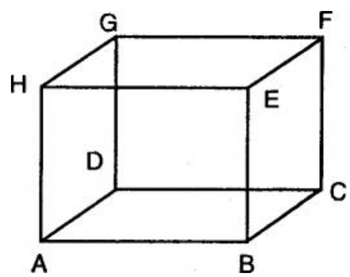
୩୫

ସରଳ ରେଖା

ଚିତ୍ର 35.1, ରେ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଆୟତଘନ ଆକୃତିର ବାକ୍ସ ଦେଖୁଛେ, ଯାହାର ଛଅଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ଅଛି ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ଛଅଟି ସମତଳର ଅଂଶ । ଚିତ୍ରରେ ABCD ଏବଂ EFGH ସମାନ୍ତର ସମତଳ । ସେହିପରି ADGH ଏବଂ BCFE ସମାନ୍ତର ସମତଳ ଏବଂ ସେହିପରି ABEH ଏବଂ CFGD ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସମତଳ । ABCD ଏବଂ CFGD ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ରେଖା CD ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ସେହିପରି ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଲଗ୍ନ ସମତଳରେ ଏହା ଘଟିଥାଏ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ଧାର, ମନେକରାଯାଉ AB ଏବଂ AH ପରସ୍ପର ସହିତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ରେ ମିଳିତ ହେଉଛନ୍ତି । ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଲଗ୍ନ ଧାରରେ ମଧ୍ୟ ଏହିପରି ଘଟିଥାଏ । ତେଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ସମତଳ ପାଖ ମାନେ ପରସ୍ପର ସହିତ ରେଖାରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ଧାରଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ସହିତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର 35.1

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ, ଆମେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ସରଳରେଖାର ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମରେ ସମୀକରଣ, ସରଳରେଖାର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ, ଏକ ସରଳରେଖା ଠାରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ ଏକ ସରଳରେଖା ଓ ଏକ ସମତଳ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଆମେ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବାର ସର୍ତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ପଢି ସାରିବା ପରେ ଆମେ

- ସ୍ପେସରେ ଥିବା ସରଳରେଖାର ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମ (ପ୍ରତିସମ ରୂପ)ରେ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା;
- ସରଳରେଖାର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବା ;
- ଏକ ସରଳରେଖା ଠାରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ;
- ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏବଂ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା,
- ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ନିରୂପଣ କରିପାରିବା ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତିର ସାଧାରଣ ଜ୍ଞାନ;
- ଏକ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ / ରେସିଓ ଏବଂ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ;
- ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହେବାର ସର୍ତ୍ତ;

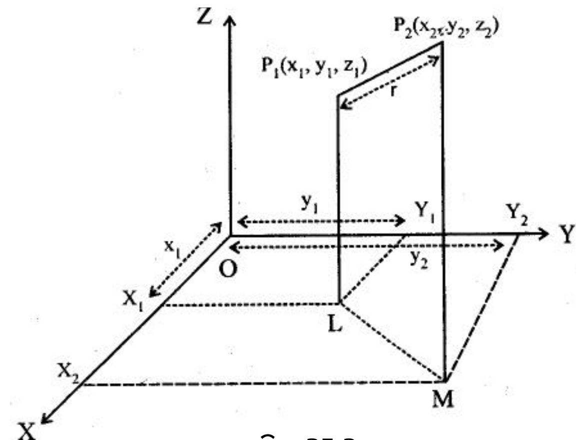
- ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ;
- ବିଭିନ୍ନ ରୂପରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ;
- ଦୁଇଟି ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ।

35.1 ସରଳରେଖାର ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ସମୀକରଣ (Equation of a line in symmetric form)

ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ନିଆଯାଉ ଯାହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ । ମନେକର P_1 ଏବଂ P_2 ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 'r' ଏବଂ P_1P_2 ର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଉଛନ୍ତି $\cos\alpha, \cos\beta$ ଏବଂ $\cos\gamma$ । P_1 ଏବଂ P_2 ବିନ୍ଦୁରୁ XY - ସମତଳ ଉପରେ P_1L ଏବଂ P_2M ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । L ଏବଂ M ବିନ୍ଦୁରୁ OY ଏବଂ OX ଉପରେ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ (ଚିତ୍ର. 35.2) । ଏଠାରେ ଆମେ ପାଇବା

ଏବଂ $x_2-x_1 = r\cos\alpha,\ y_2-y_1 = r\cos\beta,$

$z_2-z_1 = r\cos\gamma$ ... (i)



ଚିତ୍ର 35.2

(i) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{x_2-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y_2-y_1}{\cos\beta} = \frac{z_2-z_1}{\cos\gamma}$$

ଅର୍ଥାତ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ, ରେଖାଖଣ୍ଡର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ମାନଙ୍କ ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ।

ଯଦି P_1 ଏବଂ P_2 ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦିଆଯାଇଥାଏ, ତେବେ P_1P_2 ର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଯଦି କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଦିଆଯାଇଥାଏ, ତେବେ ରେଖାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ତେଣୁ ଯଦି $P_2(x_2, y_2, z_2)$ କୁ ଆମେ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ $P(x, y, z)$ ରୂପେ ନେବା, ତେବେ

$P(x_1, y_1, z_1)$ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏବଂ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ । ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟି ହେବ

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = r \text{ (ମନେକର)} \quad \text{... (ii)}$$

ଯଦି ସରଳରେଖାର ଡିରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m, n ହୁଏ, ତେବେ ସମୀକରଣ (ii) କୁ ଲେଖିପାରିବା

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} = r \quad \text{... (A)}$$

ସମୀକରଣ (A) କୁ ସରଳରେଖାର ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ କହିବା ।

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଯେତେବେଳେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମରେ ଥାଏ, ସେମାନେ ସ୍ୱାଧୀନ ଭାବରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସମତଳର ସମୀକରଣ, ଯେଉଁଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଦୁଇଟି ସମତଳର ଛେଦ ହେଉଛି ଏକ ସରଳରେଖା ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (i) : ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ଏବଂ ଏହା (x_1, y_1, z_1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି, ତେବେ ଏହା ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ 'P' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ $(x_1+lr, y_1+mr,$

ଟିପ୍ପଣୀ

z_1+nr) ଯେଉଁଠି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1) ଠାରୁ 'P' ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା 'r' ଅଟେ ।

(ii) ଯଦି ସରଳରେଖାଟିର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ a, b, c ହୁଏ ଏବଂ ଏହା (x_1, y_1, z_1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ, ତେବେ ଏହାର ସମୀକରଣ ହେବ

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}=r \qquad \ldots (B)$$

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1) ଠାରୁ 'P' ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରକୃତ ଦୂରତା r ହେବ ନାହିଁ ।

(iii) ମନେକର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ । P_1P_2 ର ଡାଇକସନ୍ କୋସାଇନ୍ x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1 ସହିତ ସମାନୁପାତୀ । ସରଳରେଖା P_1P_2 ଉପରେ ଯଦି $P(x, y, z)$ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ P_1 ଏବଂ P_2 ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହେବ

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \qquad \ldots (C)$$

(C) ରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ସରଳରେଖାର ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ବା ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ଫର୍ମ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 35.1

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ଏବଂ ଏହା (1, 2, –3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିଲେ ଏହାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା

$$\frac{x-1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{y-2}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{z+3}{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$$ ((A)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି)

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+3}{-1}$$

$$\Rightarrow x-1 = y-2 = -(z+3)$$

ଉଦାହରଣ 35.2

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯିଏ (1, –3, 2) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି ଏବଂ ଯାହାର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ (1, –2, 3)

ସମାଧାନ : ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-2}{3}$$ ((B) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି)

