ ପାଆନ୍ତି, ତେବେ ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ପ୍ରଶ୍ନଟିକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

17. ଏକ ବେପାରୀ ପାଖରେ 6000 ଟଙ୍କା ଅଛି । ବେପାର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ ସେ ଗାଈ ଓ ମଇଁଷି କିଣିବାକୁ ଚାହାଁନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ଗାଈର ମୂଲ୍ୟ 900 ଟଙ୍କା ଓ ଗୋଟିଏ ମଇଁଷିର ମୂଲ୍ୟ 1200 ଟଙ୍କା । ଲୋକ ଜଣକ ସପ୍ତାହକୁ 40 କ୍ୟୁଣ୍ଟାଲ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗୋଖାଦ୍ୟ ଏକାଠି ରଖିପାରନ୍ତି । ଗୋଟିଏ ଗାଈ ଦୈନିକ 10 ଲିଟର ଓ ଏକ ମଇଁଷି 20 ଲିଟର କ୍ଷୀର ଦିଏ । ଗାଈ କ୍ଷୀରରେ ଲିଟର ପ୍ରତି 50 ପଇସା ଓ ମଇଁଷି କ୍ଷୀରରେ ଲିଟର ପ୍ରତି 90 ପଇସା ଲାଭ ହୁଏ । ପ୍ରତି ସପ୍ତାହରେ ଗୋଟିଏ ଗାଈ ପ୍ରତି 1 କ୍ୟୁଣ୍ଟାଲ ଓ ଗୋଟିଏ ମଇଁଷି ପ୍ରତି 2 କ୍ୟୁଣ୍ଟାଲ ଗୋଖାଦ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇବା ପାଇଁ, ଉକ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତି ଜଣକ ଦ୍ୱାରା କିଣାଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାରର ପଶୁ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ପ୍ରସ୍ତୁତ କର । ଧରିନିଅ ଯେ ପଶୁମାନେ ଦେଉଥିବା ସମସ୍ତ କ୍ଷୀର ବିକ୍ରି କରାଯାଏ ।

18. ଏକ କାରଖାନାରେ ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ସାବୁନ ଦୁଇଟି ମେସିନ୍ A ଓ B ଦ୍ୱାରା ତିଆରି ହୁଏ । ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାରର ସାବୁନ ତିଆରି ପାଇଁ, ମେସିନ୍ A କୁ ଦୁଇ ମିନିଟ୍ ଓ ମେସିନ୍ B କୁ ତିନି ମିନିଟ୍ ସମୟ ଚଳାଯାଏ । ଅନ୍ୟପକ୍ଷେ ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରକାରର ସାବୁନ ତିଆରି ପାଇଁ ମେସିନ A କୁ 3 ମିନିଟ୍ ଓ ମେସିନ୍ B କୁ 5 ମିନିଟ୍ ସମୟ ଚଳାଯାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ମେସିନ୍ ଦୈନିକ ସର୍ବାଧିକ 8 ଘଣ୍ଟା ଚାଲିପାରେ । ଦୁଇ ପ୍ରକାରର ସାବୁନ ଯଥାକ୍ରମେ 25 ପଇସା ଓ 50 ପଇସା ଲାଭରେ ବିକ୍ରି କରାଯାଏ । ଧରିନିଆଯାଉ ଯେ, ନିର୍ମାତା ସମସ୍ତ ସାବୁନ ବିକ୍ରି କରନ୍ତି । କାରଖାନାରେ ପ୍ରତିଦିନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ସାବୁନରୁ କେତୋଟି ଲେଖାଏଁ ତିଆରି କରାଯିବ ଯେପରିକି ଲାଭ ମିଳିବ ? ପ୍ରଶ୍ନଟିକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟାରେ ପରିଣତ କର ।

19. ଦୁଇଟି ଅଣରଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବାଧିକ ହେବ ଯଦି ସେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 4 ଏବଂ ପ୍ରଥମ ସଂଖ୍ୟାର 3 ଗୁଣ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 9 ସହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ ସାନ ହୋଇଥାଏ । ଏହି ସମସ୍ୟାକୁ ଲିନିୟର ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ସୂତ୍ରବଦ୍ଧ କର ।

20. ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଖାଦ୍ୟ E ଓ F ରେ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ B ମିଳେ । E ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକକରେ 2 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ 3 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ B ଅଛି । F ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକକରେ 4 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ 2 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ B ଅଛି । E ଓ F ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଖାଦ୍ୟର ଏକକ ପ୍ରତି ମୂଲ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ ଟ.5.00 ଓ ଟ.2.50 ଅଟେ । ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ଲାଗି ଦୈନିକ 40 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ 50 ଏକକ ଭିଟାମିନ୍ B ର ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଥାଏ । ଧରିନିଆଯାଉ ଯେ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ଲାଗି ଉଭୟ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ B ର ଦୈନିକ ସର୍ବନିମ୍ନ ଆବଶ୍ୟକତାଠାରୁ ଅଧିକ ଦେହପାଇଁ କ୍ଷତିକାରକ ନୁହଁ । ସର୍ବନିମ୍ନ ମୂଲ୍ୟରେ, ଖାଦ୍ୟ E ଓ F ର ଉପଯୁକ୍ତ ମିଶ୍ରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଥିରେ ଭିଟାମିନ୍ A ଓ B ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦିନର ସର୍ବନିମ୍ନ ଆବଶ୍ୟକତା ପୂରଣ ହେବ । ଏହାକୁ ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ସମସ୍ୟା ରୂପେ ଲେଖ ।

