୪

ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ

Inverse of a Matrix and its application

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣର ବିଚାର କରିବା :

ଅଭିନାଶ ଟ 120 ଦେଇ 2ଟି ପେନ୍ ଓ 5ଟି ଖାତା କିଣିଲେ ଯେତେବେଳେ କି ଶାନ୍ତନୁ ଟ100 ଦେଇ 4ଟି ପେନ୍ ଓ 3ଟି ଖାତା କିଣିଲେ । ଆମେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ବ୍ୟବହାର କରି ଗୋଟିଏ ପେନ୍ ଓ ଗୋଟିଏ ଖାତାର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ମନେକର 1ଗୋଟି ପେନ୍‌ର ଦାମ୍ xଟଙ୍କା ଓ 1ଗୋଟି ଖାତାର ଦାମ୍ yଟଙ୍କା । ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$$

ଏହାକୁ ଆମେ ମଧ୍ୟ $AX = B$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

ଯେତେବେଳେ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 120 \\ 100 \end{bmatrix}$

ଆମର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

X ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A^{-1} ଆବଶ୍ୟକ କରୁ ଯେପରିକି $X = A^{-1}B$

A^{-1} ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ A ର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ କୁହାଯାଏ ।

ଏଇ ଅଧ୍ୟାୟରେ, ଆମେ ଏପରି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କରିବା । ଆମେ ମଧ୍ୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି କିପରି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର, ସମାଧାନ କରାଯାଏ ତାହା ଶିଖିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟଟି ଅଧ୍ୟୟନ କଲା ପରେ ତୁମେ

- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବା;
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବ;
- ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ଏବଂ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ସହ ଏହାକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ;
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ (ଯଦି ଥାଏ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବ;
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ $AX = B$ରେ ପରିପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବ ଏବଂ
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତିରେ ସମାଧାନ କରିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧାରଣା
- ମାଟ୍ରିକ୍ସର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ
- ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହିତ ଏହାର ଶୂନ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ
- ମାଟ୍ରିକସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ (Transpose)
- ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଏକ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ

5.1 ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (Determinant of a Matrix)

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛନ୍ତି ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ।

କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ହେଉ;

ଏହାର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ହେବ $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ । ଏହା $|A|$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ଅନୁରୂପ ଭାବରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ହେବ

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ କୁହାଯିବ, ଯଦି ଏହାର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଶୂନ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍, $|A| = 0$
ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ (Non – singular) କୁହାଯିବ, ଯଦି ଏହାର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଅଣଶୂନ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $|A| \neq 0$

ଉଦାହରଣ 5.1 ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ କିମ୍ବା ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ଦର୍ଶାଅ ଯେଉଁଠି

(a) $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : (a) ଏଠାରେ $|A| = \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-6)(2) - (4)(-3)$

$= -12 + 12 = 0$

ଅତଏବ, ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଏକ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

(b) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$

$= -7 + 4 - 3$

$= -6 \neq 0$

$\therefore$ ଏହା ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ।

ଉଦାହରଣ 5.2 x ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & -3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ x & 2 \end{vmatrix}$$

$= 1\,(-6-2) + 2\,(-3-x) + 3\,(2-2x)$

$= -8 - 6 - 2x + 6 - 6x$

$= -8 - 8x$

$\because$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ସିଙ୍ଗୁଲାର୍, ଆମେ ପାଇବା

$|A| = -8 - 8x = 0$

କିମ୍ବା $x = -1$

ଏଣୁ xର ନିର୍ଣ୍ଣେୟମାନ –1 ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 5.3 ଦତ୍ତ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $|A| = |A'|$

ଯେଉଁଠି A′ ହେଉଛି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

ଏଣୁ $A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16$ ... (1)

ଏବଂ $|A'| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 - 3 \times 6 = -16$ ... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇବା, $|A| = |A'|$

5.2 ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉପାଦକ (Minors and Cofactors of the elements of square Matrix)

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ କୁ ବିଚାର କର ।

ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବାଦ୍ ଦେବାପରେ କଲେ ଆମେ ପାଉଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକଟିକୁ a_{ij} ର ମାଇନର୍ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ M_{ij} ଦ୍ଵାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

a_{ij} ର ସହଉତ୍ପାଦକ C_{ij} କୁ $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ ଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, $M_{23} = a_{23}$ ର ମାଇନର୍ $= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ଏବଂ $C_{23} = a_{23}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ

$= (-1)^{2+3} M_{23}$

$= (-1)^{5} M_{23}$

$= -M_{23} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ଉଦାହରଣ 5.4 ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 30 = -24$

M_{11}(2ର ମାଇନର୍) $= 3$; $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 M_{11} = 3$

M_{12}(2ର ମାଇନର୍) $= 6$; $C_{12}\ (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3 M_{12} = -6$

M_{21}(6ର ମାଇନର୍) $= 5$; $C_{21}\ (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3 M_{21} = -5$

M_{22}(3ର ମାଇନର୍) $= 2$; $C_{22}\ (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 M_{22} = 2$

ଉଦାହରଣ 5.5

ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $M_{11} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17; C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 17$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14; C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -14$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 20 = -18; C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = -18$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3; C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -3$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (-3 - 24) = -27; C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = -27$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1 - 12) = -13; C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = 13$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = (-6 - 30) = -36; C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = -36$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = (2 - 12) = -10; C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = 10$$

ଏବଂ $M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-5 - 6 = -11; C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = -11$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.1

1. ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ କିମ୍ବା ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ସ୍ଥିର କର :

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$ (b) $Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

3. ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକର ମାଇନର୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

4.(a) ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସର 2ୟ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ମାଇନର୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) ମାଟ୍ରିକ୍ସ Aର 3ୟ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ମାଇନର୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

5. ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନର ସହ-ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$