ଉଦାହରଣ 35.3

ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (1, –3, 2) ଏବଂ (4, 2, –3) ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$$\frac{x-1}{4-1}=\frac{y+3}{2+3}=\frac{z-2}{-3-2}$$ ((C) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି)

$$\Rightarrow \frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z-2}{-5}$$

ଉଦାହରଣ 35.4

ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା (1, –5, –6) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ (0, 2, 3), (–1, 3, 7) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର ।

ସମାଧାନ : (0, 2, 3) ଏବଂ (–1, 3, 7) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ –1–0, 3–2, 7–3

ଅର୍ଥାତ୍ –1, 1, 4

∴ ଏହି ରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓଗୁଡ଼ିକୁ –1, 1, 4 ନେଇପାରିବା । ତେଣୁ (1, –5, –6) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏବଂ ଦତ୍ତ ରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+6}{4}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.1

1. (1, –2, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଏବଂ 3, –4, 5 ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. (3, –9, 4) ଏବଂ (–9, 5, –4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. (–7, 5, 3) ଏବଂ (2, 6, 8) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. (–4, 7, 2) ଏବଂ (5, –3, –2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର ଥିବା ଏବଂ (1, 2, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ୍ ଫର୍ମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କ ସହିତ ସମାନ କୋଣ କରୁଥିବା ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

35.2 ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ (Reduction of the equation of a line into symmetric form)

ତୁମେ ମନେ ପକାଅ ଯେ, ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ସମତଳର ଛେଦ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ।

ମନେକର ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

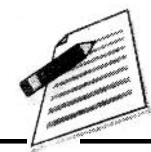
$ax+by+cz+d = 0$ ... (i)

$a'x+b'y+c'z+d' = 0$ ... (ii)

ମନେକର ସମତଳଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସରଳରେଖା AB ରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । AB ସରଳରେଖାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ଉଭୟ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ତେଣୁ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

ତେଣୁ (i) ଏବଂ (ii) ଉଭୟ ଏକତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ସମୀକରଣ $ax+by+cz = 0$ ଏବଂ $a'x+b'y+c'z = 0$ ଏକତ୍ର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣକୁ



ସୂଚାଏ ଯାହା ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ ପୂର୍ବ ସରଳରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର କାରଣ ଉପରୋକ୍ତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରନ୍ତି । ଉପରୋକ୍ତ ରୂପରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ରେଖାର ସମୀକରଣକୁ ସରଳରେଖାର ସାଧାରଣ ରୂପ (ନନ୍ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମ) କୁହାଯାଏ ।

(i) ଏବଂ (ii) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମକୁ ବଦଳାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଏବଂ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଆବଶ୍ୟକ କରୁ । ମନେକର ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n । ଯେହେତୁ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମତଳ (i) ଏବଂ (ii) ର ନର୍ମାଲ ପ୍ରତି ସରଳରେଖାଟି ଲମ୍ବ, ତେଣୁ

$al+bm+cn = 0$ ଏବଂ $a'l+b'm+c'n = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{l}{bc'-b'c} = \frac{m}{ca'-c'a} = \frac{n}{ab'-a'b}$$

ତେଣୁ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ $(bc'-b'c)$, $(ca'-c'a)$ ଏବଂ $(ab'-a'b)$ ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ।

ସମୀକରଣ (i) ଏବଂ (ii) ରେ $z = 0$ ବସାଇଲେ ଆମେ ସରଳରେଖାଟି XY - ସମତଳକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ, ତାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପାଇପାରିବା । ସମୀକରଣ (i) ଏବଂ (ii) ରେ $z = 0$ ବସାଇଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$ax+by+d = 0 \qquad \ldots \text{(iii)}$$

$$a'x+b'y+d' = 0 \qquad \ldots \text{(iv)}$$

(iii) ଏବଂ (iv) କୁ ସମାଧାନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$x = \frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}, y = \frac{da'-d'a}{ab'-a'b}$$

$\therefore$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}, \frac{da'-d'a}{ab'-a'b}, 0\right)$$

