# ୪

# ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଓ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗ
# Determinants and their application

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ୍ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ । ତାହାକୁ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (determinant) କୁହାଯାଏ । ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବହୁବିଧ ବ୍ୟବହାର ମଧ୍ୟରେ ସବୁଠାରୁ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ହେଉଛି ‘n’ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ‘n’ ସଂଖ୍ୟକ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ପଦ୍ଧତି । ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ କୁହାଯାଏ । ଏହା ଗେବ୍ରିଏଲ କ୍ରାମର (1704 – 1752)ଙ୍କ ନାମାନୁସାରେ ନାମିତ ହୋଇଛି ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ଏବଂ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ପଦ୍ଧତିରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟାୟନ କରିବା । ଆମେମାନେ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବ୍ୟବହାର କରି କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କରି ଶିଖିବା ।

## ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ ତୁମେ

- ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କର ମାଇନର୍ (minor) ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ (Cofactor)ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ଏବଂ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସର୍ବାଧିକ ତିନିକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମାନଙ୍କର ଧର୍ମ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିପାରିବ;
- ବିସ୍ତାର ପ୍ରଣାଳୀ ଓ ସାରସ (SARRUS) ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ସର୍ବାଧିକ ୩ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମୂଲ୍ୟାୟନ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇ ବା ତିନି ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ କ’ଣ ସର୍ତ୍ତ ଅଛି ତାହା ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ପାଇଁ କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମକୁ ପ୍ରକାଶ କରିବା ସହ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ ।

## ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସମୀକରଣ ସମାଧାନର ଜ୍ଞାନ
- ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି ସହ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଜ୍ଞାନ ।
- ସଂଖ୍ୟା ଓ ବୀଜଗଣିତୀୟ ରାଶି ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ଚାରି ମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା

## 4.1 ଦୁଇ କୋଟି (ORDER) ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ

ଆସ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$
$$a_2 x + b_2 y = c_2$$

ଏହି ସମୀକରଣ-ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \text{ ଏବଂ } y = \frac{a_1c_2 - a_2c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

ଯେଉଁଠି $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$

x ଓ y ର ସ୍ଥିତି ଅଛି କି ନାହିଁ ତାହା ସଂଖ୍ୟା $a_1b_2 - a_2b_1$ ସୂଚାଏ ।

ସଂଖ୍ୟା $a_1b_2 - a_2b_1$ କୁ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଆମେ ଲେଖୁ ।

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

## 4.2 ଦୁଇ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର (Expansion of a Determinant of Order 2)

ଦୁଇ କୋଟିଯୁକ୍ତ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ବିସ୍ତାରିତ ରୂପରେ ଲେଖିବାର ଏକ ପାରମ୍ପରିକ ନିୟମ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି :

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ ରେ $a_{11}$ ହେଉଛି ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଓ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ

$a_{12}$ ହେଉଛି ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ

$a_{21}$ ହେଉଛି ଦ୍ୱିତିୟ ଧାଡ଼ି ଓ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ

$a_{22}$ ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ି ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ

ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖ

$$\begin{matrix} a_{11} & \nearrow & a_{12} \\ & \times & \\ a_{21} & \searrow & a_{22} \end{matrix}$$

ତୀର ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସଂଯୁକ୍ତ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗୁଣ । ନିମ୍ନମୁଖୀ ତୀରଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକ, ଯଥା $a_{11}\, a_{22}$, ଏବଂ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱମୁଖୀ ତୀରଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକ ଯଥା $-a_{21}a_{12}$ । ଦୁଇ ଗୁଣଫଳକୁ ଯୋଗ କର । $a_{11}\, a_{22} + (-a_{21}a_{12})$ । ଯୋଗଫଳ ହେବ $(a_{11}\, a_{22} + (-a_{21}\, a_{12}))$ କିମ୍ବା $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ଯାହାକି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମାନ ।

**ଉଦାହରଣ 4.1** ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix}$

**ସମାଧାନ :**

(i) $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = (6\times 2)-(8\times 4) = 12-32 = -20$

(ii) $\begin{vmatrix} a+b & 2b \\ 2a & a+b \end{vmatrix} = (a+b)(a+b)-(2a)(2b)$

$= a^2+2ab+b^2-4ab$

$= a^2+b^2-2ab$

$= (a-b)^2$

(iii) $\begin{vmatrix} x^2+x+1 & x+1 \\ x^2-x+1 & x-1 \end{vmatrix} = (x^2+x+1)(x-1)-(x^2-x+1)(x+1)$

$= (x^3-1)-(x^3+1)$

$= -2$

**ଉଦାହରଣ 4.2** x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ (ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$

**ସମାଧାନ :**

(i) ବର୍ତ୍ତମାନ, $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3)-x(x+1)$

$= (x^2-9)-x^2-x = -x-9$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ

$-x-9 = 6$

$\Rightarrow x = -15$

(ii) ବର୍ତ୍ତମାନ, $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2)-(x+1)(2x+1)$

$= 8x^2+4x-4x-2-2x^2-x-2x-1$

$= 6x^2-3x-3 = 3(2x^2-x-1)$

ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁସାରେ

$3(2x^2-x-1) = 0$

ବା, $2x^2 - x - 1 = 0$

ବା, $2x^2 - 2x + x - 1 = 0$

ବା, $2x(x - 1) + 1(x - 1) = 0$

ବା, $(2x + 1)(x - 1) = 0$

ବା, $x = 1, -\frac{1}{2}$

## 4.3 ତିନି କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (Determinant of Order 3)

ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ରେ, ନଅ ଗୋଟି ରାଶି $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3$ ଓ $c_3$ କୁ 3 ଗୋଟି ଧାଡ଼ି ଓ 3 ଗୋଟି ସ୍ତମ୍ଭରେ ସଜ୍ଜିତ କରାଯାଇଛି ।

ଏହାକୁ ତିନିକୋଟି ଯୁକ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (determinast of third order ) କୁହାଯାଏ । 3 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର $3^2 = 9$ ଗୋଟି ଉପାଦାନ ଥାଏ ।

ତିନିକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ଦୁଇ-ସଂଖ୍ୟା ସଂକେତ ($a_{ij}$) ବ୍ୟବହା କରି ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା ।

ଯଥା $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{35} \end{vmatrix}$

ସାଧାରଣତଃ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (2 ବା 3 କୋଟି ଯୁକ୍ତ) କୁ $\Delta$ କିମ୍ବା $|A|, |B|$ ଆଦି ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଥାଏ ।

$\Delta = |a_{ij}|$, ଯେଉଁଠାରେ $i = 1, 2, 3$ ଏବଂ $j = 1, 2, 3$

## 4.4 ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ (Determinant of a Square Matrix)

ସଂଖ୍ୟାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଆମେ ସେହି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିଥାଉ । $1\times1$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ [a] ସହ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ a ଥିବା ଏକ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରାଯାଇପାରେ । ଏହି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ a ଅଟେ ।

ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ଦୁଇ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ,

ତେବେ $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ପରିପ୍ରକାଶ କୁ 2 କୋଟିଯୁକ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ । ଏହାକୁ

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$3\times3$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ ସହିତ, ଆମେ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ କୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିପାରିବା

ଏବଂ ଏହାର ମାନ ହେବ

$$a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

**ଉଦାହରଣ 4.3** ଯଦି $A=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $|A|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର :

**ସମାଧାନ :** $|A|=\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\times5-1\times6=15-6=9$

**ଉଦାହରଣ 4.4** ଯଦି $A=\begin{bmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{bmatrix}$, ତେବେ $|A|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

**ସମାଧାନ :** $|A|=\begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a-b \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)-b\times a = a^2-b^2-ab$

**ଟୀକା :** 1. ଏକ ଏକକ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ I ର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ 1

2. ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଶୂନ, ତାହାକୁ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ (Singular) ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।