21. ଜଣେ ବେପାରୀ ପାଖରେ ଚାଉଳ ଓ ଗହମ କିଣିବା ପାଇଁ 1500 ଟଙ୍କା ଅଛି । ଏକ ବସ୍ତା ଚାଉଳର ମୂଲ୍ୟ 180 ଟଙ୍କା ଏବଂ ଏକ ବସ୍ତା ଗହମର ମୂଲ୍ୟ 120 ଟଙ୍କା । ତାଙ୍କ ପାଖରେ କେବଳ 10 ବସ୍ତା ରଖିବା ପାଇଁ ସ୍ଥାନ ଉପଲବ୍ଧ । ବେପାରୀ ଜଣକ ପ୍ରତି ଚାଉଳ ବସ୍ତାରେ 11 ଟଙ୍କା ଓ ପ୍ରତି ଗହମ ବସ୍ତାରେ 8 ଟଙ୍କା ଲାଭ ପାଆନ୍ତି । ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇଁ ତାଙ୍କର ଟଙ୍କାକୁ ସେ କିପରି ଖର୍ଚ୍ଚ କରିବେ ?

22. ଏକ ମେସିନ୍ ଦୁଇଟି ବସ୍ତୁ A ବା B ଉତ୍ପାଦନ କରେ । A ର ଉତ୍ପାଦନ ପାଇଁ 2 ଏକକ ରାସାୟନିକ ଏବଂ 1 ଏକକ ଯୌଗିକ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ B ର ଉତ୍ପାଦନ ପାଇଁ 1 ଏକକ ରାସାୟନିକ ଏବଂ 2 ଏକକ ଯୌଗିକ ଆବଶ୍ୟକ । କେବଳ 800 ଏକକ ରାସାୟନିକ ଓ 1000 ଏକକ ଯୌଗିକ ଉପଲବ୍ଧ । A ଓ B ର ଏକକ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ 30 ଟଙ୍କା ଓ 20 ଟଙ୍କା ଲାଭ ହୁଏ । ମୋଟ୍ ଲାଭକୁ ସର୍ବାଧିକ କରିବା ପାଇଁ, ଏକକ ମାନଙ୍କର ଇଷ୍ଟତମ ଆବଣ୍ଟନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

23. ଗ୍ରାଫ୍ ଅଙ୍କନ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 25x_1 + 20x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$3x_1 + 6x_2 \leq 50$

$x_1 + 2x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(b) ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 9x_1 + 10x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$11x_1 + 9x_2 \leq 9900$

$4x_1 + 12x_2 \leq 8400$

$3x_1 + 8x_2 \leq 4800$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

(c) ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 22x_1 + 18x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$x_1 + x_2 \leq 20$

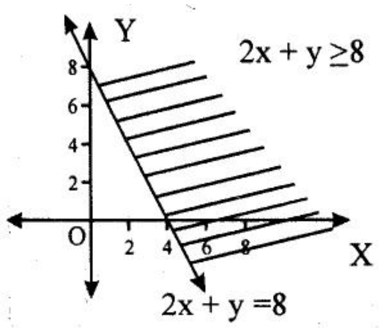
$3x_1 + 2x_2 \leq 48$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

ଉତ୍ତର ମାଳା

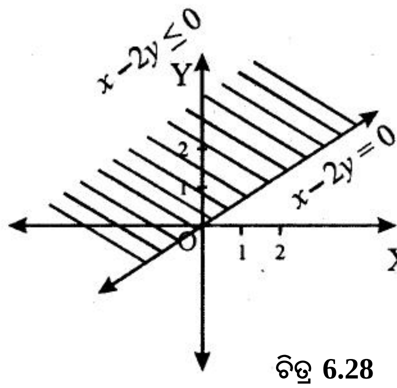
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.1

1.



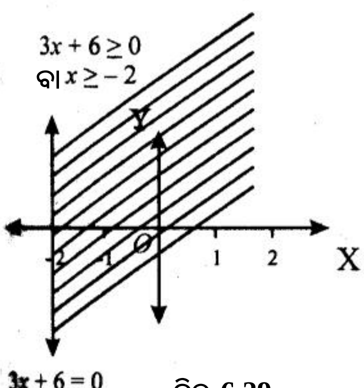
ଚିତ୍ର **6.27**

2.



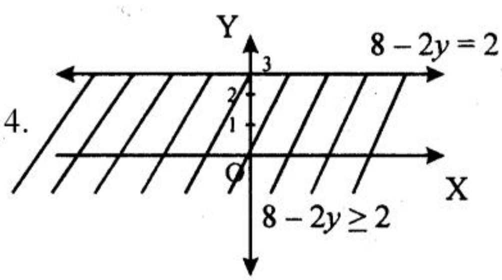
ଚିତ୍ର **6.28**

3.



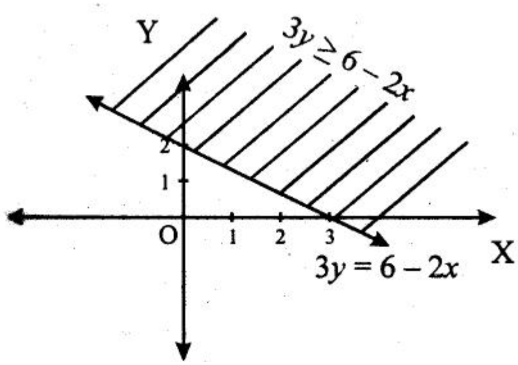
ଚିତ୍ର **6.29**

4.



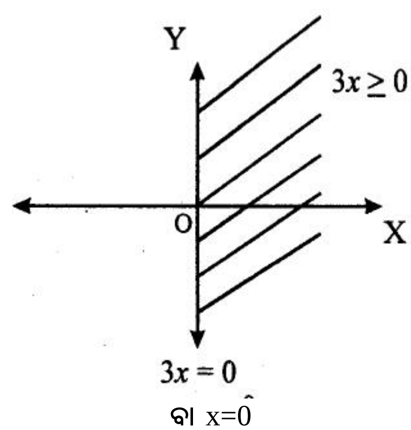
ଚିତ୍ର **6.30**

5.