$\therefore$ ସରଳରେଖାର ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ସମୀକରଣ ହେବ

$$\frac{x - \frac{bd'-b'd}{ab'-a'b}}{bc'-b'c} = \frac{y - \frac{da'-d'a}{ab'-a'b}}{ca'-c'a} = \frac{z}{ab'-a'b}$$

ମନେରଖ : ଦୁଇଟି ଯାକ ସମୀକରଣର ଅନନ୍ୟ ସମାଧାନ ପାଇଁ $z = 0$ ବଦଳରେ ଆମେ $x = 0$ କିମ୍ବା $y = 0$ କିମ୍ବା x, y, z ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକ ପାଇଁ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ଉପଯୁକ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 35.5

ସରଳରେଖା ଲାଗି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $x-2y+3z = 4$, $2x-3y+4z = 5$କୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ପ୍ରକାଶ କର ଏବଂ ଏହାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର z - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି $z = 0$ ।

$\therefore$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସମୀକରଣ ହେବ

$x-2y = 4$

$2x-3y = 5$

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

ଯାହାକୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା $x = -2, y = -3$

$\therefore$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $(-2, -3, 0)$

ମନେକର ସରଳରେଖାଟିର ଡିରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଉଛି l, m, n ।

ଯେହେତୁ ସରଳରେଖାଟି ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ନର୍ମାଲ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତେଣୁ

$l - 2m + 3n = 0$

$2l - 3m + 4n = 0$

$$\Rightarrow \frac{l}{-8+9} = \frac{m}{6-4} = \frac{n}{-3+4}$$

$$\Rightarrow \frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{1} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow l = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}, m = \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, n = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

$\therefore$ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\frac{x+2}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}} = \frac{y+3}{\pm\frac{2}{\sqrt{6}}} = \frac{z}{\pm\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{1}$$

ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଲା

$\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ (ସବୁବେଳେ ସମାନ ଚିହ୍ନ ନେବା)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ପରିଣତ କର ।

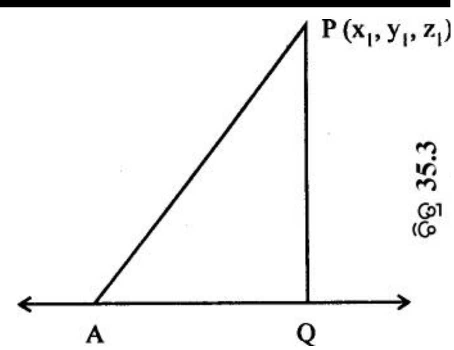
(i) $x+5y-z = 7$ ଏବଂ $2x-5y+3z = -1$

(ii) $x+y+z+1 = 0$ ଏବଂ $4x+y-2z+2 = 0$

(iii) $x-y+z+5 = 0$ ଏବଂ $x-2y-z+2 = 0$

35.3 ଗୋଟିଏ ସରଳ ରେଖା ଠାରୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା (Perpendicular distance of a point from a line)

ମନେକର ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା AQ ର ସମୀକରଣ $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ଯେଉଁଠି AQ ସରଳରେଖାର ଡାରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m, n ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁରୁ ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ Q ଏବଂ A ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (α, β, γ) ।



ଚିତ୍ର 35.3

ଚିତ୍ର : 35.3 ରେ, $PQ^2 = AP^2 - AQ^2$

ବର୍ତ୍ତମାନ $AP^2 = (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2$

ପୁନଶ୍ଚ ସରଳରେଖା ଉପରେ AP ର ଅଭିକ୍ଷେପ

$AQ = l(x_1-\alpha) + m(y_1-\beta) + n(z_1-\gamma)$

$$\therefore PQ^2 = \left\{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 + (z_1-\gamma)^2\right\}$$

$$-\left\{l(x_1-\alpha) + m(y_1-\beta) + n(z_1-\gamma)\right\}^2$$

ଯେଉଁଥିରୁ ଆମେ P ବିନ୍ଦୁରୁ ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଦୂରତା PQ ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 35.6