## 4.5 ତିନିକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର

ପାଠ 4.4 ରେ ଆମେ ଲେଖିଥିଲେ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\times\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)a_{12}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ଯାହାକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ ବିସ୍ତାର କରାଯାଇପାରିବ

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{23}-a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବିସ୍ତାର ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଯେ, ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସହ, ଏହା ଯେଉଁ ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତାହାକୁ ବାଦ ଦେଲାପରେ ମିଳୁଥିବା ଦୁଇକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ, ଲକ୍ଷ୍ୟକର $a_{11}$, $a_{12}$ ଓ $a_{13}$ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ +, – ଏବଂ + ଚିହ୍ନବିଶିଷ୍ଟ ଅଟନ୍ତି । ଅନ୍ୟ ଅର୍ଥରେ, ସେଗୁଡ଼ିକ ଧାନତ୍ମକ ଚିହ୍ନରୁ ଆରମ୍ଭ ହୋଇ ଏକାନ୍ତର ଭାବରେ ଧନାତ୍ମକ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି । ଯଦି ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ଏହାକୁ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ଦେବା ଏବଂ ଯଦି ଅଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ, ଦେବା । ଏହିକାରଣରୁ $a_{11}$ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନଯୁକ୍ତ ଅଟେ ।

**ଟୀକା :** ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର ପକ୍ରିୟା ଯେକୌଣସି ସ୍ତମ୍ଭ ବା ଧାଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି କରିପାରିବା । ଉପରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଚିହ୍ନ ନିୟମ ଆଧାରରେ, ଯଦି ଆମେ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ବା ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର କିମ୍ବା ଯେକୌଣସି ଧାଡ଼ି ବା ସ୍ତମ୍ଭର ବ୍ୟବହାର କରି ଉକ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ବିସ୍ତାର କରୁ, ତେବେ ଏହାର ମାନ ସର୍ବଦା ସମାନ ହେବ ।

**ଉଦାହରଣ 4.5** ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କର ।

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (20 - 2) - 2 \times (10 - 3) + 3 \times (4 - 12)$

$= 18 - 14 - 24$

$= -20$

**ଉଦାହରଣ 4.6** ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କର

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \times 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times 3 \times \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -2 \times (3 - 4) + 1 \times (1 - 6) - 3 \times (2 - 9)$

$= 2 - 5 + 21$

$= 18$

## ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.1

1. $|A|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $A = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3} & 5 \\ 2 & 2-\sqrt{3} \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} \sin\alpha+\cos\beta & \cos\beta+\cos\alpha \\ \cos\beta-\cos\alpha & \sin\alpha-\sin\beta \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} a+bi & c+di \\ c-di & a-bi \end{bmatrix}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

3. ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ବ୍ୟବହାର କର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତାର କର ।

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

## 4.6 ମାଇନର ଏବଂ ସହଉତ୍ପାଦକ (Minors and cofactors)

### 46.1 $|A|$ ରେ $a_{ij}$ ର ମାଇନର୍ (Minor of $a_{ij}$ in $|A|$):

ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସହ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଏବଂ ତାହାକୁ ଉକ୍ତ ଉପାଦାନର ମାଇନର କୁହାଯାଏ । ଏକ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ହେଉଛି ସେହି ସଂଖ୍ୟା, ଯାହା ଉକ୍ତ ଉପାଦାନାର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବାଦଦେଲା ପରେ, ରହୁଥିବା ଅବଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଅଟେ । ଏହିପରି $|A|$ ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ହେଉଛି, $|A|$ ର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବାଦ ଦେବାପରେ ମିଳୁଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଅଟେ ଏବଂ ଏହାକୁ $M_{ij}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

**ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :** ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ ରେ 3 ର ମାଇନର୍ ହେଉଛି 7 ।

**ଉଦାହରଣ 4.7** ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

**ସମାଧାନ :** ମନେକରାଯାଉ $a_{ij}$ ଉପାଦାନର ମାଇନର $M_{ij}$ ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ $a_{11}$ ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଓ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଅଛି । ଏଣୁ $a_{11}$ ର ମାଇନର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ $|A|$ ର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଓ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ବାଦ ଦେବାପରେ $a_{11}$ ର ମାଇନର $M_{11}$ ହେବ

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$$

ସେହିପରି ଭାବରେ $a_{12}$ ର ମାଇନର୍ $M_{12}$ ଏବଂ

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}\ ;$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\ ;$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{32}a_{33};$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}$$

ସେହିପରି ଭାବରେ ଆମେ $M_{31}$, $M_{32}$ ଏବଂ $M_{33}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

### 4.6.2 $|A|$ ରେ ଥିବା $a_{ij}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ

ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ଏକ ଉପାଦାନ $a_{ij}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ ହେଉଛି $a_{ij}$ ର ମାଇନର୍ ଏବଂ $(-1)^{i+j}$ ର ଗୁଣଫଳ । ଏହାକୁ ସାଧାରଣତଃ $C_{ij}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$a_{ij}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ $= C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

**ଉଦାହରଣ 4.8**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ ରେ ଥିବା

ଉପାଦାନ $a_{11}$, $a_{12}$ ଓ $a_{21}$ ର ସହ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

**ସମାଧାନ :** କୌଣସି ଉପାଦାନ $a_{ij}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ ହେଉଛି $(-1)^{i+j}M_{ij}$

ତେବେ $C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2\ (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) = (a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23})$

$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12} = (a_{12}\ a_{33} - a_{31}\ a_{23}) = (a_{31}a_{23} - a_{21}a_{33})$

ଏବଂ $C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = -M_{21} = (a_{32}a_{13} - a_{12}a_{33})$

**ଉଦାହରଣ 4.9** ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

**ସମାଧାନ :** ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, $a_{21} = 5; a_{22} = 2; a_{23} = 4$

$a_{21}$(ଅର୍ଥାତ୍ 5) ର ମାଇନର୍ $= \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 - 3 = 45$

$a_{22}$ (ଅର୍ଥାତ୍ 2) ର ମାଇନର୍ $= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 21 = -13$

ଏବଂ $a_{23}$ (ଅର୍ଥାତ୍ 4)ର ମାଇନର୍ $= \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 42 = -42$

ଅନୁରୂପ ସହଉପାଦକଗୁଡ଼ିକ

$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -(48) = -48$

$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = +(-13) = -13$

ଏବଂ $C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = -(-42) = 42$

## 4.7 ସହଉପାଦକ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ (Value of a Determinant using cofactor)

ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ସହଉପାଦକ ଓ ଏହାର ଏକ ଧାଡ଼ି ବା ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ବିସ୍ତାରକୁ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$

$= a_{31}C_{31} + a_{32}C_{32} + a_{33}C_{33}$

ଯେତେବେଳେ $C_{ij}$ ହେଉଛି $a_{ij}$ ଉପାଦାନର ସହଉପାଦକ

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ ରେ ଥିବା ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନ ଏବଂ ପରେ ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ଓ ଏହାର ଅନୁରୂପ ସହଉପାଦକ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟାକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଉଭୟ ମାନ ଯେ ସମାନ, ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

**ସମାଧାନ :** ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନ ଓ ଏହାର ଅନୁରୂପ ସହଉପାଦକ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କଲେ ପାଇବା,

ଅର୍ଥାତ୍ ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା

$$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

ପ୍ରଥମେ ଆମେ $C_{11}$, $C_{12}$ ଓ $C_{13}$ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3\\4 & 5\end{vmatrix} = 10 + 12 = 22$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix}-6 & -3\\8 & 5\end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix}-6 & -3\\8 & 5\end{vmatrix}$$

$$= -(-30 + 24) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix}-6 & 2\\8 & 4\end{vmatrix}$$

$$= (-24 - 16) = -40$$

$$\therefore \Delta = 3 \times 22 + 1 \times 6 + 7 \times (-40) = 66 + 6 - 280 = -208$$

ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକର ସହଉପାଦକ ମାଧ୍ୟମରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କଲେ, ପାଇବା

$$\Delta = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix}2 & -3\\4 & 5\end{vmatrix} = 10 + 12 = 22$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix}1 & 7\\4 & 5\end{vmatrix} = -(5 - 28) = 23$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix}1 & 7\\2 & -3\end{vmatrix} = (-3 - 14) = -17$$

$$\therefore \Delta = 3 \times 22 + (-6) \times 23 + 8 \times (-17)$$

$$= 66 - 138 - 136 = -208$$

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ $-208$ । ଏଣୁ ଏହା ପ୍ରମାଣିତ ହେଲା ଯେ ଉଭୟ ଫଳାଫଳ ସମାନ ।

**ଉଦାହରଣ 4.11** ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏକ ଧାଡ଼ି (ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ଉପାଦାନ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଧାଡ଼ି (ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ସହ ଉପାଦକର ଗୁଣଫଳର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ଅଟେ ।

**ସମାଧାନ :**

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ କୁ ବିଚାର କର

ଏଠାରେ, $C_{11} = 5$ ଏବଂ $C_{12} = -4$

ଆସ $a_{21} \times C_{11} + a_{22} \times C_{12}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

$a_{21} \times C_{11} + a_{22} \times C_{12} = 4 \times 5 + 5 \times (-4)$

$= 20 - 20 = 0$

ସେହିପରି ଭାବରେ ଯଦି ଆମେ

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ କୁ ବିଚାର କରନ୍ତି

ଏଠାରେ $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(1-6) = 5$

ତେବେ $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23}$

$= 1 \times (-1) + 2 \times (-7) + 3 \times (5)$

$= -1 - 14 + 15 = 0$

ଆମେ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ନେଇ ଏଇ ଧର୍ମର ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ।

## 4.8 ତିନିକୋଟି ଯୁକ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାରର ସାରସ ଚିତ୍ର (Sarrus Diagram)

ତିନିକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମୂଲ୍ୟାୟନର ଅନ୍ୟ ଏକ ସହଜ ପ୍ରଣାଳୀ ହେଉଛି ସାରସ ଚିତ୍ର ।

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ର ବିଚାର କର

ସର୍ବପ୍ରଥମେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ତିନି ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଏବଂ ପରେ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଗଲାଭଳି ଲେଖିବା

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ନିମ୍ନମୁଖୀ ତୀରଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଯୋଡ଼ାଯାଇଥିବା ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱମୁଖୀ ତୀରଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଯୋଡ଼ା ଯାଇଥିବା ପଦମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିକୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{33}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{32}\,a_{23}\,a_{11} - a_{33}\,a_{21}\,a_{12}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}\,(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ଯାହା ଦତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ସହ ସମାନ

**ଉଦାହରଣ 4.12** ସାରସ ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ

$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

**ସମାଧାନ :**

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 7 & 5 & 0 & 7 & 5 \\ 3 & -2 & -4 & 3 & -2 \end{matrix}$$

**ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ :**

$$= (-1)(5)\,(-4) + 2 \times 0 \times 3 + 3 \times 7\,(-2) - 3 \times 5 \times 3 - (-2) \times 0(-1) - (-4) \times 7 \times 2$$

$$= 20 + 0 - 42 - 45 - 0 + 56$$

$$= -11$$

## ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.2

1. ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 3 & 6 \\ 2 & -7 & 9 \end{vmatrix}$$

2. ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3. ସହଉତ୍ପାଦକ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମାନଙ୍କର ମୂଲ୍ୟାୟନ କର ।

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -6 & 2 & -3 \\ 8 & 1 & 7 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

4. ସାରସ-ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମାନଙ୍କର ମୂଲ୍ୟାୟନ କର ।

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -1 & -a & b \\ a & -1 & c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$

5. ସାରସ-ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af - bg^2 - ch^2$$

6. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ କରି x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} x & 3 & 3 \\ 3 & 3 & x \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 28$

## 4.9 ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧର୍ମ (Properties of Determinants)

ଆମେ ଏବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କେତେକ ଧର୍ମ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କରିବାରେ ଏହି ଧର୍ମ ସମୂହ ସାହାଯ୍ୟ କରିବେ ।

**ଧର୍ମ 1 :** ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଅଦଳବଦଳ କଲେ ମଧ୍ୟ ଏହାର ମାନ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।

ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ଏହି ବିସ୍ତାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$= 2\,(3-0) - 0\,(1-6) + 4\,(0+9)$

$= 6 + 36 = 42$

ମନେକର ଦତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ଗୁଡ଼ିକର ଅଦଳବଦଳ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta'$ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।

$$\therefore \Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta'$ କୁ ବିସ୍ତାର କଲେ ପାଇବା (ମନେପକାଅ ଯେ, ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଯେକୌଣସି ଧାଡ଼ି ବା ସ୍ତମ୍ଭକୁ ନେଇ ବିସ୍ତାର କରିପାରିବା)

$$(-)0\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (-1)0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$= 0 + (-3)\,(-2-12) + 0$

$= 42$

ଏହିପରି ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $\Delta = \Delta'$

**ଧର୍ମ – 2 :** ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ)କୁ ଅଦଳବଦଳ କରାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନର କେବଳ ଚିହ୍ନ ହିଁ ବଦଳେ ।

ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କଲେ, ପାଇବା

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(4 - 3) - 3\,(2 - 9) + 1\,(1 - 6)$

$= 2 + 21 - 5 = 18$

ମନେକର $\Delta$ର $C_1$ ଓ $C_2$ କୁ ଅଦଳବଦଳ କରି $\Delta'$ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମିଳେ ।

ତେବେ $\Delta' = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଦ୍ୱାରା $\Delta'$ର ବିସ୍ତାର କଲେ, ପାଇବା

$$\Delta^1 = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$= 3(2 - 9) - 2\,(4 - 3) + 1\,(6 - 1)$

$= -21 - 2 + 5 = -18$

ଅତଏବ $\Delta^1 = -\Delta$

**ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ :** ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଏକ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ) ଏହି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର $n$ ଗୋଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)କୁ ଅତିକ୍ରମ କରେ, ତେବେ ପରିଣାମୀ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta'$ ର ମାନ $\Delta' = (-1)^n \Delta$

ଉଦାହରଣସ୍ୱରପ : $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

$= 2(10 - 24) - 3\,(2 - 0) + 5(4)$

$= -28 - 6 + 20 = -14$

**ଧର୍ମ – 3 :** ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ ।

**ପ୍ରମାଣ :** ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ସମାନ ସ୍ତମ୍ଭ ($C_1$ ଓ $C_2$) ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଏବଂ ମନେକର $C_1$ ଓ $C_2$ କୁ ଅଦଳବଦଳ କଲେ, $\Delta$ରୁ ମିଳୁଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta'$ । ତେବେ $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & c_1 \\ a_2 & a_2 & c_2 \\ a_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ଯାହା $\Delta$ ସହ ସମାନ କିନ୍ତୁ ଧର୍ମ 2 ଅନୁସାରେ, ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ କେବଳ ଚିହ୍ନରେ ବଦଳେ, ଯଦି ଏହାର କୌଣସି ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ପଙ୍କ୍ତି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ଅନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ।

ତେଣୁ $\Delta' = -\Delta$

ଏହିପରି, ଆମେ ପାଇବା $\Delta = -\Delta$

କିମ୍ବା $2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଶୂନ ହେବ, ଯଦି ତା'ର ଦୁଇଟି ସମାନ ପଙ୍କ୍ତି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ଥାଏ ।

**ଧର୍ମ 4 :** ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଏକ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଏକ ଧ୍ରୁବିକ k ଦ୍ୱାରା ଗୁଣାଯାଏ, $k \neq 0$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ k ଗୁଣ ହୋଇଯାଏ ।

ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ

$\Delta = 2(3 - 0) - 1(0 + 0) + (-5)(0 + 12)$

$= 6 - 60 = -54$

ଏବେ ଆମେ $\Delta$ ର ସ୍ତମ୍ଭ 3କୁ 4 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ, ପାଇବା

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -20 \\ 0 & -3 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ, ପାଇବା

$\Delta' = 2(12 - 0) - 1(0 - 0) + (-20)(0 + 12)$

$= 24 - 240 = -216 = 4(-54)$

$= 4\Delta$

**ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ :**

ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ଏହାର ମାନ ଶୂନ ହେବ ।

**ପ୍ରମାଣ :** ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & ka_1 \\ a_2 & b_2 & ka_2 \\ a_3 & b_3 & ka_3 \end{vmatrix}$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର, ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର 3 ଗୁଣ ଅଟନ୍ତି ।

**ଧର୍ମ-4** ଅନୁସାରେ, $\Delta = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}$

$= k \times 0 = 0$ (ଧର୍ମ-3 ଅନୁସାରେ)

**ଧର୍ମ 5 :** ଯଦି ଏକ ନିଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଏକ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ପଦ ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ପଦର (ସମଷ୍ଟି କିମ୍ବା ଅନ୍ତର) ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକଟିକୁ ସମାନକୋଟୀ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ସମଷ୍ଟି (ବା ଅନ୍ତର) ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକର ଅବଶିଷ୍ଟ ଧାଡ଼ି ବା ସ୍ତମ୍ଭ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।

**ପ୍ରମାଣ :** ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} a_1+\alpha & b_1+\beta & c_1+\gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ତେବେ ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ବିସ୍ତାର କଲେ ପାଇବା

$\Delta = (a_1 + \alpha)\,(b_2c_3 - b_3c_2) - (b_1 + \beta)\,(a_2c_3 - a_3c_2)$

$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$

$+ \alpha\,(b_2c_3 - b_3c_2) - \beta(a_2c_3 - a_3c_2) + \gamma\,(a_2b_3 - a_3b_2)$

$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ଏହିପରି $\Delta$ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକଟି ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

**ଧର୍ମ 6 :** ଯଦି କୌଣସି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସହିତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନର k ଗୁଣ ଯୋଗ (କିମ୍ବା ବିୟୋଗ) କରାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।

**ପ୍ରମାଣ :** ମନେକର $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$R_1$ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସହ $R_3$ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନର k ଗୁଣ ଯୋଗକଲେ ଅର୍ଥାତ୍ $R_1 \to R_1 + kR_3$ ନେଲେ

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 + ka_3 & b_1 + kb_3 & c_1 + kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

ତେବେ $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_3 & kb_3 & kc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ଅଥବା, $\Delta' = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ଅଥବା, $\Delta' = \Delta + k \times 0$ (ଧାଡ଼ି 1 ଓ 3 ସମାନ)

$\Delta' = \Delta$

## 4.10 ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟାକର ମୂଲ୍ୟାୟନ (Evaluation of a Determinant using properties)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଉପରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକମାନଙ୍କର ମୂଲ୍ୟାୟନ କରିପାରିବା । ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ସରଳୀକରଣ କରିବା ଅର୍ଥ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଧର୍ମ ପ୍ରୟୋଗରେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ଉପାଦାନକୁ ଶୂନରେ ପରିଣତ କରିବା ଏବଂ ପରେ ସେହି ସ୍ତମ୍ଭ (କିମ୍ବା ଧାଡ଼ି) ଦ୍ଵାରା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ବିସ୍ତାର କରିବା । ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ପ୍ରଥମ, ଦ୍ଵିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ଧାଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $R_1$, $R_2$ ଓ $R_3$ ଦ୍ଵାରା ଏବଂ ପ୍ରଥମ, ଦ୍ଵିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $C_1$, $C_2$ ଓ $C_3$ ଦ୍ଵାରା ସୂଚିତ କରିଥାଉ ।

**ଉଦାହରଣ 4.13** ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$

ଯେଉଁଠାରେ w ହେଉଛି 'ଏକ'ର ଗୋଟିଏ ଅବାସ୍ତବ ଘନମୂଳ ।

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & w & w^2 \\ w & w^2 & 1 \\ w^2 & 1 & w \end{vmatrix}$

ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ସହ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭର ସମଷ୍ଟିକୁ ଯୋଗ କରିବା । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$C_1 \to C_1 + (C_2 + C_3)$

$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 1+w+w^2 & w & w^2 \\ w+w^2+1 & w^2 & 1 \\ w^2+1+w & 1 & w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & w & w^2 \\ 0 & w^2 & 1 \\ 0 & 1 & w \end{vmatrix} = 0$ ($C_1$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ)

'ଏକ'ର ଅବାସ୍ତବ ଘନମୂଳ w ହୋଇଥିବାରୁ

$1 + w + w^2 = 0$

**ଉଦାହରଣ 4.14** ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & bc-ab \\ 0 & b-c & ca-ab \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$ [$R_1 \to R_1 - R_3$ ଓ $R_2 \to R_2 - R_3$]

$= \begin{vmatrix} 0 & a-c & b(c-a) \\ 0 & b-c & a(c-b) \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & -b \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}$

$C_1$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାରକଲେ, $\Delta = (a-c)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & -b \\ 1 & -a \end{vmatrix}$

$= (a – c)\ (b – c)\ (b – a)$

$= (a – b)\ (b – c)\ (c – a)$

**ଉଦାହରଣ 4.15**

**ପ୍ରମାଣ କର :** $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4abc$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -2c & -2b \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} \quad [R_1 \to R_1 - (R_2 + R_3)]$$

$R_1$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ ପାଇବା

$$= 0\begin{vmatrix} c+a & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - (2c)\begin{vmatrix} b & b \\ c & a+b \end{vmatrix} - 2b\begin{vmatrix} b & c+a \\ c & c \end{vmatrix}$$

$= 2c\ [b\ (a + b) – bc] – 2b\ [bc – c\ (c + a)]$

$= 2bc\ [a + b – c] – 2bc\ [b – c – a]$

$= 2bc\ [(a + b – c) – (b – c – a)]$

$= 2bc\ [a + b – c – b + c + a] = 4abc$

**ଉଦାହରଣ 4.16** **ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :**

$$\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 0 & b-c & c-a \\ 0 & c-a & a-b \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$

$= 0$ ($C_1$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ)

ପ୍ରମାଣ କର

$$\begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+c) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix} = 0$$

**ସମାଧାନ :** $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & bc & a(b+c) \\ 1 & ca & b(c+a) \\ 1 & ab & c(a+b) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1 & bc & bc+ab+ac \\ 1 & ca & ca+bc+ba \\ 1 & ab & ab+ca+cb \end{vmatrix} [C_3 \to C_2 + C_3]$

$= (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & bc & 1 \\ 1 & ca & 1 \\ 1 & ab & 1 \end{vmatrix}$

$= (ab + bc + ca) \times 0$ (ଧର୍ମ $-$ 3)

$= 0$

**ଉଦାହରଣ 4.18** ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$$

ସମାଧାନ : $\Delta = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$

$$= abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ 0 & 0 & 2c \\ 0 & 2b & 0 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} R_2 \to & R_2 + R_1 \\ R_3 \to & R_3 + R_1 \end{bmatrix}$$

$= abc(-a)\begin{vmatrix} 0 & 2c \\ 2b & 0 \end{vmatrix}$ ($C_1$ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ)

$= abc\ (-a)\ (-4bc)$

$= 4a^2b^2c^2$

**ଉଦାହରଣ 4.19** ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = a^2(a+3)$

ସମାଧାନ : $\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a+3 & 1 & 1 \\ a+3 & 1+a & 1 \\ a+3 & 1 & 1+a \end{vmatrix} [C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} \begin{bmatrix} C_2 \to & C_2 - C_1 \\ C_3 \to & C_3 - C_1 \end{bmatrix}$$

$$= (a+3) \times (1) \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+3)\,(a^2)$$

$$= a^2(a+3)$$

## ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.3

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} x+3 & x & x \\ x & x+3 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 27(x+1)$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = bc+ca+ab+abc$