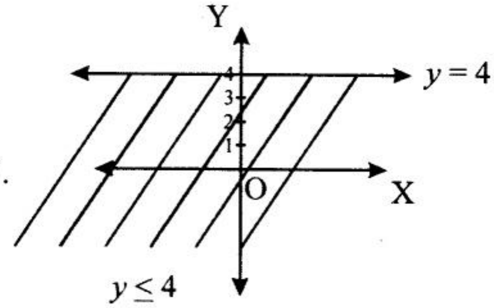
ଚିତ୍ର **6.31**

6.



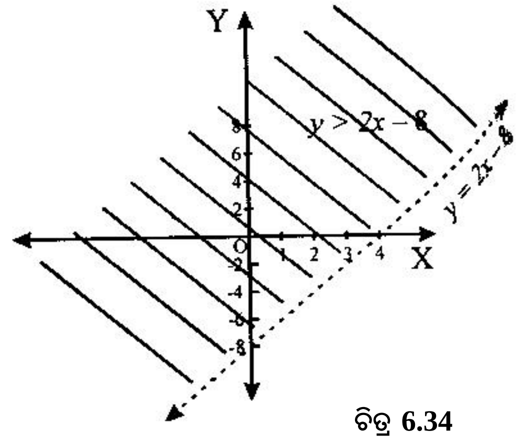
ଚିତ୍ର **6.32**

7.



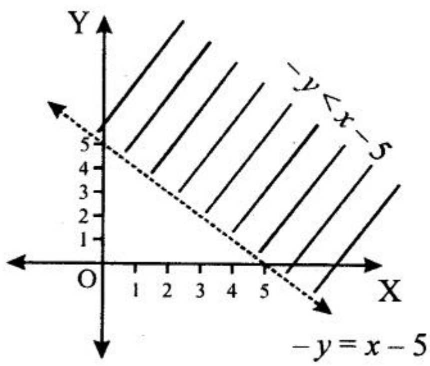
ଚିତ୍ର **6.33**

8.



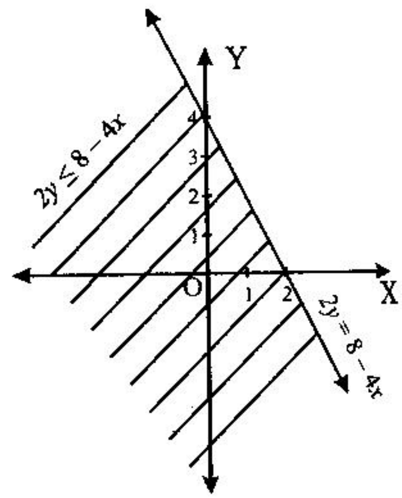
ଚିତ୍ର **6.34**

9.



ଚିତ୍ର **6.35**

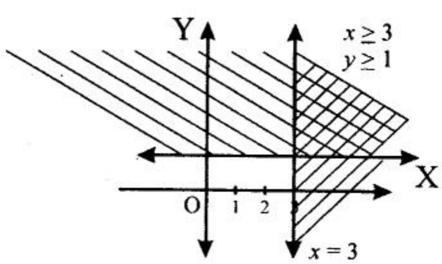
10.



ଚିତ୍ର **6.36**

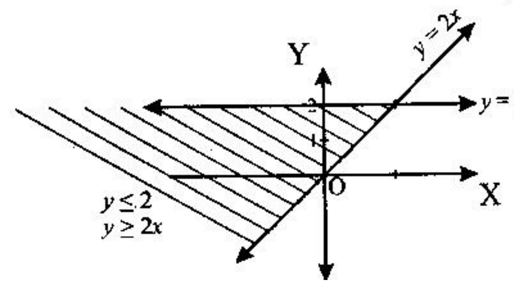
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.2

1.



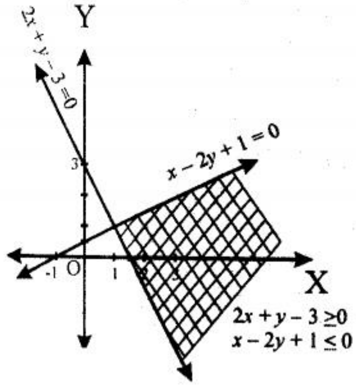
ଚିତ୍ର **6.37**

2.



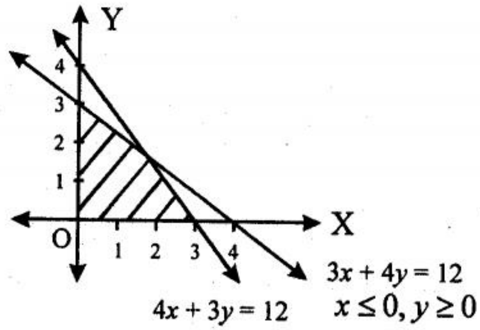
ଚିତ୍ର **6.38**

3.



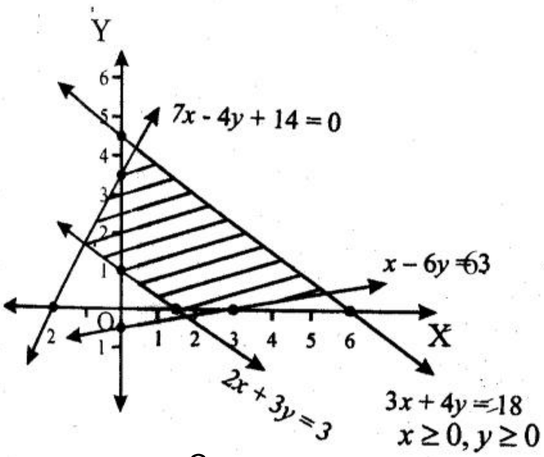
ଚିତ୍ର 6.39

4.