(2, 3, 1) ବିନ୍ଦୁରୁ ସରଳରେଖା $y+z-1 = 0 = 2x-3y-2z+4$ ର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁର z- ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ $z = 0$ ନିଆଯାଉ । ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟରେ $z = 0$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y = 1$ ଏବଂ $2x-3y+4 = 0$

ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କଲେ ପାଇବା

$$x = -\frac{1}{2}, y = 1$$

$\therefore$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

ମନେକର ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n

ତେଣୁ $0 \cdot l+m+n = 0$ ଏବଂ $2l-3m-2n = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $m+n = 0$ ଏବଂ $2l-3m-2n = 0$

$$\Rightarrow \frac{l}{1} = \frac{m}{2} = \frac{n}{-2} = \frac{1}{\pm 3}$$

$$\Rightarrow l = \pm\frac{1}{3}, m = \pm\frac{2}{3}, n = \mp\frac{2}{3}$$

ଯଦି ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ (2, 3, 1) ରୁ ସରଳରେଖାର ଲମ୍ବ ଦୂରତା PQ, ତେବେ

$$PQ^2 = \left\{\left(2+\frac{1}{2}\right)^2 + (3-1)^2 + (1-0)^2\right\} - \left(\frac{5}{2}\times\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\times 2 - 1\times\frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \left(\frac{25}{4} + 4 + 1\right) - \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$= \frac{45}{4} - \frac{9}{4} = 9$$

$\therefore PQ = 3$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଦୂରତା = 3 ଏକକ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.3

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଠାରୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ସରଳରେଖା $\frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{3}$ ଠାରୁ (0, 2, 3) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

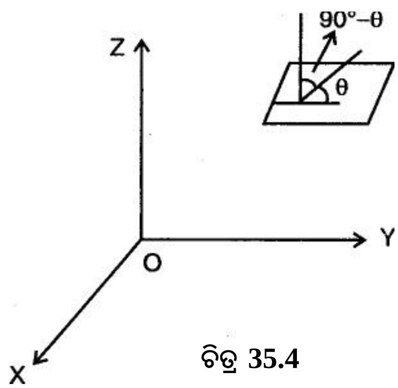
(ii) ସରଳରେଖା $\frac{x-13}{5}=\frac{y+8}{-6}=\frac{z-31}{1}$ ଠାରୁ (–1, 3, 9) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

(iii) ସରଳରେଖା x+y+z = 4, x–2y–z = 4 ଠାରୁ (4, 1, 1) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

(iv) ସରଳରେଖା x+y+z = 4, x–2y–z = 4 ଠାରୁ (3, 2, 1) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

35.4 ସରଳରେଖା ଏବଂ ସମତଳ ମଧ୍ୟରେ କୋଣ (Angle between a line and a plane)

ଯଦି ସରଳରେଖା ଏବଂ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା ଏବଂ ସମତଳ ପ୍ରତି ନର୍ମାଲ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ $90^0-\theta$ ହେବ ।



ଚିତ୍ର 35.4

ମନେକର ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$$\frac{x-x'}{l}=\frac{y-y'}{m}=\frac{z-z'}{n} \quad \text{... (i)}$$

ଏବଂ ସମତଳର ସମୀକରଣ ax+by+cz+d = 0 ... (ii)

(i) ଏବଂ (ii) ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ ବୋଲି ନିଆଯାଇଛି

$$\therefore \sin\theta=\cos(90-\theta^0)=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ଉଦାହରଣ 35.7

ସରଳରେଖା $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}$ ଏବଂ ସମତଳ 2x–3y+4z–7 = 0 ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯଦି ଦତ୍ତ ରେଖା ଓ ଦତ୍ତ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ହୁଏ, ତେବେ

$$\sin\theta=\frac{2\times3-3\times3+4\times1}{\sqrt{3^2+3^2+1^2}\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{19}\sqrt{29}}=\frac{1}{\sqrt{551}}$$