6. (a) ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସର 2ୟ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସର 1ମ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -2 \\ -5 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

7. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$, ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(a) $|A| = |A'|$ ଏବଂ $|B| = |B'|$ (b) $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$

5.3 ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint)

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ ଏବଂ M_{ij} ଓ C_{ij} ଯଥାକ୍ରମେ a_{ij}ର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ, ତେବେ

$$M_{11} = |7| = 7;\ C_{11} = (-1)^{1+1}|7| = 7$$

$$M_{12} = |5| = 5;\ C_{12} = (-1)^{1+2}|5| = -5$$

$$M_{21} = |1| = 1;\ C_{21} = (-1)^{2+1}|1| = -1$$

$$M_{22} = |2| = 2;\ C_{22} = (-1)^{2+2}|2| = 2$$

Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ସେମାନଙ୍କର ସହଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ପାଇବା

$$B = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

ମାଟ୍ରିକ୍ସ Bର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍

$$B' = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \ldots..(2)$$

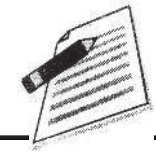
ଏଣୁ, ଏକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସହଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କୁ ଉପାଦାନ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜକୁ ଉକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) କୁହାଯାଏ ।

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ :

ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ Aର ସଖଣ୍ଡଜ (adj .A) ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ

(a) Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ଏଗୁଡ଼ିକର ସହ-ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ଥାପନ କରି ସହ-ଉତ୍ପାଦକର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର ।

(b) (a) ରେ ପ୍ରାପ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଉଦାହରଣ 5.6

$A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $|A| = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ । ମନେକର A_{ij} ହେଉଛି ଉପାଦାନ a_{ij} ର ସହଉପାଦକ ।

ତେବେ, $A_{11} = (-1)^{1+1}(-3) = -3;$ $\qquad A_{21} = (-1)^{2+1}(5) = -5$

$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2;$ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4$

A ର ସହଉପାଦକର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପାଇବା ପାଇଁ, ଏହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ସେମାନଙ୍କର ସହଉପାଦକ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ଥାପନ କରିପାଇବା

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} \ldots (1)$$

(1) ରେ ଥିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ହେଉଛି Adj A

ଏହିପରି, $\text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 5.7

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ ର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

ମନେକର A_{ij} ହେଉଛି $|A|$ ର ଉପାଦାନ a_{ij} ର ସହଉପାଦକ

ତେବେ, $A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4-2) = -6;$ $A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -(3-5) = 2$

$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-6-20) = -26;$ $A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(1-4) = 3$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\5 & -1\end{vmatrix} = (-1-10) = -11;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\5 & 2\end{vmatrix} = -(2+5) = -7$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 2\\4 & 1\end{vmatrix} = (-1-8) = -9;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\-3 & 1\end{vmatrix} = -(1+6) = -7$$

ଏବଂ $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & -1\\-3 & 4\end{vmatrix} = (4-3) = 1$

A ର ଉପାଦାଗୁଡ଼ିକୁ ସେମାନଙ୍କର ସହଉପ୍ାଦକ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ଥାପିତ କଲେ, ଆମେ ପାଉଥିବା ସହଉପ୍ାଦକର ମାଟ୍ରିକ୍ସଟି ହେବ

$$\begin{bmatrix}-6 & 2 & -26\\3 & -11 & -7\\-9 & -7 & 1\end{bmatrix} \text{ ଏଣୁ } \operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix}-6 & 3 & -9\\2 & -11 & -7\\-26 & -7 & 1\end{bmatrix}$$

ଯଦି n କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ A, ତେବେ $A(\operatorname{Adj} A) = (\operatorname{Adj} A)A = |A|\, I_n$ ଯେଉଁଠି I_n ହେଉଛି n କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ସତ୍ୟତା ପତିପାଦନ :

(1) $A = \begin{bmatrix}2 & 4\\-1 & 3\end{bmatrix}$ କୁ ବିଚାର କର

ତେବେ, $|A| = \begin{vmatrix}2 & 4\\-1 & 3\end{vmatrix}$ କିମ୍ବା, $|A| = 2 \times 3 - (-1) \times (4) = 10$

ଏଠାରେ, $A_{11} = 3;\ A_{12} = 1;\ A_{21} = -4$ ଏବଂ $A_{22} = 2$

ଏଣୁ, $\operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $A(\operatorname{Adj} A) = \begin{bmatrix}2 & 4\\-1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -4\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 0\\0 & 10\end{bmatrix} = 10\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = |A|I_2$

(2) $A = \begin{bmatrix}3 & 5 & 7\\2 & -3 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ କୁ ବିଚାର କର

ତେବେ, $|A| = 3(-6-1) - 5(4-1) + 7(2+3) = -1$

ଏଠାରେ, $A_{11} = -7;\ A_{12} = -3;\ A_{13} = 5$

$A_{21} = -3; A_{22} = -1; A_{23} = 2$

$A_{31} = 26; A_{32} = 11; A_{33} = -19$

ତେଣୁ, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $A(\text{Adj} A) = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3$$

$$(\text{Adj } A)A = \begin{bmatrix} -7 & -3 & 26 \\ -3 & -1 & 11 \\ 5 & 2 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3$$

ଟୀକା : ଯଦି A ଏକ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ଅର୍ଥାତ୍, $|A| = 0$, ତେବେ, $A(\text{Adj } A) = O$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & -i \\ i & i \end{bmatrix}$

   ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର

   $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = |A| I_2$

3. ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

$A\,(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = |A|I_3$ ଯେଉଁଠାରେ $A =$

(a) $\begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 0 & 5 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -4 & 11 & -1 \end{bmatrix}$

5.4 ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟୁତକ୍ରମ (Inverse of a Matrix)

