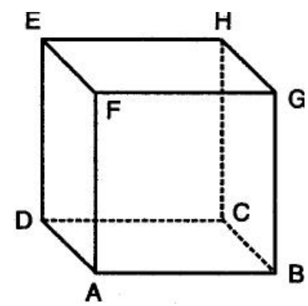
ଟିପ୍ପଣୀ

୩୪

ସମତଳ

ତୁମ ଘରର ଗୋଟିଏ କୋଠରିକୁ ଭଲ ଭାବରେ ଦେଖ । ଏହାର ଚାରୋଟି କାନ୍ଥ, ଗୋଟିଏ ଛାତ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଚଟାଣ ଅଛି । ଚଟାଣ ଏବଂ ଛାତ କୋଠରିର ସୀମା ବାହାରେ ଅସୀମ ଭାବରେ ଲମ୍ବିଥିବା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ସମତଳର ଅଂଶ । ତୁମେ ମଧ୍ୟ ଦୁଇ ଯୋଡ଼ା ସମାନ୍ତର କାନ୍ଥ ଦେଖିବ ଯାହା ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ସମତଳର ଅଂଶ । ସେହିପରି ଟେବୁଲ୍‌ର ଉପର ପାଖ, କୋଠରି ମାନଙ୍କର କବାଟ ସମତଳ ଆଦି ଅଂଶର ଉଦାହରଣ ।



ଚିତ୍ର 34.1

ଯଦି ଆମେ ସମତଳ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ନେବା, ତେବେ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବେ ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ । ଏହା ହେଉଛି ସମତଳର ଏକ ବିଶେଷତ୍ୱ ।

ଚିତ୍ର 34.1 କୁ ଦେଖ । ତୁମେ ଜାଣ ଏହା ଏକ ଆୟତଘନାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବାକ୍ସ ସୂଚାଉଥିବା ଚିତ୍ର । ଏହାର ଛଅଟି ପାର୍ଶ୍ୱ, ଆଠଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବାରଟି ଧାର ଅଛି ।

ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ଏବଂ ସମାନ୍ତର ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡିକ ହେଲେ

(i) ABCD ଏବଂ FGHE

(ii) AFED ଏବଂ BGHC

(iii) ABGF ଏବଂ DCHE

ଏବଂ ସମାନ୍ତର ଧାର ଗୁଡିକ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

(i) AB, DC, EH ଏବଂ FG

(ii) AD, BC, GH ଏବଂ FE

(iii) AF, BG, CH ଏବଂ DE

ଉପରୋକ୍ତ ଛଅଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସମତଳର ଅଂଶ ଏବଂ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱଗୁଡ଼ିକ ଦ୍ୱାରା ତିନିଯୋଡ଼ା ସମାନ୍ତର ସମତଳ ସୂଚିତ ହୁଅନ୍ତି ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଏକ ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ, ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ, ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ଏବଂ ନର୍ମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ ତିନୋଟି ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ଥିବା ସମଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ଏକ ସମତଳ ଯୁଗ୍ମ ସୂଚିତ ହେବ । ଆମେ ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଏବଂ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟଟି ପଢି ସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ଏକ ସମତଳକୁ ଚିହ୍ନି ପାରିବ;
- ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ଏବଂ ନର୍ମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ତିନୋଟି ଚଳରାଶି ଥିବା ସମଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ଏକ ସମତଳ ଯୁଗ୍ମ ସୂଚିତ ହୁଏ ବୋଲି ଦର୍ଶାଇପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତିର ମୌଳିକଜ୍ଞାନ;
- ଏକ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଏବଂ ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ;
- ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଏକ ଭିନ୍ନ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ;
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ ସମାନ୍ତର ହେବାର ସର୍ତ୍ତ

34.1 ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ (General equation of a plane)

ମନେ ପକାଅ ଯେ ସମତଳ ହେଉଛି ଏକ ପୃଷ୍ଠ ଯେପରିକି ଏହା ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ସରଳରେଖା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବରେ ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

ତିନୋଟି ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ନିମ୍ନ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ନିଆଯାଉ

$$ax+by+cz+d = 0 \qquad \ldots (i)$$

ଯଦି $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ସମୀକରଣ (i) କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ, ତେବେ