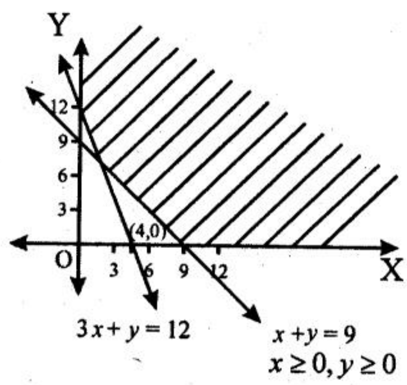


ଚିତ୍ର 6.40

5.

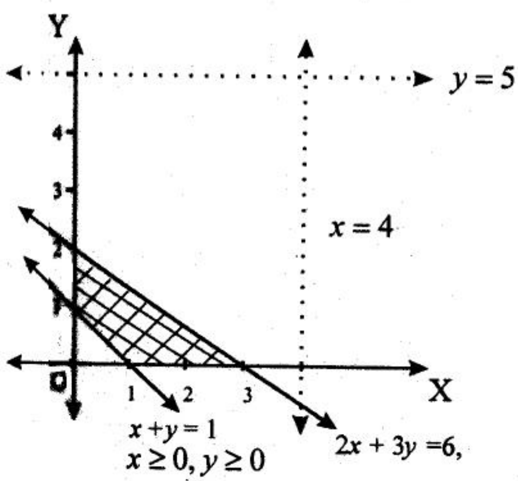


ଚିତ୍ର 6.41



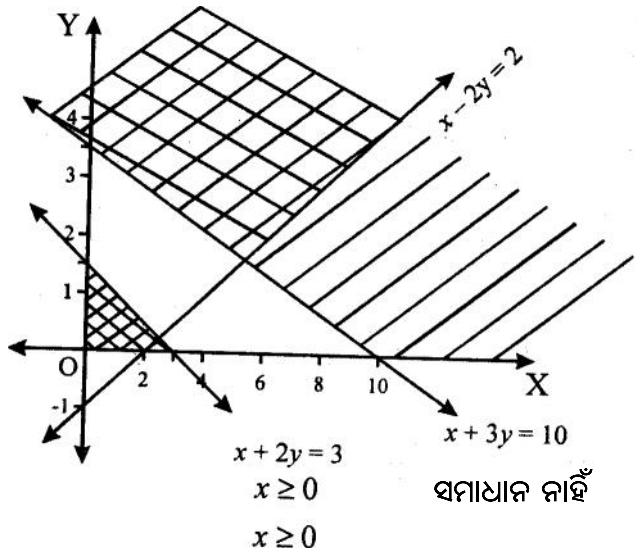
ଚିତ୍ର 6.42

7.



ଚିତ୍ର 6.43

8.



ଚିତ୍ର **6.44**

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.3

1. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 3x_1 + 8x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   $3x_1 + 4x_2 \leq 18$

   $4x_1 + 5x_2 \leq 21$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 50x_1 - 15x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   $5x_1 + x_2 \leq 100$

   $x_1 + x_2 \leq 60$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 4000x_1 + 7500x_2$ ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $4x_1 + 3x_2 \geq 40$

   $2x_1 + 3x_2 \geq 8$

   $x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$

4. ନିମ୍ନ ପ୍ରତିବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରେ, $z = 5x_1 + 4x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

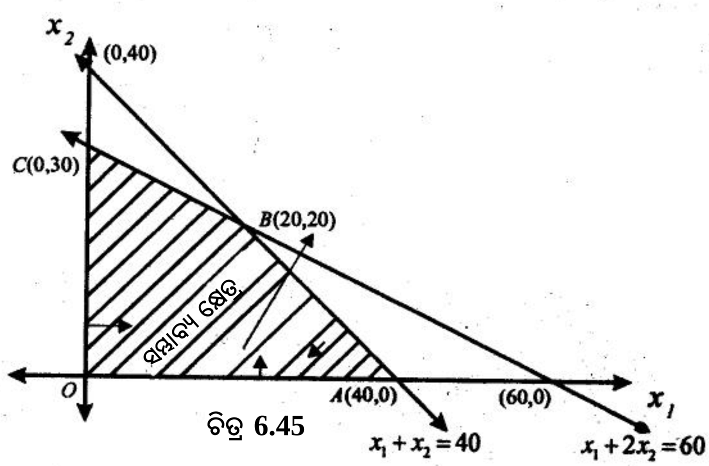
$1.5x_1 + 2.5x_2 \le 80$

$2x_1 + 1.5x_2 \le 70$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 6.4

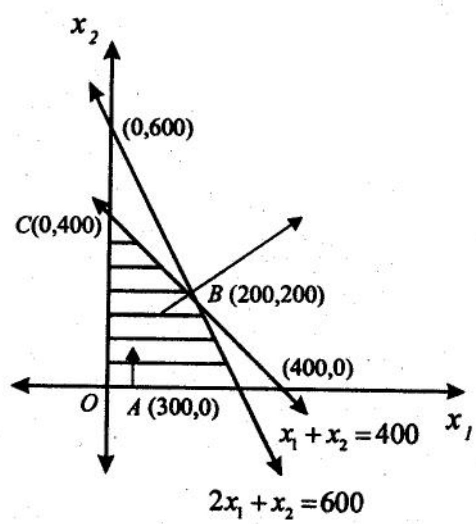
1.