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର

ଯଦି ସମ୍ଭବ ଅନ୍ୟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯେପରିକି $AB = BA = 1$

ଅର୍ଥାତ୍, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

କିମ୍ବା $\begin{bmatrix} ax+bu & ay+bv \\ cx+du & cy+dv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ତୁଳନା କଲେ, ପାଇବା

$ax + bu = 1 \quad ay + bv = 0$

$cx + du = 0 \quad cy + dv = 1$

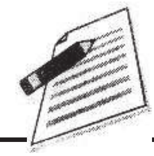
ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ପାଇବା

$$x = \frac{d}{ad-bc},\ y = \frac{-b}{ad-bc},\ u = \frac{-c}{ad-bc},$$

$$v = \frac{a}{ad-bc}$$

ଯେଉଁଠାରେ $ad - bc \neq 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$



ଏହିପରି, $B = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

କିମ୍ବା, $B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ଏହା ମଧ୍ୟ ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $BA = I$

ଆମେ ଉପରେ ଦେଖିଲୁ ଯେ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିଛି, ଯେପରି

$$B = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A \quad \dots (1)$$

ଉପରିସ୍ଥ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B କୁ Aର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ କୁହାଯାଏ ଏବଂ A^{-1} ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଏକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ, ଯଦି ଅନ୍ୟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B ସମ୍ଭବ ଯେପରିକି $AB = BA = I$, ତେବେ Bକୁ Aର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବା ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ କୁହାଯାଏ ।

ଆମେ ଏହାକୁ $B = A^{-1}$ ଭାବେ ଲେଖିଥାଉ ।

ଟୀକା : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, ଯଦି $ad - bc = 0$, ଅର୍ଥାତ୍, $|A| = 0$ ହୁଏ, (1) ର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ଏବଂ $B\ (=A^{-1})$କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ଏହି କାରଣରୁ ଆମେ Aକୁ ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପେ ନେଉ, ଫଳରେ Aର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ରହିବ । ତେଣୁ କେବଳ ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଛି । B ମଧ୍ୟ ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର ହେବ ଏବଂ $A = B^{-1}$

ଉଦାହରଣ 5.8 ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

ତେଣୁ $|A| = -12 - 10 = -22 \neq 0$

$\therefore$ A ହେଉଛି ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର । ଏହାର ଅର୍ଥ Aର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଅଛି ।

ଅର୍ଥାତ୍ A^{-1} ଅଛି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\text{Adj } A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}A = \frac{1}{-22}\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ଉଦାହରଣ 5.9 ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$ ର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 6 \\ 5 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

$\therefore |A| = 3(5-24) - 2(-5-30) - 2(4+5)$

$= 3(-19) - 2(-35) - 2(9)$

$= -57 + 70 - 18$

$= -5 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।

ମନେକର A_{ij} ହେଉଛି a_{ij} ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ ।

ତେବେ $A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 24 = -19$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-30) = 35$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 5 = 9$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(-10+8) = 2$

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = -15 + 10 = -5$

$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -(12-10) = -2$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -(18+2) = -20$$

ଏବଂ $A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5$

ସହଉତ୍ପାଦକର ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ $= \begin{bmatrix} -19 & 35 & 9 \\ 2 & -5 & -2 \\ 10 & -20 & -5 \end{bmatrix} \therefore \text{Adj}\,A = \begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \text{Adj } A = \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -19 & 2 & 10 \\ 35 & -5 & -20 \\ 9 & -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{19}{5} & \frac{-2}{5} & -2 \\ -7 & 1 & 4 \\ \frac{-9}{5} & \frac{2}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

ଟୀକା : $A^{-1}A = AA^{-1} = I_3$, ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ 5.10 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

(i) $(AB)^{-1}$ (ii) $B^{-1}A^{-1}$ (iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ସତ୍ୟ କି ?

ସମାଧାନ : (i) ଏଠାରେ, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2+0 & 1+0 \\ -4+0 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |AB| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -6 + 4 = -2 \neq 0;$$

ଏଣୁ, $(AB)^{-1}$ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ।

ଆସ ABକୁ C ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରିବା ।

ମନେକର C_{ij} ହେଉଛି $|C|$ର ଉପାଦାନ C_{ij}ର ସହଉତ୍ପାଦକ

ତେବେ, $C_{11} = (-1)^{1+1}(3) = 3$

$C_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$C_{12} = (-1)^{1+2}(-4) = 4$

$C_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$$\therefore \text{Adj (C)} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\text{Adj (C)} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = (AB)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) $B^{-1}A^{-1}$ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ, ପ୍ରଥମେ B^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \therefore |B| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2 \neq 0$

$\therefore$ B^{-1} ସମ୍ଭବ ।

ମନେକର B_{ij} ହେଉଛି $|B|$ର ଉପାଦାନ b_{ij}ର ସହଉତ୍ପାଦକ ।

ତେବେ, $B_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\quad B_{21} = (-1)^{2+1}(1) = -1$

$B_{12} = (-1)^{1+2}(0) = 0$ ଏବଂ $\quad B_{22} = (-1)^{2+2}(-2) = -2$

$$\therefore \text{Adj B} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

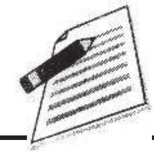
$$\therefore B^{-1} = \frac{1}{|B|}\text{Adj B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ତେଣୁ, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 0 = -1 \neq 0$

ତେଣୁ A^{-1} ସମ୍ଭବ ।

ମନେକର A_{ij} ହେଉଛି $|A|$ର ଉପାଦାନ a_{ij}ର ସହଉତ୍ପାଦକ ।

ତେବେ, $A_{11} = (-1)^{1+1}(-1) = -1$ $\quad A_{21} = (-1)^{2+1}(0) = 0$



$A_{12} = (-1)^{1+2}(2) = -2$ ଏବଂ $\qquad A_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$

$$\therefore \text{Adj A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj A} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