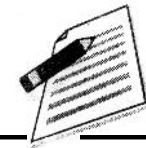
$$\therefore \theta=\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{551}}\right)$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.4

1. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଥିବା ସରଳରେଖା ଓ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ସରଳରେଖା : $\frac{x-4}{1}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-1}$ ଏବଂ ସମତଳ : 3x–4y+5z = 5

(ii) ସରଳରେଖା : $\frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{3}$ ଏବଂ ସମତଳ : –2x+4y–5z = 20



(iii) ସରଳରେଖା : $\frac{x}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+2}{5}$ ଏବଂ ସମତଳ : $x-4y+6z = 11$

(iv) ସରଳରେଖା $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+4}{1}$ ଏବଂ ସମତଳ $4x-3y-z-7 = 0$

35.5 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ (Condition of coplanarity of two lines)

ଯଦି ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{... (i)}$$

ଏବଂ $$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2} \quad \text{... (ii)}$$

ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନେ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ।

ସରଳରେଖା (i) ଅବସ୍ଥାନ କରୁ ଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ

$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1) = 0$ ... (iii)

ଏବଂ $Al_1+Bm_1+Cn_1 = 0$ ... (iv)

ଯଦି ସମତଳ (iii) ଉପରେ ସରଳରେଖା (ii) ଅବସ୍ଥାନ କରେ, ତେବେ (x_2, y_2, z_2) ବିନ୍ଦୁଟି ନିଶ୍ଚୟ ସମତଳ (iii) ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ, ତେଣୁ

$A(x_2-x_1)+B(y_2-y_1)+C(z_2-z_1) = 0$ ... (v)

ଏବଂ $Al_2+Bm_2+Cn_2 = 0$ ... (vi)

(iv), (v) ଏବଂ (vi) ରୁ A, B ଏବଂ C କୁ ଅପସାରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{... (vii)}$$

ଯାହାକି ସରଳରେଖା (i) ଏବଂ (ii) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ।

ପୁନଶ୍ଚ (iii), (iv) ଏବଂ (vi) ରୁ A, B ଏବଂ C କୁ ଅପସାରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{... (viii)}$$

ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା (i) ଏବଂ (ii) ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି (viii) ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦର୍ଶାଇବା, ଯଦି ସର୍ତ୍ତ (vii) ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତେବେ ସରଳରେଖା (i) ଏବଂ (ii) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ।

ଆସ ଆମେ ନେବା ସମତଳ $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{... (ix)}$$

$\Rightarrow (x-x_1)(m_1n_2-m_2n_1)+(y-y_1)(n_1l_2-n_2l_1)+(z-z_1)(l_1m_2-l_2m_1) = 0$

ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ଯଦି ସମତଳର ନର୍ମାଲ, ସରଳରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବ ଏବଂ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଏ ।

ତୁମେ ଏଠାରେ ଦେଖିପାର

$l_1(m_1n_2-m_2n_1)+m_1(n_1l_2-n_2l_1)+n_1(l_1m_2-l_2m_1) = 0$

ତେଣୁ ସରଳରେଖା (i) ସମତଳ (ix) ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

ସେହି ଯୁକ୍ତିରୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ, ସରଳରେଖା (ii), ସମତଳ (ix) ଉପରେ ରହିବ ।

$\therefore$ ଦୁଇଟି ଯାକ ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ।

ତେଣୁ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଏକ ସମତଳରେ ରହିବା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ (vii) ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ସରଳରେଖା (i) ଏବଂ (ii) ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି (vii) ସିଦ୍ଧ ହେବ ଏବଂ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅସମାନ୍ତର ହେବେ ।

ମନେରଖ : (i) ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଯଦି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଓ ଅସମାନ୍ତର, ତେବେ ସେମାନେ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ନାହିଁ । ଏହିପରି ଏକ ଯୋଡ଼ା ସରଳରେଖାକୁ ସ୍କିଉ (skew) ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ ।