ଚିତ୍ର 6.45

B (20, 20) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 140

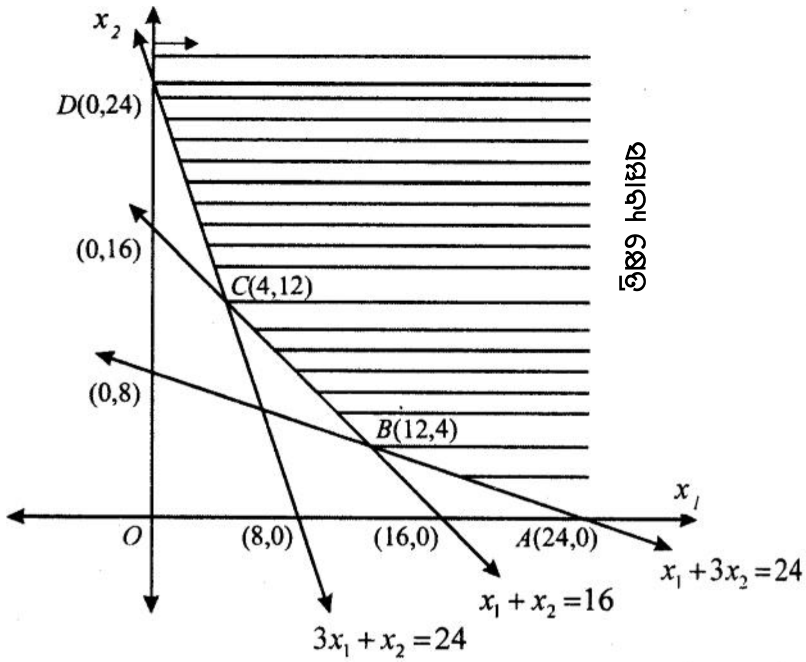
2.



ଚିତ୍ର 6.46

C (0, 400) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 1200

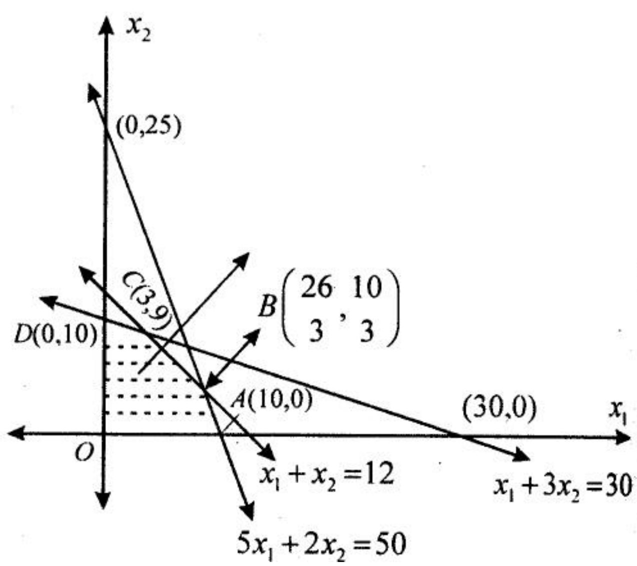
3.



ଚିତ୍ର **6.47**

C (4, 12) ରେ, ସର୍ବନିମ୍ନ z = 720, x_1 = 4, x_2 = 12

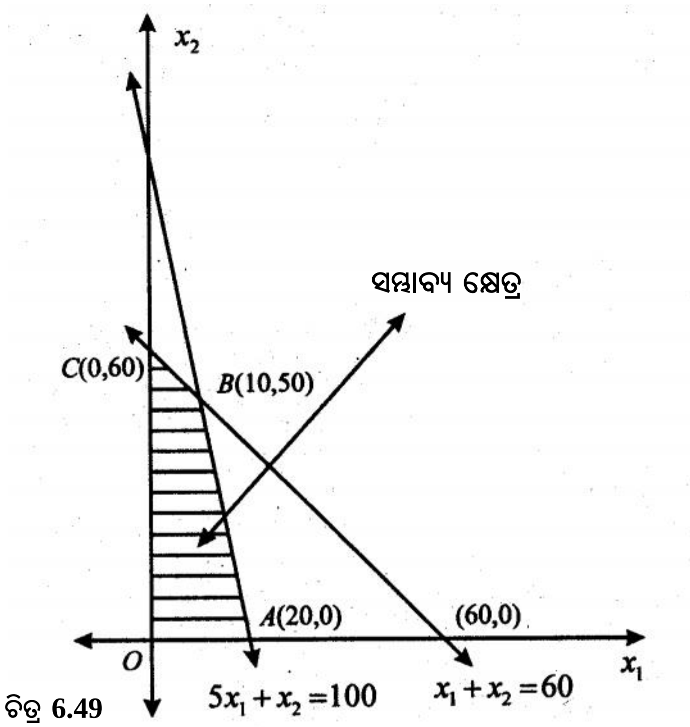
4.



ଚିତ୍ର **6.48**

C (3, 9) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 330, x_1 = 3, x_2 = 9

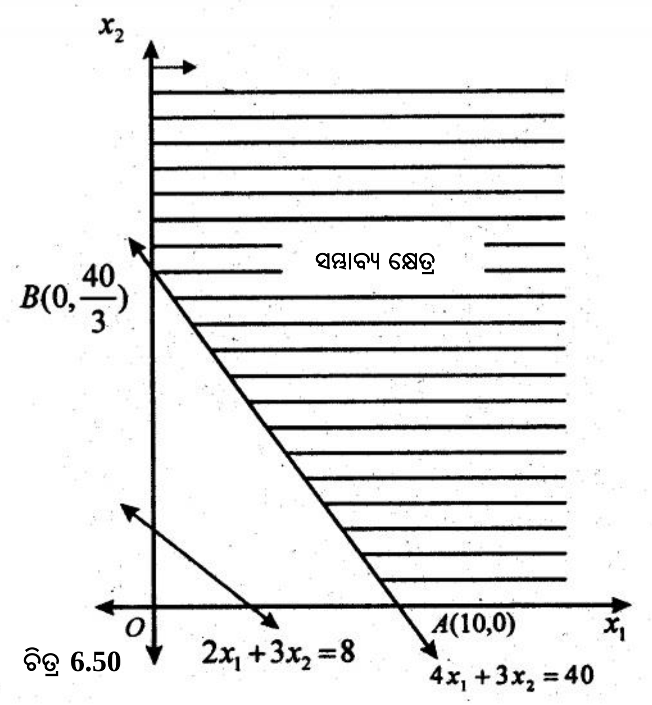
5.