ଏଣୁ $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} - 1 & 0 + \frac{1}{2} \\ 0 - 2 & 0 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) (i) ଓ (ii) ର ପ୍ରାପ୍ତଫଳରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.3

1. ଯଦି ସମ୍ଭବ, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. ଯଦି ସମ୍ଭବ, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

(a) ଓ (b) ପାଇଁ, ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର : $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$

3. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

4. $(A')^{-1}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ହୁଏ ।

5. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b+c & c-a & b-a \\ c-b & c+a & a-b \\ b-c & a-c & a+b \end{bmatrix}$

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $AB\,A^{-1}$ ଏକ କର୍ଣ୍ଣ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

6. ଯଦି $\phi(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $[\phi(x)]^{-1} = \phi(-x)$

7. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A'A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$

8. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & \frac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $aA^{-1} = (a^2 + bc + 1)\,I - aA$

9. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A^{-1} = A^2$

10. ଯଦି $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A^{-1} = A'$

5.5 ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ (Solution of System of Linear Equations)

ନିମ୍ନଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେ ଦୁଇ କିମ୍ବା ତିନି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଶିଖିଛ (ସହ ସମୀକରଣ) । ଏହିପରି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନରେ ତୁମେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିମାନଙ୍କର ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କର । ଯଦି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ସଂଖ୍ୟା ଅଧିକ ହୁଏ, ତୁମେ ଏହି ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀର ଅସୁବିଧା ଅନୁଭବ କର ।

ଏହିପରି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ପାଇଁ, ତୁମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ, କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ମଧ୍ୟ ଶିଖିଛ । ଆମେ ଏବେ ଏକ ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରଣାଳୀ ଦର୍ଶାଇବା, ଯାହାକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନରେ ଏହାର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ସରଳତା ପାଇଁ, ଆମେ ଦୁଇ ବା ତିନି ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଉଦାହରଣ ନେବା ।

5.5.1 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ $AX = B$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯିବ, ଯେଉଁଠି Aକୁ ସହଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (co-efficent Matrix) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ

$a_1x + b_1y = c_1$ ଏବଂ $a_2x + b_2x = c_2$ ହୁଏ, ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ହେବ

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ଏଠାରେ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ଯଦି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $a_2 x + b_2y + c_2z = d_2$ ଏବଂ $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ହୁଏ ତେବେ ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ହେବ

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

ଯେଉଁଠି, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ସହଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରିବାକୁ ହେବ ।

ଟୀକା : ଯଦି A ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ହୁଏ, ତେବେ $|A| = 0$ । ଅତଏବ, A^{-1} ର ସ୍ଥିତି ଅସମ୍ଭବ ଏବଂ ତେଣୁ ଏହି ପଦ୍ଧତି କାର୍ଯ୍ୟ କରିବ ନାହିଁ ।

ସମୀକରଣ $AX = B$ ର ବିଚାର କର, ଯେଉଁଠି $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ଯେତେବେଳେ $|A| \neq 0$, ଅର୍ଥାତ୍ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0, AX = B$ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A^{-1} ଗୁଣନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow (A^{-1}A)\, X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow IX = A^{-1}B \; (\because A^{-1}A = I)$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

ଯେହେତୁ $A^{-1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}$, ଆମେ ପାଇବା

$$X = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}\begin{bmatrix} b_1c_1 - b_1c_2 \\ -a_2c_1 + a_1c_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \frac{-a_2c_1 + a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{bmatrix}$$

ଅତଏବ, $x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$ ଏବଂ $y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ଉଦାହରଣ 5.11 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

$$\left.\begin{aligned} 4x - 3y &= 11 \\ 3x + 7y &= -1 \end{aligned}\right\} \ldots(i)$$

ସମାଧାନ : ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ ରୂପହେବ

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \end{bmatrix} \ldots (ii)$$

ଏଠାରେ, $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix}11\\ -1\end{bmatrix}$

ତେଣୁ (ii) ରୁ ମିଳିବ

$AX = B$ ... (iii)

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A|=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=28+9=37\neq 0$

ଯେହେତୁ, $|A|\neq 0, A^{-1}$ ସମ୍ଭବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $AX = B$ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ A^{-1} ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

ଅର୍ଥାତ୍ $IX = A^{-1}B$

$X = A^{-1}B$

ଅତଏବ, $X=\frac{1}{|A|}$ (Adj A) B

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{37}\begin{bmatrix}7 & 3\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\ -1\end{bmatrix}=\frac{1}{37}\begin{bmatrix}77 & -3\\ -33 & -4\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{37}\begin{bmatrix}74\\ -37\end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା, $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$

ତେଣୁ, $x = 2, y = -1$ ହେଉଛି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 5.12 ମାଟିକ୍ରସ୍ ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର ।

$2x - 3y = 7$

$x + 2y = 3$

ସମାଧାନ : ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ହେବ

$$\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା, $AX = B$ ....(i)

ଯେଉଁଠି, $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-3)$

$= 4 + 3 = 7 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ସମ୍ଭବ ।

$\because \text{Adj (A)} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj (A)} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \text{... (ii)}$$

(i)ରୁ ପାଇବା, $X = A^{-1}B$

କିମ୍ବା, $X = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$

କିମ୍ବା, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{23}{7} \\ \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$

ଏହିପରି, $x = \frac{23}{7}, y = \frac{-1}{7}$ ହେଉଛି ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 5.13 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ କର ।

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 14 \\ x - 2y + z &= 0 \\ 2x + 3y - z &= 5 \end{aligned}\right\}$$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ ରୂପ ହେବ