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\begin{vmatrix} a & a+b & a+2b \\ a+2b & a & a+b \\ a+b & a+2b & a \end{vmatrix} = 9b^2(a+b)$

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ବୀଜଗଣିତ

ଟିପ୍ପଣୀ

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\begin{vmatrix} (a+1)(a+2) & a+2 & 1 \\ (a+2)(a+3) & a+3 & 1 \\ (a+3)(a+4) & a+4 & 1 \end{vmatrix} = -2$

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$

7. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$

8. ସମାଧାନ କରି x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$$\begin{vmatrix} 3x-8 & 3 & x \\ 3 & 3x-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3x-8 \end{vmatrix} = 0$$

## 4.11 କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ (Solution of a system of linear equations by Cramer's Rule)

ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ବିଚାର କର ।

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

ଏହି ବିଭାଗରେ, ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଓ ତିନି ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିବା ।

x ଓ y ର ଯେଉଁ ମାନ ଯୋଡ଼ି ଦୁଇଟି ସହ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ, ତାହାକୁ ଦତ୍ତ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ତତ୍ପରେ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସଙ୍ଗତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଭୟ ସୀମକରଣର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଧ୍ରୁବକ $c_1$ ଓ $c_2$ ଯେତେବେଳେ ଉଭୟ ଶୂନ ହୁଅନ୍ତି, ସେତେବେଳେ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସଜାତୀୟ ଗୋଷ୍ଠୀ (Homogeneous system) କହନ୍ତି, ଅନ୍ୟଥା ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ଅସମଜାତୀୟ ଗୋଷ୍ଠୀ (Non-homogeneous) କୁହାଯାଏ । ଯେତେବେଳେ ଗୋଷ୍ଠୀଟି ସଜାତୀୟ, ସେତେବେଳେ ସର୍ବଦା ଏହାର ସମାଧାନ $x = y = 0$ । ଏହାକୁ ମାମୁଲି ସମାଧାନ କହନ୍ତି ।

ଯଦି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଏକମାତ୍ର ସମାଧାନ ଥାଏ ଅର୍ଥାତ୍ ମାମୁଲି (trival)

ସମାଧାନ $x = y = 0$ । ପରନ୍ତୁ ଯଦି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ଏକ ଯୋଡ଼ା ନିର୍ଭରଶୀଳ ସମୀକରଣ ହେବ ଏବଂ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ, ଅର୍ଥାତ୍ ଅଣ ମାମୁଲି ସମାଧାନ ରହିବ । ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଣ-ସମଜାତୀୟ (non-homogeneous) ରୈଖିକ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଏକଘାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକମାନଙ୍କର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦୁଇ /ତିନି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସହ ସମୀକରଣର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ ଶିଖିବା । ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ସାହାଯ୍ୟରେ ସହସମୀକରଣର ସମାଧାନକୁ କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ କୁହାଯାଏ ।

### 4.11.1 ଦୁଇ ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ

ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ବିଚାର କର

$2x + 3y - 5 = 0$ ... (i)

$3x + 5y - 7 = 0$ ... (ii)

ସାଧାରଣତଃ, ଏହି ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ ବିଲୋପନ ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ ।

y ର ମାନ ପାଇବା ପାଇଁ, ଆମେ ପାଇବା

$3(2x + 3y - 5) = 0$

$2(3x + 5y - 7) = 0$

$3(2x) + 3(3y) = 3\,(5)$ ... (iii)

$2(3x) + 2(5y) = 2\,(7)$ ... (iv)

(iii) କୁ (iv) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ

$\{2(5) - 3(3)\}\, y = 2(7) - 3(5)$

ଅର୍ଥାତ୍, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \; y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \qquad ...(A)$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ଲବର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ xର ସହଗକୁ ନେଇ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଧ୍ରୁବକ ପଦକୁ ନେଇ ଗଠିତ । ଏବଂ ହରର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ । ଏହିପରି x ର ମାନ ପାଇବା ପାଇଁ (i) ଓ (ii) କୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା

$5\,(2x + 3y - 5) = 0$

$3\,(3x + 5y - 7) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5(2x) + 5(3y) - 5(5) = 0 & \ldots(v) \\ 3(3x + 3(5y) - 3(7) = 0 & \ldots(vi) \end{cases}$$

(v) ରୁ (vi) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ,ପାଇବା

$$\{5(2) - 3(3)\}x = \{5(5) - 3(7)\}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} \ldots(B)$$

ପୁନଶ୍ଚ ଲକ୍ଷ୍ୟକର, x ର ଲବରେ ଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ, ଧ୍ରୁବକ ପଦ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ, yର ସହଗମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ, ଏବଂ xର ହରରେ ଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣାୟକରେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ।

ଏଣୁ $x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$ (ମନେକର)

ଏବଂ $y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$ (ମନେକର)

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ମାଧ୍ୟମରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ଅଟନ୍ତି ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ବିଚାର କର :

$x + y = 3 \ldots (i)$

$2x - 3y = 1$ ... (ii)

ପୁନଶ୍ଚ (i) ଓ (ii) କୁ ଅପସାରଣ ପ୍ରଣାଳୀରେ, x ପାଇଁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବ ।

$-3(x + y) = -3\ (3)$

$1(2x - 3y) = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3(x) - 3(y) = -3(3) & ....(iii) \\ 1(2x) - 1(3y) = 1(1) & ...(iv) \end{cases}$$

(iii) ରୁ (iv) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$-3\ (x) - 1\ (2x) = -3\ (3) - 1(1)$

$\Rightarrow \{-3(1) -1\ (2)\}\ x = -3(3) - 1(1)$

ଅର୍ଥାତ୍ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$ ମନେକର

ପୁନଶ୍ଚ, ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ $D_1$ ରେ ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ, ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ଧ୍ରୁବକ ପଦ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ yର ସହଗମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ D ରେ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ।

ସେହିପରି, y ର ମାନ ପାଇବା ପାଇଁ, (i) ଓ (ii) କୁ ସମାଧାନ କରି y ପାଇଁ ପାଇବା

$2(x) + 2(y) = 2(3)$ ...(v)

$1\ (2x) + 1\ (-3y) = 1\ (1)$ ... (vi)

(vi) ରୁ (v) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$\{1(-3) -2(1)\}\ y = (1) - 2(3)$

ଅର୍ଥାତ୍, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$ (ମନେକର)

ପୁନଶ୍ଚ : ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଯେ, ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ D ହେଉଛି x ଓ y ର ସହଗ ମାନଙ୍କର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଏବଂ y ର ସହଗ ମାନଙ୍କ ସ୍ଥାନରେ ଧ୍ରୁବକ ପଦମାନଙ୍କୁ ବସାଇଲେ $D_2$ ମିଳେ ।

ଏଣୁ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}$ ଏବଂ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}}$

ଏହା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ଅଟେ ।

ଏଣୁ, ଯଦି $a_1x + b_1y = c_1$ ଏବଂ $a_2x + b_2y = c_2$ ଦତ୍ତ ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ସମାଧାନ ହେବ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

ଏବଂ $$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

ଯେତେବେଳେ $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

### 4.11.2 ତିନି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ :

ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ତିନି ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ବିଚାର କର ।

$x + 2y + 3z = 4$

$2x + y + z = 1$ ... (C)

$3x + 3y + 5z = 3$

ମନେକର $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$

ଅର୍ଥାତ୍ D ହେଉଛି, x, y ଓ z ର ସହଗ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ।

ଏଣୁ $xD = \begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2x & 1 & 1 \\ 3x & 3 & 5 \end{vmatrix}$

ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଯଥାକ୍ରମେ y ଓ z ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ସହ ଯୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$$xD = \begin{vmatrix} x+2y+3z & 2 & 3 \\ 2x+y+z & 1 & 1 \\ 3x+3y+5z & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