ଚିତ୍ର 6.49

B (10, 50) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 1250, $x_1 = 10$, $x_2 = 50$

6.



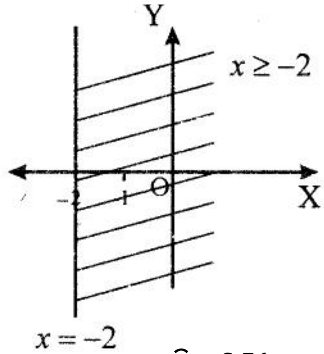
ଚିତ୍ର 6.50

A (10, 0) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 40,000, $x_1 = 10$, $x_2 = 0$

ଟିପ୍ପଣୀ

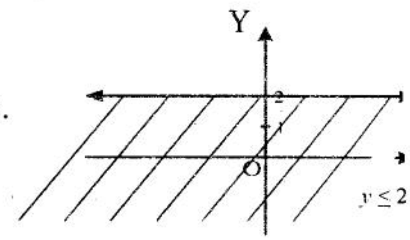
ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1.



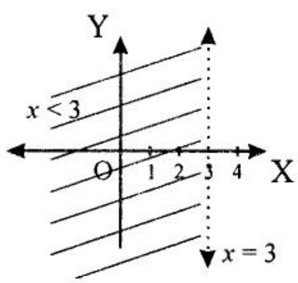
ଚିତ୍ର 6.51

2.



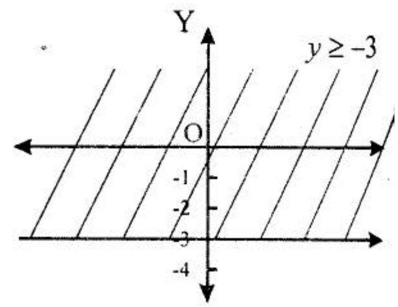
ଚିତ୍ର 6.52

3.



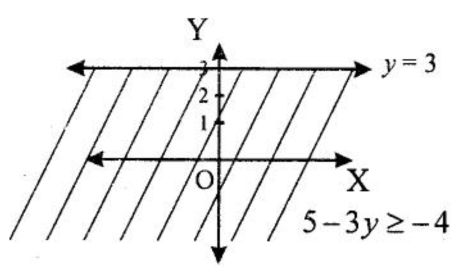
ଚିତ୍ର 6.53

4.



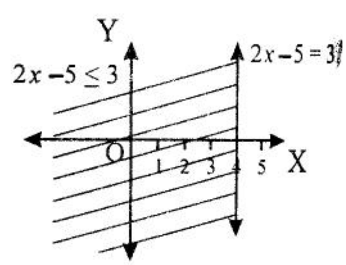
ଚିତ୍ର 6.54

5.



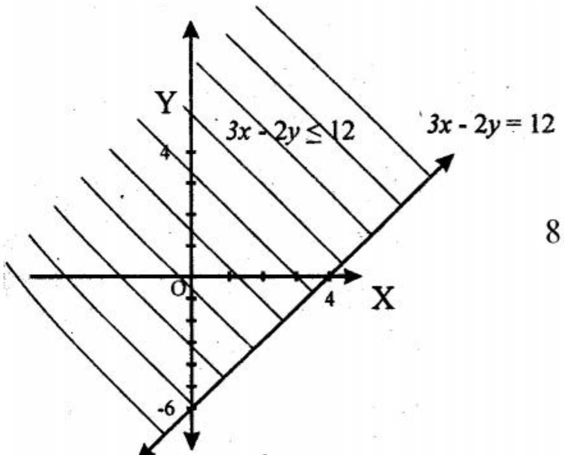
ଚିତ୍ର 6.55

6.



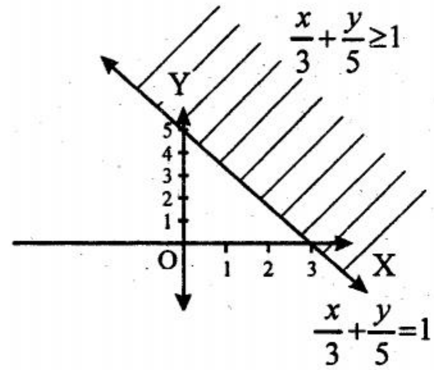
ଚିତ୍ର 6.56

7.



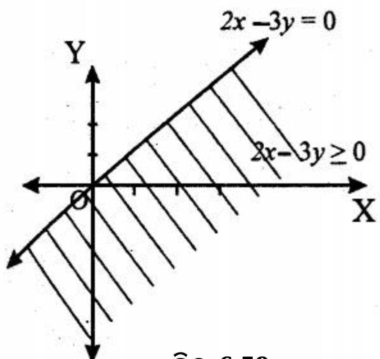
ଚିତ୍ର **6.57**

8.



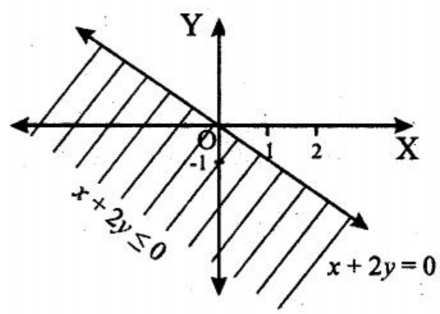
ଚିତ୍ର **6.58**

9.