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -2 & 1\\2 & 3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\0\\5\end{bmatrix} \quad ...(i)$$

ଏହା $AX = B$ ରୂପରେ ଅଛି

ଯେଉଁଠି, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -2 & 1\\2 & 3 & -1\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix}14\\0\\5\end{bmatrix}$

$\therefore X = A^{-1}B$ ... (ii)

ଏଠାରେ, $|A| = 1(2-3) - 2(-1-2) + 3(3+4)$

$= 26 \neq 0$

$\therefore A^{-1}$ ସମ୍ଭବ ।

ଏବେ $\text{Adj } A=\begin{bmatrix}-1 & 11 & 8\\3 & -7 & 2\\7 & 1 & -4\end{bmatrix}$

ଅତଏବ, (ii) ରୁ ଆମେ ପାଇବା $X = A^{-1}B = \frac{1}{|A|}\text{Adj } A \cdot B$

$$X=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}-1 & 11 & 8\\3 & -7 & 2\\7 & 1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14\\0\\5\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}26\\52\\78\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା, $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$

ଏହିପରି $x = 1, y = 2$ ଏବଂ $z = 3$ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 5.14 ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କର :

$$x + 2y + z = 2$$

$$2x - y + 3z = 3$$

$$x + 3y - z = 0$$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ ରୂପ ହେବ ।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $AX = B$ ... (i)

ଯେଉଁଠାରେ, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1(1-9) - 2(-2-3) + 1(6+1) = 9 \neq 0$

ଅତଏବ, A^{-1} ସମ୍ଭବ ।

ଏବେ $\text{Adj} A = \begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj} A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix}$$

(i) ରୁ ପାଇବା $X = A^{-1}B$

ଅର୍ଥାତ୍ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} -8 & 5 & 7 \\ 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{9}\begin{bmatrix}-1\\4\\11\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{9}\\ \frac{4}{9}\\ \frac{11}{9}\end{bmatrix}$$

ତେଣୁ, $x = -\frac{1}{9}, y = \frac{4}{9}, z = \frac{11}{9}$ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ।

5.6 ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସଙ୍ଗତତା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ (Criterion for consistency of a system of Equations)

ମନେକର $AX = B$ ଦୁଇ ବା ତିନିଗୋଟି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ । ତେବେ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସର୍ତ୍ତ ପାଇବା

(1) ଯଦି $|A| \neq 0$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଏହାର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ଯାହା $X = A^{-1}B$ ଦ୍ୱାରା ମିଳେ ।

(2) ଯଦି $|A| = 0$, ତେବେ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଙ୍ଗତ କିମ୍ବା ଅସଙ୍ଗତ ହୋଇପାରେ ଏବଂ ଯଦି ସଙ୍ଗତ, ଏହାର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ନାହିଁ । ଏହା ସହିତ ଯଦି

(a) $(\text{Adj } A)\, B \neq 0$, ତେବେ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ଅସଙ୍ଗତ

(b) $(\text{Adj } A)\, B = O$, ତେବେ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଏହାର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

ଟୀକା : 'n' ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ nଟି ସମୀକରଣ ଥିବା ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ ଏହି ସର୍ତ୍ତାବଳୀ ସତ୍ୟ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହାର ସତ୍ୟାସତ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକସ୍ଥଳେ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

(a) $5x + 7y = 1$

$2x - 3y = 3$

ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଏହାର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି, କାରଣ $\frac{5}{2} \neq \frac{7}{-3}$ । ଏଠାରେ,

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣଟି ହେବ

$$\begin{bmatrix}5 & 7\\2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $AX = B$ ... (i)

ଯେଉଁଠାରେ $A = \begin{bmatrix}5 & 7\\2 & -3\end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$

ଏଠାରେ, $|A| = 5 \times (-3) - 2 \times 7 = -15 - 14 = -29 \neq 0$

ଏବଂ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}A = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ ... (ii)

... ରୁ ପାଇବା $X = A^{-1}B$

ଅର୍ଥାତ୍, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-29}\begin{bmatrix} -3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{29} \\ -\frac{13}{29} \end{bmatrix}$ [(i) ଓ (ii) ରୁ]

ଏହିପରି, $x = \frac{24}{29}$ ଏବଂ $y = \frac{-13}{29}$ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ।

(b) $3x + 2y = 7$

$6x + 4y = 8$

ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀଟି ଅସଙ୍ଗତ, ଅର୍ଥାତ୍, ଏହାର କୌଣସି ସମାଧାନ ନାହିଁ, କାରଣ $\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \neq \frac{7}{8}$

ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଲେଖିଲେ, ପାଇବା

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା, $AX = B$

ଯେଉଁଠି $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଓ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ, $|A| = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0$

$$\text{Adj}A = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $(\text{Adj}A)B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 \\ -18 \end{bmatrix} \neq O$

ଏଣୁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ଅସଙ୍ଗତ ।

(c) $\left.\begin{array}{l} 3x - y = 7 \\ 9x - 3y = 21 \end{array}\right\}$

ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଙ୍ଗତ ଓ ଏହାର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

କାରଣ $\frac{3}{9} = \frac{-1}{-3} = \frac{7}{21}$

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିହେବ ।

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$$

କିମ୍ବା, $AX = B$, ଯେଉଁଠି

$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix}$

ଏଠାରେ, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times (-3) - 9 \times (-1)$

$= -9 + 9 = 0$

$\text{Adj}\, A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}$

ଏଣୁ $(\text{Adj}\, A)B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$

$\therefore$ ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ

(i) ଯଦି $|A| \neq 0$ ଏବଂ $(\text{Adj}\, A)\, B \neq O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଏକ ଅଣଶୂନ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