(C) ରୁ ପାଇବା

$$xD = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = D_1 \text{ (କୁହାଯାଉ)}$$

ଅର୍ଥାତ୍, $xD = D_1 \Rightarrow x = \dfrac{D_1}{D}$

ଏହିପରି, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

ତେବେ, ପୂର୍ବପରି ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଯେ

$yD = D_2$ ଏବଂ $zD = D_3$

ତେଣୁ, $x = \dfrac{D_1}{D}, \quad y = \dfrac{D_2}{D}, \quad Z = \dfrac{D_3}{D}$

ଯେଉଁଠାରେ $D \neq 0$

ଏଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ତିନି ଚଳ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ

ଏଣୁ ଯଦି

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

ତିନି ଚଳ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ହୁଏ, ତେବେ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}$$

ଏବଂ $z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_3}{D}$

ଏଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ, ଯେଉଁଠି

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ତିନି ଚଳ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ ଯେଉଁ ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରନ୍ତି, ଠିକ୍ ସେହି ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ '$n$' ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ $n$ ସଂଖ୍ୟକ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ସମାଧାନ କରିପାରିବା ।

ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ, କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ଭାବରେ ପରିଚିତ । ଏହା ସ୍ୱିସ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଗେବ୍ରିଏଲ କ୍ରାମର୍ (1704 – 1752) ଙ୍କ ନାମରେ ନାମିତ ।

**ଟୀକା :** ଯଦି $D = 0$, ତେବେ କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ ।

**ଉଦାହରଣ 4.20** କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର ।

$$2x + 3y = 5$$
$$3x + 5y = 7$$

**ସମାଧାନ :** $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 9 = 1$

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 21 = 4$$

ଏବଂ $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 15 = -1$

ଏଣୁ, କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଅନୁସାରେ

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{4}{1} = 4$$

ଏବଂ $y = \frac{D_2}{D} = \frac{-1}{1} = -1$

ଏଣୁ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ହେଉଛି $x = 4, y = -1$

**ଉଦାହରଣ 4.21** କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

$$2x + y - 3z = 3$$

$$x + 2y + z = 5$$

$$3x - 5y + 2z = 1$$

**ସମାଧାନ :** ଆମେ ପାଇଲେ

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 2\ (4 + 5) - 1\ (2 - 3) - 3\ (-5-6)$$

$$= 18 + 1 + 33 = 52 \neq 0$$

$D_1$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭଟି ଧ୍ରୁବକ ପଦମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିସ୍ଥାପିତ ହୁଏ ।

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 3\ (4 + 5) - 1\ (10 - 1) -3\ (-25 - 2) = 27 - 9 + 81 = 99$$

$D_2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭଟି ଧ୍ରୁବକ ପଦମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିସ୍ଥାପିତ ହୁଏ ।

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\ (10 - 1) -3\ (2 - 3) -3(1 - 15) = 18 + 3 + 42 = 63$$

$D_3$ ପାଇଁ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭଟି ଧ୍ରୁବକ ପଦ ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିସ୍ଥାପିତ ହୁଏ ।

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 2\,(2 + 25) - 1\,(1 - 15) + 3(-5 - 6) = 35$$

କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{99}{52}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{63}{52}$$

ଏବଂ $z = \frac{D_3}{D} = \frac{35}{52}$

## 4.12 ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ(Condition for a system of linear equations to have unique solution)

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ବିଚାର କର

$$2x + 3y = 4$$

$$x - 2y = 3$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7 \neq 0$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 9 = -17$

ଏବଂ $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$

କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{-17}{-7} = \frac{17}{7}$$

ଏବଂ $y = \frac{D_2}{D} = \frac{2}{-7} = \frac{-2}{7}$

ଏହିପରି, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, $D \neq 0$ ଏବଂ $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ । ଏହି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅଣଶୂନ୍ୟ, ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ହେଉଛି $x = \frac{17}{7}$ ଏବଂ $y = \frac{-2}{7}$

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ସଙ୍ଗତ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ

$x + 2y = 0$

$-2x + 3y = 0$ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ବିଚାର କର

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7 \neq 0$

ପୁନଶ୍ଚ, $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

ଏବଂ $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

ଏଣୁ, $x = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{7} = 0$

ଓ $y = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{7} = 0$

ଏହିପରି, ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $D \neq 0, D_1 = D_2 = 0$, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ମାମୁଲି (trivial) ସମାଧାନ ହେଉଛି $x = y = 0$ ।

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛେ ଯେ $D = 0$ ହେଲେ, କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ ହୁଏ ନାହିଁ । ଏ ସ୍ଥଳେ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିଥାଏ, ଯଥା :

(i) ଏପରି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

(ii) ଏପରି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

ଏବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର

$2x + 4y = 5$

$x + 2y = 3$

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

$\because D = 0$ କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ ଅସମ୍ଭବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

ଏବଂ $D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = 1$

ଅତଏବ, ଯଦି $D = 0$ ଏବଂ $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0,$ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର ସମାଧାନ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଏହି ଅବସ୍ଥା ତିନି ଚଳ ବିଶିଷ୍ଟ ତିନି ଗୋଟି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ । ଏଥିପାଇଁ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ବିଚାର କର

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + 3z &= 3 \qquad \text{... (i)} \\ x + 3y + 5z &= 5 \end{aligned}$$

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(10-9) - 1\,(5-3) + 1\,(3-2)$

$= 1 - 2 + 1 = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $xD = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x & 3 & 5 \end{vmatrix}$

ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ y ଦ୍ୱାରା ଓ 3ୟ ସ୍ତମ୍ଭକୁ z ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଗୁଣଫଳକୁ 1ମ ସ୍ତମ୍ଭ ସହଯୋଗ କଲେ ପାଇବା

$xD = \begin{vmatrix} x+y+z & 1 & 1 \\ x+2y+3z & 2 & 3 \\ x+3y+5z & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix} = D_1$ [(1) କୁ ବ୍ୟବହାର କର ]

ଏହିପରି, $D_1 = 2\,(10-9) - 1\,(15-15) + 1\,(9-10) = 2 - 0 - 1 = 1$

ତେଣୁ, $xD = D_1, \Rightarrow xD = 1$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{D} = \dfrac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ

ସେହିପରି ଭାବରେ, ଆମେ ପାଇବା $yD = D_2$ ଏବଂ $zD = D_3$

ଯେଉଁଠି $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 1(15-15) - 2\,(5-3) + 1(5-3) = 0 - 4 + 2 = -2$

ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(10-9) - 1\,(5-3) + 2\,(3-2) = 1 - 2 + 2 = 1$

$yD = D_2 \Rightarrow y = \frac{D_2}{D} \Rightarrow y = \frac{-2}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ

ଏବଂ $zD = D_3 \Rightarrow z = \frac{D_3}{D} \Rightarrow z = \frac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ

ଏହିପରି, ଯଦି $D = 0$ ଏବଂ $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ ଏବଂ $D_3 \neq 0$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ନାହିଁ ।ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀକୁ ଅସଙ୍ଗତ କୁହାଯାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ବିଚାର କର

$x - y + 3z = 6$

$x + 3y - 3z = -4$

$5x + 3y + 3z = 10$

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(9+9) + 1\,(3+15) + 3\,(3-15)$

$= 18 + 18 - 36 = 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -4 & 3 & -3 \\ 10 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6\,(9+9) + 1\,(-12+30) + 3\,(-12-30)$

$= 108 + 18 - 126 = 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & -4 & -3 \\ 5 & 10 & 3 \end{vmatrix} = 1\,(-12+30) - 6\,(3+15) + 3\,(10+20)$

$= 18 - 108 + 90 = 0$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1\,(30+12) + 1\,(10+20) + 6\,(3-15) = 42 + 30 - 72 = 0$