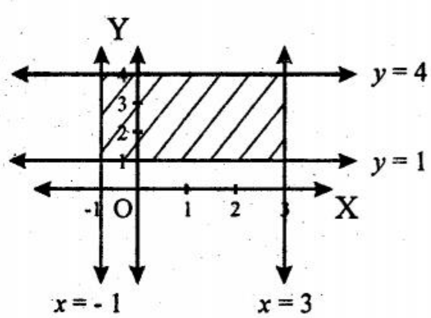
ଚିତ୍ର **6.59**

10.



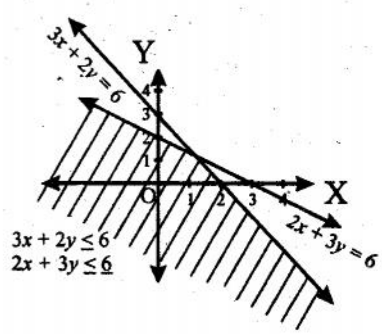
ଚିତ୍ର **6.60**

11.



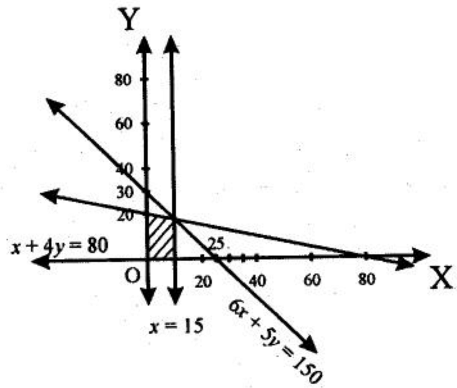
ଚିତ୍ର **6.61**

12.



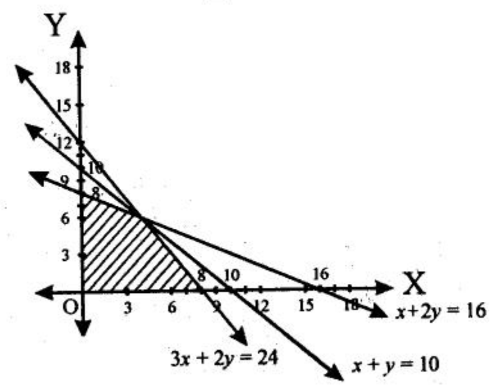
ଚିତ୍ର **6.62**

13.



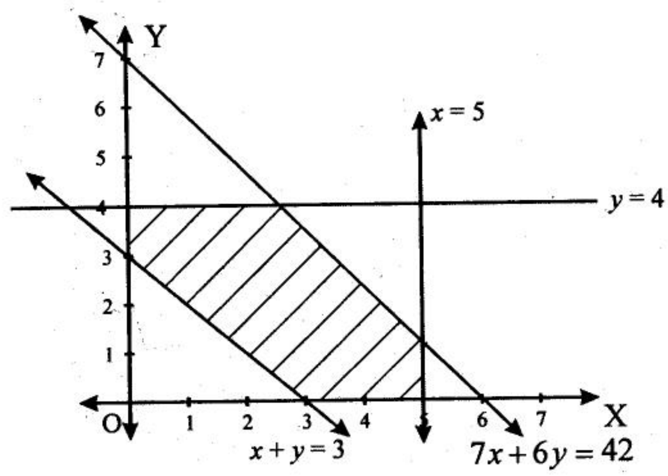
ଚିତ୍ର 6.63

14.



ଚିତ୍ର 6.64

15.



ଚିତ୍ର 6.65

16. ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ, $z = 11x_1 + 8x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$5x_1 + 4x_2 \leq 50$

$x_1 + x_2 \leq 10$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

17. ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ, $z = 35x_1 + 126\, x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$3x_1 + 4x_2 \leq 20$

$7x_1 + 14\, x_2 \leq 40$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

18. ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ, $z = 25x_1 + 50\, x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$2x_1 + 3x_2 \leq 480$

$3x_1 + 5x_2 \leq 480$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

19. ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ, $z = x_1 + x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$x_1 - x_2 \geq 4$

$3x_1 + x_2 \leq 9$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

20. ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟରେ, $z = 5x_1 + 2.5x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$x_1 + 2x_2 \geq 20$

$3x_1 + 2x_2 \geq 50$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

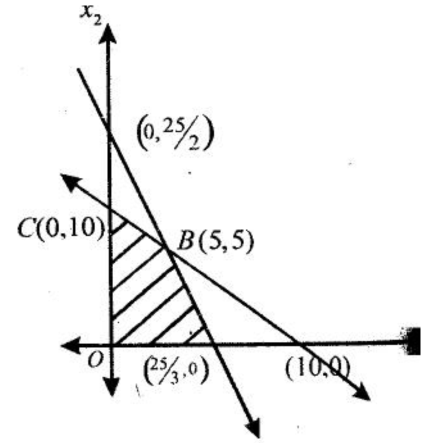
21. ମନେକରାଯାଉ ନିମ୍ନ ପରିମାଣର ଚାଉଳ ଓ ଗହମ କିଣିବାକୁ ହେବ । x_1= ଚାଉଳର ବସ୍ତାସଂଖ୍ୟା, x_2= ଗହମର ବସ୍ତାସଂଖ୍ୟା । $z = 11x_1 + 8x_2$ ସର୍ବାଧିକ