(ii) ଯଦି $|A| \neq 0$ ଏବଂ $(\text{Adj}\, A)\, B = O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର କେବଳ ଏକ ମାମୁଲି ସମାଧାନ $x = y = z = 0$ ଅଛି ।

(iii) ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj}\, A)\, B = O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

(iv) ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj}\, A)\, B \neq O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ଅସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

ଆମେ ଏବେ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ବିଚାର କରିବା ।

ଯେଉଁଠି, $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj}A)\,B \neq O$

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ବିଚାର କର

$$x + 2y + z = 5$$

$$2x + y + 2z = -1$$

$$x - 3y + z = 6$$

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ରୂପରେ ହେବ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $AX = B$

ଯେଉଁଠି, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\because C_1 = C_3)$

ଏବଂ $(\text{Adj}A)B = \begin{bmatrix} 7 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -7 & 5 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ [(Adj A)କୁ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କର]

$$= \begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix} \neq O$$

$\because |A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj A})B \neq O$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj A})B$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 58 \\ 0 \\ -58 \end{bmatrix}}{0}$$ ଯାହା ନିରର୍ଥକ ଅଟେ

ଉକ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ, ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj A})B \neq O$,

ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଆଦୌ ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

ସାରାଂଶ :

(i) ଯଦି $|A| \neq 0$ ଏବଂ $(\text{Adj A})B \neq O$ ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ଓ ଅଣଶୂନ ସମାଧାନ ରହିବ ।

(ii) ଯଦି $|A| \neq 0$ ଏବଂ $(\text{Adj A})B = O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ମାମୁଲି ସମାଧାନ ରହିବ ।

(iii) ଯଦି $|A| = 0$ $(\text{Adj A})B = O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

(iv) ଯଦି $|A| = 0$ $(\text{Adj A})B \neq O$, ତେବେ ସମୀକରଣ ସମୂହର ସମାଧାନ ରହିବ ନାହିଁ (ଅସଙ୍ଗତ) ।

ଉଦାହରଣ 5.15 ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ପାଇଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପ୍ରତିଲୋମୀ ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କର ।

(i) $6x + 4y = 2$
$9x + 6y = 3$

(ii) $2x - y + 3z = 1$
$x + 2y - 3z = 2$
$5y - 5z = 3$

ସମାଧାନ : (i) ଦତ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ହେବ

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $AX = B$

ଯେତେବେଳେ, $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6 \times 6 - 9 \times 4 = 36 - 36 = 0$

$\therefore$ ଉକ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ଆଦୌ ସମାଧାନ ନାହିଁ କିମ୍ବା ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

$x = k$ ନିଅ, ତେବେ $6k + 4y = 2$ ଏହା $y = \dfrac{1-3k}{2}$ ପ୍ରଦାନ କରେ

x ଓ yର ଏହି ମାନକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ସମୀକରଣର ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା

$$9k + 6\left(\frac{1-3k}{2}\right) = 3$$

$$\Rightarrow 18k + 6 - 18k = 6$$

$\Rightarrow 6 = 6$, ସତ୍ୟ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି, ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା $x = k,\ y = \dfrac{1-3k}{2}$ [k ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସଂଖ୍ୟା 1

(ii) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ସମୂହ

$2x - y + 3z = 1$ ... (1)

$x + 2y - z = 2$ ... (2)

$5x - 5z = 3$ ... (3)

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ହେବ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $AX = B$

ଯେଉଁଠି, $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(-10+5) + 1(-5-0) + 3(5-0)$

$= -10 - 5 + 15 = 0$

$\therefore$ ଉକ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି କିମ୍ବା ଆଦୌ ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

ମନେକର $z = k$ । ତେବେ (1)ରୁ ପାଇବା $2x - y = 1 - 3k$;

ଏବଂ (2) ରୁ ପାଇବା $x + 2y = 2 + k$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆମ ପାଖରେ ଦୁଇ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମୀକରଣ ଅଛି

$2x - y = 1 - 3k$

$x + 2y = 2 + k$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix}$$

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix}$

ତେବେ, $|A| = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4 + 1 = 5 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} ସମ୍ଭବ ।

ଏଠାରେ $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \text{Adj } A = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$\therefore$ ସମାଧାନ ହେଉଛି $X = A^{-1}B$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-3k \\ 2+k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k + \frac{4}{5} \\ k + \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$\therefore x = -k + \dfrac{4}{5}, y = k + \dfrac{3}{5}$, ଯେଉଁଠି k ହେଉଛି କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା ।

x, y ଏବଂ zର ପୂର୍ବୋକ୍ତ ମାନକୁ (3)ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$$5\left(k + \frac{3}{5}\right) - 5(k) = 3$$

$\Rightarrow 5k + 3 - 5k = 3 \Rightarrow 3 = 3$, ଏହା ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା

$x = -k + \frac{4}{5}$, $y = k + \frac{3}{5}$ ଏବଂ $z = k$, ଯେଉଁଠି k ଏକ ସ୍ୱେଚ୍ଛ (Arbitrary) ସଂଖ୍ୟା ।

5.7 ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ (Homogeneous System of Equations)

ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ $AX = B$, ଯେଉଁଠାରେ $B = O$, ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ, ତାହାକୁ ଏକ ସମଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ କୁହାଯାଏ ।

ନିମ୍ନରେ କେତେକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ଦିଆଗଲା ।

(i) $x + 2y = 0$, $-2x + 3y = 0$

(ii) $2x + 5y - 3z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x - y - 6z = 0$

(iii) $2x + y - 3z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x - y - 2z = 0$

(ii)ରେ ଥିବା ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କରିବା ।

ଦତ୍ତ ଅଛି, $2x + 5y - 3z = 0$

$x - 2y + z = 0$

$3x - y - 6z = 0$

(ii) ରେ ଥିବା ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ନିମ୍ନପରି ଲେଖିପାରିବା