ଏଠାରେ, ଆମେ କହିବା $D = 0$ ଓ $D_1 = D_2 = D_3 = 0$ ପାଇଁ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ସମୀକରଣକୁ ବିଚାର କର

ଅର୍ଥାତ୍, $x - y + 3z = 6$

$x + 3y - 3z = -4$

ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$$x - y = 6 - 3z$$

$$x + 3y = -4 + 3z$$

ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ଦ୍ୱାରା ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6-3z & -1 \\ -4+3z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3(6-3z)+1(-4+3z)}{3+1}$$

$$= \frac{18-9z-4+3z}{4} = \frac{14-6z}{4}$$

$$x = \frac{7-3z}{2}$$

ଏବଂ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 6-3z \\ 1 & -4+3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \dfrac{1(-4+3z)-1(6-3z)}{3+1}$

$$= \frac{-4+3z-6+3z}{4} = \frac{-10+6z}{4}$$

$$y = \frac{-5+3z}{2}$$

ମନେକର $z = k$, ଯେଉଁଠି $k$ କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ

$x = \dfrac{7-3k}{2}$, $y = \dfrac{-5+3k}{2}$ ଏବଂ $z = k$

ଏହିପରି, ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ।

ତେଣୁ, ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲେ ଯେ ଏକ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ପାଇଁ ($D_i$= 1, 2, 3 ... n)

(i) ଯଦି $D \neq 0$, ଏବଂ $D_1, D_2, D_3 \ldots D_n$ ମଧ୍ୟରୁ ଅନ୍ୟୁନ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଶୂନ ନହେଲେ, ଗୋଷ୍ଠୀର ଅଣଶୂନ୍ୟ ଓ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

(ii) ଯଦି $D \neq 0$ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ $D_i = 0$, ତେବେ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାମୁଲି ସମାଧାନ $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ ରହିବ ।

(iii) ଯଦି $D = 0$ ଏବଂ କେତେକ $D_i \neq 0$, ତେବେ ଗୋଷ୍ଠୀର ଆଦୌ ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

(iv) ଯଦି $D = 0$ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ $D_i = 0$, ତେବେ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

**ଉଦାହରଣ 4.22** ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

$$x + y + z = 2$$

$$2x + 7y - 3z = 5$$

$$3x + 5y - z = 4$$

**ସମାଧାନ :** ଏଠାରେ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & -3 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 1\,(-7 + 15) - 1\,(-2 + 9) + 1\,(10 - 21) = 8 - 7 - 11 = -10 \neq 0$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & -3 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 2\,(-7 + 15) - 1\,(-5 + 12) + (25 - 28) = 16 - 7 - 3 = 6$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\,(-5 + 12) - 2\,(-2 + 9) + 1\,(8 - 15) = 7 - 14 - 7 = -14$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 1(28 - 25) - 1\,(8 - 15) + 2\,(10 - 21) = 3 + 7 - 22 = -12$$

$\because D \neq 0$ ଓ $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$, ତେଣୁ, ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ ।

ଏହିପରି କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{6}{-10} = \frac{-3}{5}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-10} = \frac{7}{5}$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-12}{-10} = \frac{6}{5}$$

ଏଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ସମୂହ ।

**ଉଦାହରଣ 4.23** ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x - 3y + 4z = -9$
$-3x + 4y + 2z = -12$
$4x - 2y - 3z = -3$

(ii) $x + 2y - z = 0$
$2x + y + 2z = 0$
$x - 3y + z = 0$

(iii) $x + 2y + z = 2$
$2x + y + 2z = 3$
$x - 3y + z = 4$

(iv) $x + 2y + 3z = 1$
$3x - y + 2z = 1$
$4x + y + 5z = 2$

**ସମାଧାନ :**

(i) $2x - 3y + 4z = -9$
$-3x + 4y + 2z = -12$
$4x - 2y - 3z = -3$

ଏଠାରେ,

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-12+4) + 3(9-8) + 4(6-16) = -16 + 3 - 40 = -53 \neq 0$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ

$$D_1 = \begin{vmatrix} -9 & -3 & 4 \\ -12 & 4 & 2 \\ -3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -9(-12+4) + 3(36+6) + 4(24+12)$$

$= 72 + 126 + 144 = 342$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -9 & 4 \\ -3 & -12 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2(36+6) + 9(9-8) + 4(9+48) = 84 + 9 + 228 = 321$$

ଏବଂ

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -9 \\ -3 & 4 & -12 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2(-12-24) + 3(9+48) - 9(6-16)$$

$= -72 + 171 + 90 = 189$

$\because D \neq 0$ ଏବଂ $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, D_3 \neq 0$

$\therefore$ ଏହି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅଣଶୂନ ଓ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି, ଯାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା

$$x = \frac{D_1}{D} = \frac{342}{-53} = \frac{-342}{53}$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{321}{-53} = \frac{-321}{53}$$

ଏବଂ $z = \frac{D_3}{D} = \frac{189}{-53} = \frac{-189}{53}$

(ii) $x + 2y - z = 0$

$2x + y + 2z = 0$

$x - 3y + z = 0$

ଏଠାରେ,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1\,(1+6) - 2\,(2-2) - 1\,(-6-1)$$

$= 7 + 7 = 14 \neq 0$ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$ (ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କଲେ)

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

ଏହିପରି, ଆମେ ପାଇବା ଯେ, $D \neq 0$, ଏବଂ $D_1 = D_2 = D_3 = 0$

$\therefore$ ଏହି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

ବାସ୍ତବତଃ, ଏହାର ମାମୁଲି ସମାଧାନ ହେଉଛି $x = 0$ , $y = 0$, $z = 0$ ।

(iii) $x + 2y + z = 2$

$2x + y + 2z = 3$

$x - 3y + z = 4$

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+6) - 2(3-8) + 1(-9-4)$

$= 14 + 10 - 13 = 11$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; (\because C_1 = C_3)$

ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4+9) - 2(8-3) + 2(-6-1)$

$= 13 - 10 - 14 = -11$

$\because$ $D = 0$ ଓ $D_1 \neq 0$, $D_2 = 0$ ଓ $D_3 \neq 0$

$\therefore$ ଏହି ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ନାହିଁ ।

(iv) $x + 2y + 3z = 1$

$3x - y + 2z = 1$

$4x + y + 5z = 2$

ଏଠାରେ, $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(-5-2) - 2\,(15-8) + 3\,(3+4) = -7 - 14 + 21 = 0$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ

$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(-5-2) - 2\,(5-4) + 3\,(1+2) = -7 - 2 + 9 = 0$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\,(5-4) - 1\,(15-8) + 3\,(6-4) = 1 - 7 + 6 = 0$

ଏବଂ $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(-2-1) - 2(6-4) + 1(3+4)$

$= -3 - 4 + 7 = 0$

ଅତଏବ, ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ଅସଂଖ୍ୟ ।

## ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.4

1. କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

   (a) $2x - 4y = 3x$, $3x + y = 5$　　(b) $x + 2y = 1$, $x + 5y = 3$

2. କ୍ରାମର୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $2x + y + 3z = 1$, $x + 4y + 6z = 9$, $4x + 3y + 9z = 5$

   (b) $2x - 3y + 2z = 1$, $x + 3y - z = -2$, $x - y + 3z = 3$

   (c) $3x - 4y + 5z = -6$, $x + y - 2z = -1$, $2x + 3y + z = 5$

3. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର :

   (a) $3x + 2y = 4$, $2x + y = 3$　　(b) $6x - 3y = -1$, $2x + 2y = -3$

   (c) $2x + 3y + 4z = 8$, $3x + y - z = -2$, $4x - y - 5z = -9$

   (d) $x + 3y - z = 4$, $3x - 2y + 5z = -4$, $5x - y - 4z = -9$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସେମାନଙ୍କର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $x - 2y = 4$, $-3x + 5y = -7$