(ii) ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ଥାଏ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସାଧାରଣ ରୂପରେ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ନିମ୍ନ ମତେ ଅଗ୍ରସର ହେବା ।

ମନେକର ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \qquad \ldots (i)$$

ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ

$ax+by+cz+d = 0$ ଏବଂ $a'x+b'y+c'z+d' = 0 \ldots$ (ii)

ଯଦି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥାନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରଥମ ସରଳରେଖାର ଏକବିନ୍ଦୁ, ଦ୍ୱିତୀୟ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ ।

ସରଳରେଖା (i) ର ଏକ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$(x_1+lr,\ y_1+mr,\ z_1+nr)$

ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି $ax+by+cz+d = 0$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ଯଦି

$a(x_1+lr)+b(y_1+mr)+c(z_1+nr)+d = 0$

$$\Rightarrow r=-\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{al+bm+cn}$$

ସେହିପରି, ଏହି ବିନ୍ଦୁଟି $a'x+b'y+c'z+d' = 0$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

ଫଳରେ $r=-\dfrac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{a'l+b'm+c'n}$

'r' ର ମୂଲ୍ୟ ଦ୍ୱୟକୁ ସମତୁଲ କଲେ, ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ପାଇବା

$$\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{al+bm+cn}=\frac{a'x_1+b'y_1+c'z_1+d'}{a'l+b'm+c'n}$$

ଟିପ୍ପଣୀ

ମନେରଖ : ଯେତେବେଳେ ଉଭୟ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ସାଧାରଣ ରୂପରେ ଥିବେ, ପ୍ରଥମେ ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣକୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିବା ଏବଂ ପରେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 35.8

ପ୍ରମାଣ କର, $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ ଏବଂ $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ : ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ

$$\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5} \quad \text{... (i)}$$

ଏବଂ $$\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3} \quad \text{... (ii)}$$

ସମତଳୀୟ ହେବେ ଯଦି $$\begin{vmatrix} 8-5 & 4-7 & 5+3 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

ଅଥବା $$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 8 \\ 4 & 4 & -5 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow 3(12+5)+3(12+35)+8(4–28) = 0$

$\Rightarrow 51+141–192 = 0$

$\Rightarrow 192–192 = 0$ ଯାହାକି ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ତେଣୁ ସରଳରେଖା (i) ଏବଂ (ii) ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଉଦାହରଣ 35.9

ପ୍ରମାଣ କର $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ ଏବଂ $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{7}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସସ୍ଥିତ । ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{5}=\frac{z+5}{7}$ ଏବଂ $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-6}{7}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବା ଲାଗି, ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ

$$\begin{vmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0 \text{ ଏବଂ } \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix}=0$$

$\Rightarrow 3(35–28)–7(21–7)+11(12–5) = 0$

$\Rightarrow 21–98+77 = 0$

$\Rightarrow 0 = 0$ ଯାହାକି ସତ୍ୟ

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳୀୟ

ଏହି ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+3 & z+5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (x+1)(35-28)-(y+3)(21-7)+(z+5)(12-5) = 0$

$\Rightarrow 7x+7-14y-42+7z+35 = 0$

$\Rightarrow 7x-14y+7z = 0$

$\Rightarrow x-2y+z = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.5

1. ପ୍ରମାଣ କର : ନିମ୍ନଲିଖିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳୀୟ

 (i) $\dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+1}{1}$ ଏବଂ $x+2y+3z = 0 = 2x+4y+3z+3$

 (ii) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ ଏବଂ $4x-3y+1 = 0 = 5x-3z+2$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ $\dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+2}{1}$ ଏବଂ $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-7}{-3} = \dfrac{z+7}{2}$ ଏକ ସମତଳୀୟ ।