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

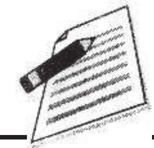
ଅର୍ଥାତ୍ $AX = O$

ଯେତେବେଳେ, $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -6 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $|A| = 2(12+1) - 5(-6-3) - 3(-1+6)$

$= 26 + 45 - 15$

$= 56 \neq 0$



କିନ୍ତୁ $B = O$ $(\text{Adj } A)B = O$

ଏଣୁ, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)B = O$

$\therefore$ $x = 0, y = 0$ ଏବଂ $z = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀରେ ମାମୁଲି ସମାଧାନ ରହିବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଏକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ, ଯଦି $|A| \neq 0$ ଏବଂ $(\text{Adj } A)B = O$ ତେବେ ଏହାର କେବଳ ମାମୁଲି ସମାଧାନ ରହିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ (iii) ରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ନିଅ :

$2x + y - 3z = 0$

$x - 2y + z = 0$

$3x - y - 2z = 0$

(iii) ରେ ଥିବା ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ଲେଖିଲେ, ପାଇବା

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $AX = O$

ଯେତେବେଳେ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1) - 1(-2-3) - 3(-1+6)$

$= 10 + 5 - 15 = 0$

ଏବଂ $B = O \Rightarrow (\text{Adj } A)B = O$

ଏଣୁ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}(\text{Adj } A)B = \frac{1}{0}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ଯାହା ମାମୁଲି ନୁହଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ସମୀକରଣକୁ ନେବା

$2x + y = 3z$

$x - 2y = -z$

ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା $x = z, y = z$ । ମନେକର $z = k$, ଯେତେବେଳେ k ଯାଦୃଚ୍ଛିକ (arbitrary) ସଂଖ୍ୟା ।

ତେବେ $x = k, y = k$ ଏବଂ $z = k$ ହେବ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ।

ଏକ ଦତ୍ତ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ, ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj } A)\, B = O$, ତେବେ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.4

1. ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପ୍ରତିଲୋମୀ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

(a) $2x + 3y = 4$, $x - 2y = 5$ (b) $x + y = 7$, $3x - 7y = 11$

(c) $3x + 4y - 5 = 0$, $x - 2y + 6 = 0$ (d) $2x - 3y + 6 = 0$, $6x + y - 8 = 0$

2. ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତିଲୋମୀ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

(a) $x + 2y + z = 0$, $2x - y + 3z = 5$, $x + y - z = 7$

(b) $2x + 3y + z = 13$, $3x + 2y - z = 12$, $x + y + 2z = 5$

(c) $-x + 2y + 5z = 2$, $2x - 3y + z = 15$, $-x + y + z = =3$

(d) $2x + y - z = 2$, $x + 2y - 3y = -1$, $5x - y - 2z = -1$

3. ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତିଲୋମୀ ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

(a) $x + y + z = 0$, $2x - y + z = 0$, $x - 2y + 3z = 0$

(b) $3x - 2y + 3z = 0$, $2x + y - z = 0$, $4x - 3y + 2z = 0$

(c) $x + y + 1 = 0$, $y + z - 1 = 0$, $z + x = 0$

4. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ସଙ୍ଗତ କି ନୁହଁ ସ୍ଥିର କର । ଯଦି ସଙ୍ଗତ, ତେବେ ସମାଧାନ କର :

(a) $2x - 3y = 5$, $x + y = 7$

(b) $2x - 3y = 5$, $4x - 6y = 10$

(c) $3x + y + 2z = 3$, $-2y - z = 7$, $x + 15y + 3z = 11$

(d) $x + 2y - 3z = 0$, $4x - y + 2z = 0$, $3x + 5y - 4z = 0$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ କୁହାଯିବ ଯଦି ଏହାର ଅନୁରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଅଣଶୂନ ହୁଏ ।
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର i ତମ ଧାଡ଼ି ଏବଂ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବାଦ୍ ଦେଲେ, ତହିଁରୁ ଏହାର ଯେଉଁ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମିଳେ, ତାକୁ ଉପାଦାନ a_{ij} ର ମାଇନର୍ (minor) କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ M_{ij} ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।
- ଉପାଦାନ a_{ij} ର ସହଉପାଦକକୁ $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।
- ଏକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କରରେ ସହଉପାଦକମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍‌କୁ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ସଖଣ୍ଡଜ (Ad joint)କୁହାଯାଏ ।
- ଯଦି A ଏକ n କୋଟିଯୁକ୍ତ ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ

  $A(\text{Adj } A) = (\text{Adj } A)A = |A|\, I_n$, ଯେତେବେଳେ I_n କୋଟୀ ଯୁକ୍ତ ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।
- ଏକ ଅଣ-ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ ଯଦି ଏହିପରି ଏକ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B ଥାଏ, ଯେପରିକି $AB = BA = I$, ତେବେ Bକୁ Aର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ କୁହାଯାଏ । ଏବଂ $B = A^{-1}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।
- କେବଳ ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଥାଏ ।
- $a_1x + b_1y = c_1$ ଏବଂ $a_2x + b_2y = c_2$ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ନିମ୍ନ ପରି ଲେଖିହେବ ।

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

ଏଣୁ, ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, ତେବେ

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \begin{bmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

- ଏକ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ $AX = B$କୁ ଆମେ ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ ବୋଲି କହିବା, ଯଦି $|A| \neq 0$ ।
- $AX = B$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ଆମେ ଅସଙ୍ଗତ କହିବା ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj } A)\, B \neq O$
- $AX = B$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ଆମେ ସଙ୍ଗତ ଓ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ ବୋଲି କହିବା, ଯଦି $|A| = 0$ ଏବଂ $(\text{Adj } A)\, B = O$ ।
- $AX = B$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ଆମେ ସଜାତୀୟ କହିବା ଯଦି B ଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ ।
- ଏକ ସଜାତୀୟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ $AX = 0$ର କେବଳ ଏକ ମାମୁଲି ସମାଧାନ $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$ ଥାଏ । ଯଦି $|A| \neq 0$ ।
- ଏକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ $AX = 0$ର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଥାଏ, ଯଦି $|A| = 0$ ।