   (b) $2x - y + z = 0$, $x + y - 2z = 0$, $3x + 2y - z = 0$

## ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- $a_1b_2 - a_2b_1$ ପରିପ୍ରକାଶଟି $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।
- ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ୍ ସହ ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ।
- କୌଣସି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଏକ ଉପାଦାନର ମାଇନର୍, ଉପାଦାନଟି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଯେଉଁ ସ୍ତମ୍ଭ ଓ ଧାଡ଼ିରେ ଅଛି, ତାକୁ ବାଦ୍ ଦେବା ଦ୍ୱାରା ମିଳେ ।
- କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଉପାଦାନ $a_{ij}$ ର ସହଉତ୍ପାଦକ ହେଉଛି ଉପାଦାନ $a_{ij}$ ଓ $(-1)^{i+j}$ ର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ।

- କୌଣସି ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ବା ଧାଡ଼ି ବ୍ୟବହାର କରି, ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ବିସ୍ତାର କରିପାରିବା । ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ସର୍ବଦା ସମାନ ହେବ ।
- ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯାହାର ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଶୂନ ଅଟେ, ତାହାକୁ ସିଙ୍ଗୁଲାର୍ (Singular) ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।
- ଯଦି କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ଅଦଳବଦଳ କରାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।
- ଯଦି କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ)କୁ ଅଦଳବଦଳ କରାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମୂଲ୍ୟ କେବଳ ଚିହ୍ନରେ (+, –) ବଦଳେ ।
- ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ) ଅବିକଳ ସମାନ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଶୂନ ।
- ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଗୋଟିଏ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ସେହି ଧ୍ରୁବକ ଗୁଣ ହୁଏ ।
- ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ) ସମାନୁପାତୀ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଶୂନ ହେବ ।
- ଯଦି ଏକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଧାଡ଼ି କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ପଦର ଯୋଗଫଳ (ଅନ୍ତରଫଳ) ରୂପେ ଲେଖାଥାଏ । ତେବେ ଏହି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକକୁ ସେହି କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ସମଷ୍ଟି (ବା ଅନ୍ତର) ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇ ପାରିବ ।
- ଯଦି କୌଣସି ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର କୌଣସି ଏକ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ସହିତ ଅନ୍ୟ ଏକ ବା ଏକାଧିକ ଧାଡ଼ି (କିମ୍ବା ସ୍ତମ୍ଭ)ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କର ଗୁଣିତକକୁ ଯୋଗ (ବା ବିୟୋଗ) କରାଯାଏ, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ମାନ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ ।
- ଏକଘାତୀର ସମାଧାନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ

  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$ ର ସମାଧାନ ହେଉଛି

  $x = \frac{D_1}{D},\ y = \frac{D_2}{D}$ ଏବଂ $z = \frac{D_3}{D}$

  $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ଏବଂ

  $D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$, ଯେଉଁଠି $D \neq 0$
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ

  $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
  $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$
  $a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

(a) ସଙ୍ଗତ ଏବଂ ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି, ଏବଂ ଯଦି $D \neq 0$

(b) ଅସଙ୍ଗତ ଓ ଆଦୌ ସମାଧାନ ନାହିଁ, ଯଦି $D = 0$, $D_1$, $D_2$, $D_3$ କୌଣସିଟି ଶୂନ ନୁହେଁ ।

(c) ସଙ୍ଗତ ଓ ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ରହିବ, ଯଦି $D = D_1 = D_2 = D_3 = 0$

## ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

## ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ର ସମସ୍ତ ମାଇନର୍ ଓ ସହଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. $\begin{vmatrix} 43 & 1 & 6 \\ 35 & 7 & 4 \\ 17 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ ର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ବିସ୍ତାର କରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix}$ ସାରସ ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ସମାଧାନ କରି x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$$

5. ନିର୍ଣ୍ଣାୟକର ଧର୍ମ ବ୍ୟବହାର କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)\,(c-a)(a-b)$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & x+y & x^2+y^2 \\ 1 & y+z & y^2+z^2 \\ 1 & z+x & z^2+x^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$

6. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & w^3 & w^5 \\ w^3 & 1 & w^4 \\ w^5 & w^5 & 1 \end{vmatrix}$ w ହେଉଛି 1 ର ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ଘନମୂଳ ।

7. କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର ।

(a) $x - 2y = 3$, $2x + 3y = 4$  (b) $2x - 3y = 3$, $3x + 2y = 11$  (c) $x + y = 2$, $4x - 3y = 3$

8. କ୍ରାମରଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀର ସମାଧାନ କର ।

(a) $2x + y + 3z = 8$, $3x + 2y + 3 = z$, $x + 3z = 1 + 2y$  (b) $x - 2y = 3 + z$, $2x + z = y$, $3 - x = 2z - 3y$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୋଷ୍ଠୀ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ଅଛି ସ୍ଥିର କର ।

(a) $2x - 6y + 1 = 0$, $x - 3y + 2 = 0$  (b) $2x - 3y = 5$, $x - 2y = 6$

(c) $2x + 3y + z = 1$, $4x - 6y + z = 3$, $6x - 3y + 2z = 5$  (d) $3x + y + 2z = -1$, $x + 2y - z = 2$, $2x - y + 3z = 1$

## ଉତ୍ତର ମାଳା

### ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.1

1. (a) 11 (b) 1 (c) 0 (d) $(a^2 + b^2) - (c^2 + d^2)$
2. (a) ଏବଂ (d)
3. (a) 18 (b) –54 (c) $a\,d\,f + 2\,b\,c\,e - ae^2 - fb^2 - de^2$ (d) $x - 1$

### ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.2

1. $M_{21} = 39, C_{21} = -39$
   $M_{22} = 3; C_{22} = 3$
   $M_{23} = -11; C_{23} = 11$
2. $M_{13} = -5; C_{13} = -5$
   $M_{23} = -7; C_{23} = 7$
   $M_{33} = 1; C_{33} = 1$
3. (a) 19 (b) 0 (c) –131
   (d) $(a - b)(b - c)(c - a)$ (e) 4abc (f) 0
4. (a) 4 (b) 20 (c) $a^2 + b^2 + c^2 + 1$
6. (a) $x = 2$ (b) $x = 2, 3$ (c) $x = 2, \frac{-17}{7}$

### ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.3

7. (a) $a^3$ (b) $2abc\,(a + b + c)^3$
8. $x = \frac{2}{3}, \frac{11}{3}, \frac{11}{3}$

### ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.4

1. (a) $x = \frac{23}{14}, y = \frac{1}{14}$ (b) $x = -1, y = 1$
2. (a) $x = -1, y = 2, z = \frac{1}{3}$ (b) $x = \frac{-3}{4}, y = 0, z = \frac{5}{4}$
   (c) $x = -1, y = 2, z = 1$
3. (a) $x = 2, y = -1,$ (b) $x = \frac{-11}{8}, y = \frac{-8}{9}$

(c) $x = 1, y = -2, z = 3$ (d) $x = -1,\ y = \frac{24}{13}, z = \frac{7}{13}$

4. (a) ହଁ; $x = -6, y = -5$ (b) ହଁ; $x = 0, y = 0, z = 0$

(c) $x = 0, y = 3, z = 2$

## ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $M_{11} = -2, M_{12} = -1, M_{13} = 1, M_{21} = -7, M_{22} = -5$

$M_{23} = -1, M_{31} = -8, M_{32} = -7, M_{33} = -2$

$C_{11} = -2, C_{12} = 1, C_{13} = 1, C_{21} = 7, C_{22} = -5,$

$C_{23} = 1, C_{31} = -8, C_{32} = 7, C_{33} = -2$

2. 0 3. –31 4. $x = 0, x = 1$

6. (a) –8 (b) 0

7. (a) $x = \frac{17}{7}, y = \frac{-2}{7}$ (b) $x = 3, y = 1$ (c) $x = \frac{9}{7}, y = \frac{5}{7}$

8. (a) $x = 2, y = 3, z = 3$ (b) $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2}, z = -\frac{1}{2}$

9. (b) କେବଳ