 ଏହି ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଏକ ସରଳରେଖା ହେଉଛି ଦୁଇଟି ଅଣ-ସମାନ୍ତର ସମତଳର ଛେଦ ।
- ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ ଯେଉଁଠି ସରଳରେଖା ଉପରେ (x_1, y_1, z_1) ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ l, m, n ଏହାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ (ଅଥବା ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ) ।
- ଏକ ସରଳରେଖାର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

 $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$

 $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$
- ଦ୍ୱି-ବିନ୍ଦୁ ରୂପରେ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$

 ଯେଉଁଠି (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ।
- ସରଳରେଖା $\dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}$ ଏବଂ ସମତଳ $ax+by+cz+d = 0$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ

ହେଲେ, $\sin\theta = \dfrac{al + bm + cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

- $\dfrac{x - x_1}{l_1} = \dfrac{y - y_1}{m_1} = \dfrac{z - z_1}{n_1}$ ଏବଂ $\dfrac{x - x_2}{l_2} = \dfrac{y - y_2}{m_2} = \dfrac{z - z_2}{n_2}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସମତଳୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ଏବଂ ଏହି ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (1, 4, 7) ଏବଂ (3, –2, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା (–1, –2, –3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ $3x–4y+5z–11 = 0$ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
3. ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ ଯଥାକ୍ରମେ 1, –1, 2 ଏବଂ 2, 1, –1 । ଏହି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (1, 2, 3) ଏବଂ (4, 5, 7) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ (–4, 3, –6) ଏବଂ (2, 9, 2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସହିତ ସମାନ୍ତର ।
5. $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-4} = \dfrac{z+5}{5}$ ଏବଂ $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z}{2}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା (1, 2, –4) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ ସରଳରେଖା $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y+19}{-16} = \dfrac{z-10}{7}$ ଏବଂ $\dfrac{x-15}{3} = \dfrac{y-29}{8} = \dfrac{z-5}{-5}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
7. ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ $x–y+2z–5 = 0$, $3x+y+z–6 = 0$ କୁ ସିମେଟ୍ରିକ ଫର୍ମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କର ।

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{-1}$ ଏବଂ $\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ସମତଳୀୟ । ଏହି ଦୁଇ ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. $\frac{x-5}{4}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+3}{-5}$ ଏବଂ $\frac{x-8}{7}=\frac{y-4}{1}=\frac{z-5}{3}$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଏକ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. $\frac{x}{2}=\frac{y+4}{3}=\frac{z+1}{6}$ ସମୀକରଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଉପରେ $(2, 3, 1)$ ଏବଂ $(5, 8, 7)$ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.1

1. $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{5}$

2. $\frac{x-3}{-6}=\frac{y+9}{7}=\frac{z-4}{-4}$

3. $\frac{x+7}{9}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-3}{5}$

4. $\frac{x-1}{9}=\frac{y-2}{-10}=\frac{z-3}{-4}$

5. $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.2

1. (i) $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-3}$ (ii) $\frac{x+\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-2}=\frac{z}{1}$

(iii) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+3}{1}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.3

1. (i) $\sqrt{21}$ ଏକକ (ii) 21 ଏକକ

(iii) $\sqrt{\frac{27}{14}}$ ଏକକ (iv) $\sqrt{6}$ ଏକକ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.4

1. (i) $\sin^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{70}}\right)$

(iii) $\sin^{-1}\left(\frac{46}{\sqrt{2650}}\right)$ (iv) 0

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 35.5

2. $x+y+z=0$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସକାର୍ଯ୍ୟ

1. $\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z-7}{-2}$

2. $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z+3}{5}$

3. $-\frac{1}{\sqrt{35}}, \frac{5}{\sqrt{35}}, \frac{3}{\sqrt{35}}$

5. 90^0

6. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+4}{6}$

7. $\frac{x-\frac{11}{4}}{-3} = \frac{y+\frac{9}{4}}{5} = \frac{z}{4}$

8. $2x-5y-16z+13 = 0$

9. $17x-47y-24z+172 = 0$

10. $\frac{57}{7}$ ଏକକ