ଦତ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ

$3x_1 + 2x_2 \le 25$

$x_1 + x_2 \le 10$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$



ଚିତ୍ର **6.66**

B (5, 5) ରେ, ସର୍ବାଧିକ $z = 95$, $x_1 = x_2 = 5$

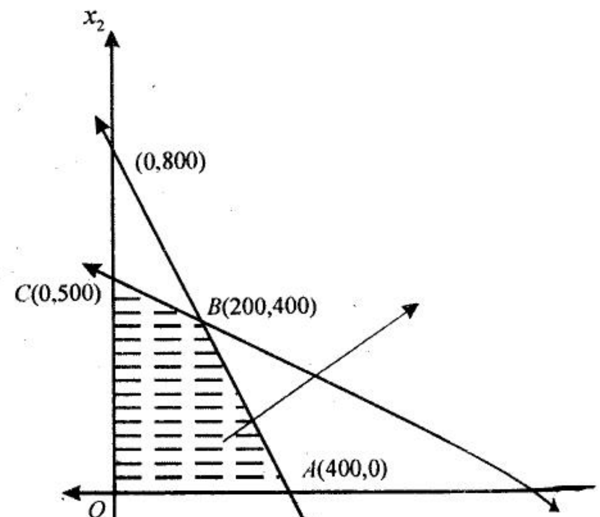
22. $z = 30x_1 + 20x_2$ ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ପ୍ରତିବନ୍ଧ

$2x_1 + x_2 \le 800$

$x_1 + 2x_2 \le 1000$

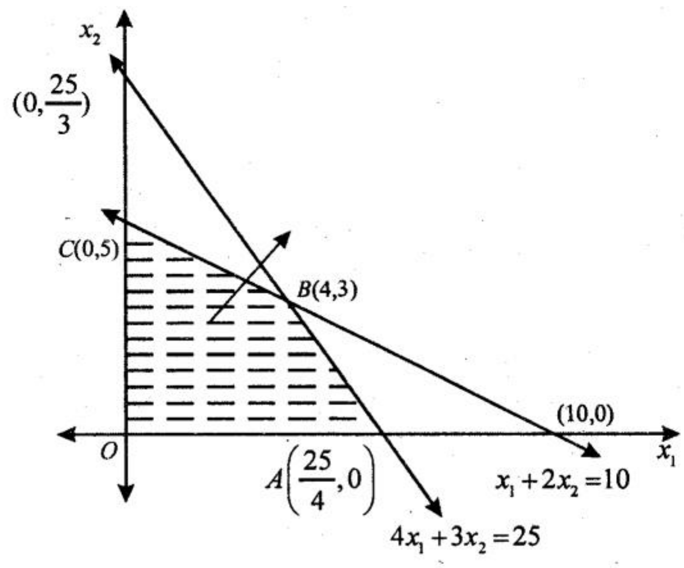
$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$



ଚିତ୍ର **6.67**

B (200, 400) ରେ, ସର୍ବାଧିକ $z = 14000$, $x_1 = 200$, $x_2 = 400$

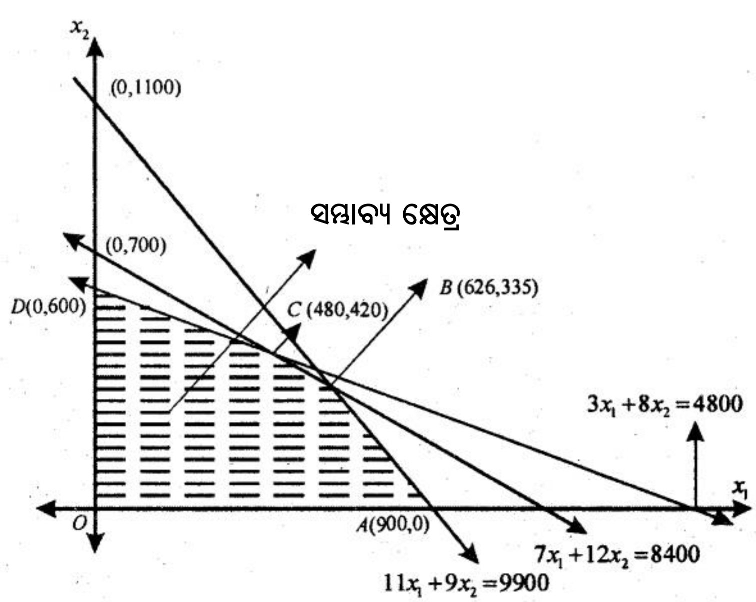
23. (a)



ଚିତ୍ର **6.68**

B (4, 3) ରେ, ସର୍ବାଧିକ z = 160, x_1= 4, x_2= 3

(b)

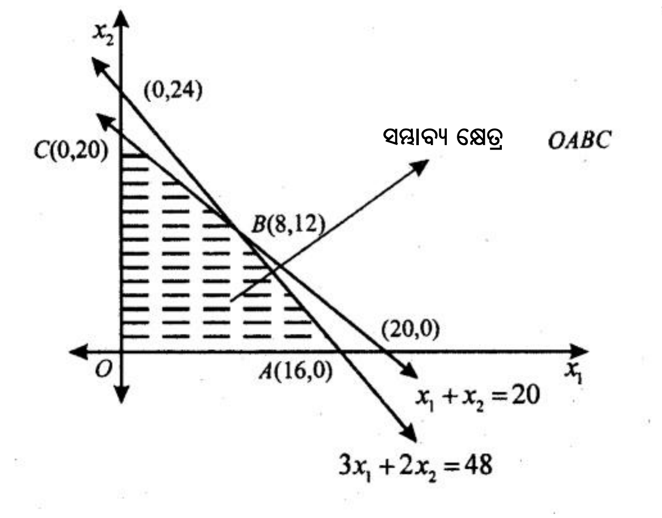


ଚିତ୍ର **6.69**

A (900, 0), D (0, 600) B (626, 335), O (0, 0) ଓ C (480, 420)

B (625, 335) ରେ, ସର୍ବାଧିକ ମାନ z = 8984, x_1= 626, x_2= 335

(c)



ଚିତ୍ର **6.70**

B (8, 12) ରେ, ସର୍ବାଧିକ ମାନ z = 392, x_1= 8, x_2= 12