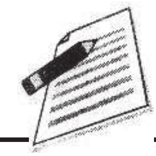
ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $|A|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -1 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$



2. A ର ସଖଣ୍ଡଜ (Adjoint) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(a) ଓ (b) ପାଇଁ ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

$A(\text{Adj } A) = |A|\, I_3 = (\text{Adj } A)\, A.$

3. ଯଦି ସମ୍ଭବ ତେବେ A^{-1} ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

(a), (b) ଓ (c) ପାଇଁ $(A')^{-1} = (A^{-1})'$ ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

4. ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ A ର ବ୍ୟୁତ୍‌କ୍ରମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5. ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ପ୍ରତିଲୋମୀ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

(a) $x + 2y = 4$
$2x + 5y = 9$

(b) $6x + 4y = 2$
$9x + 6y = 3$

(c) $2x+y+z=1$
$x - 2y - z = \frac{3}{2}$
$3y - 5z = 9$

(d) $x - y + z = 4$
$2x + y - 3z = 0$
$x + y + z = 2$

(e) $x + y - 2z = -1$
$3x - 2y + z = 3$
$2x + y - z = 0$

6. ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ-ବିଲୋମନ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କର :

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{10}{z} = 4;\ \frac{4}{x} - \frac{6}{y} + \frac{5}{z} = 1;\ \frac{8}{x} + \frac{9}{y} - \frac{20}{z} = 3$$

7. ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସାର୍ଥକ (Non-trival) ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$3x + 2y + 7z = 0$$
$$4x - 3y - 2z = 0$$
$$5x + 9y + 23z = 0$$

8. ନିମ୍ନ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ କର :

(a) $x + y - z = 0$, $x - 2y + z = 0$, $3x + 6y - 5z = 0$

(b) $x + 2y - 2z = 0$, $2x + y - 3z = 0$, $5x + 4y - 9z = 0$

9. 'p'ର ସେହି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଥିପାଇଁ ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ମାନ ସାର୍ଥକ (non-trivial) ସମାଧାନ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ :

$$x + 2y + z = px$$
$$2x + y + z = py$$
$$x + y + 2z = pz$$

10. λର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ସଙ୍ଗତ ହେବେ ।

$$2x - 3y + 4 = 0$$
$$5x - 2y - 1 = 0$$
$$21x - 8y + \lambda = 0$$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.1

1. (a) –12 (b) 10 2.(a) ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ (b) ଅଣସିଙ୍ଗୁଲାର

3. (a) $M_{11} = 4; M_{12} = 7; M_{21} = -1; M_{22} = 3$

   (b) $M_{11} = 5; M_{12} = 2; M_{21} = 6; M_{22} = 0$

4. (a) $M_{21} = 11; M_{22} = 7; M_{23} = 1$

   (b) $M_{31} = -13; M_{32} = -13; M_{33} = 13$

5. (a) $C_{11} = 7; C_{12} = -9; C_{21} = 2; C_{22} = 3$

   (b) $C_{11} = 6; C_{12} = 5; C_{21} = -4; C_{22} = 0$

6. (a) $C_{21} = 1; C_{22} = -8; C_{23} = -2$

   (b) $C_{11} = -6; C_{12} = 10; C_{33} = 2$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.2

1. (a) $\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.3

1. (a) $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{2}{5} \\ -\frac{8}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} \\ \frac{17}{24} & -\frac{1}{3} & -\frac{11}{24} \end{bmatrix}$

4. (a) $(A')^{-1} = \begin{bmatrix} -9 & -8 & -2 \\ 8 & 7 & 2 \\ -5 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 5.4

1. (a) $x = \frac{23}{7}, y = \frac{-6}{7}$

   (b) $x = 6, y = 1$

   (c) $x = \frac{-7}{5}, y = \frac{23}{10}$

   (d) $x = \frac{27}{30}, y = \frac{13}{5}$

2. (a) $x = \frac{58}{11}, y = \frac{-2}{11}, z = \frac{21}{11}$

   (b) $x = 2, y = 3, z = 0$

   (c) $x = 2, y = -3, z = 2$

   (d) $x = 1, y = 2, z = 2$

3. (a) $x = 0, y = 0, z = 0$

   (b) $x = 0, y = 0, z = 0$

   (c) $x = 0, y = 0, z = 0$

4. (a) ସଙ୍ଗତ $x = \frac{26}{5}, y = \frac{9}{5}$

   (b) ସଙ୍ଗତ, ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି

   (c) ଅସଙ୍ଗତ

   (d) ମାମୁଲି ସମାଧାନ, $x = y = z = 0$

ପାଠ୍ୟନ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନାବଳୀ :

1. (a) –31

   (b) –24

2. (a) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & -13 \\ -4 & 5 & 3 \\ 4 & -3 & -5 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ -13 & 13 & 13 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{7}{36} & -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{5}{14} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{3}{14} \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 3 & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$

5. (a) $x = 2, y = 1$

(b) $x = k, y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}k$

(c) $x = 1, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{3}{2}$

(d) $x = 2, y = -1, z = 1$

(e) $x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2}$

6. $x = 2, y = 3, z = 5$

7. $x = -k, y = -2k, z = k$

8. (a) $x = k, y = 2k, z = 3k$

(b) $x = y = z = k$

9. $P = 1, -1, 4$

10. $\lambda = -5$