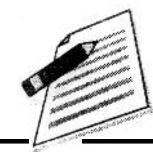
$$ax_1+by_1+cz_1+d = 0 \qquad \ldots (ii)$$

$$ax_2+by_2+cz_2+d = 0 \qquad \ldots (iii)$$

ସମୀକରଣ (ii) ଏବଂ (iii)କୁ ଯଥାକ୍ରମେ n ଏବଂ m ଗୁଣନ କରି ଉତ୍ପନ୍ନ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$a(mx_2+nx_1)+b(my_2+ny_1) +c(mz_2+nz_1)+d(m+n) = 0$$

$$\Leftrightarrow a\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}\right)+b\left(\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)+c\left(\frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)+d=0 \ \ldots (iv)$$



ଟିପ୍ପଣୀ

(iv) ରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ, PQ କୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ m : n ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରୁଛି, ତାହା ସମୀକରଣ (i) କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଛି ।

$\therefore$ P ଏବଂ Q କୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ରେଖା ଉପରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (i) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ପୃଷ୍ଠତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଛି ।

$\therefore$ ସମୀକରଣ (i) ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ।

34.2 ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ (General equation of a plane possing through a given point) :

ମନେକର $P(x_1, y_1, z_1)$ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $ax+by+cz+d = 0$ ଗୋଟିଏ ସମତଳର ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ।

ଯେହେତୁ ସମତଳ $ax+by+cz+d = 0$, ...(i)

(x_1, y_1, z_1) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରେ, ତେଣୁ

$$ax_1+by_1+cz_1+d = 0 \quad \text{... (ii)}$$

(ii) କୁ (i) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0 \quad \text{... (iii)}$$

ଯାହାକି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1) କୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ତୁମେ କହିପାରିବ କି, (iii) ଦର୍ଶାଉଥିବା ସମୀକରଣଟି କେତୋଟି ସମତଳକୁ ସୂଚାଏ ?

ଯେହେତୁ a, b, c ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରିବ, ତେଣୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ଅସଂଖ୍ୟ ସମତଳ ସମ୍ଭବ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ସମୀକରଣ (i) ରେ ଚାରୋଟି ଧ୍ରୁବକ a, b, c ଏବଂ d ଅଛି । ଯେତେବେଳେ $d \neq 0$, ଆମେ (i) କୁ d ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ପାଇବା

$$\left(\frac{a}{d}\right)x+\left(\frac{b}{d}\right)y+\left(\frac{c}{d}\right)z+1=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz+1 = 0 \quad \text{... (iv)}$$

ଯେଉଁଠି $A=\frac{a}{d}, B=\frac{b}{d}, C=\frac{c}{d}$

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକରିପାର ଯେ, (iv) ରେ ଥିବା A, B ଏବଂ C ହେଉଛି ତିନୋଟି ସ୍ୱାଧୀନ ଧ୍ରୁବକ ।

ଉଦାହରଣ 34.1

(1, –3, 2) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 1, y_1 = -3$ ଏବଂ $z_1 = 2$

$\therefore$ ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$a(x-1)+b(y+3)+c(z-2) = 0$$

$$\Rightarrow ax+by+cz+(-a+3b-2c) = 0$$

ଉଦାହରଣ 34.2

(3, 0, –2) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 3, y_1 = 0, z_1 = -2$

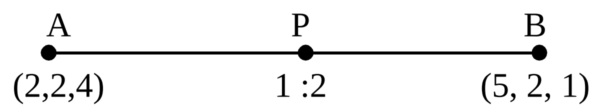
$\therefore$ ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$a(x-3)+b(y-0)+c(z+2) = 0$

$\Rightarrow ax+by+cz+(-3a+2c) = 0$

ଉଦାହରଣ 34.3 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (2, 2, 4) ଏବଂ (5, 2, 1) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :



ଚିତ୍ର 34.2

A ଓ B ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{2\times2+1\times5}{2+1},\frac{2\times2+1\times2}{2+1},\frac{2\times4+1\times1}{2+1}\right)$$

କିମ୍ବା (3, 2, 3)

$\therefore$ ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$a(x-3) + b(y-2) + c(z-3) = 0$

$\Rightarrow ax + by + cz - (3a + 2b + 3c) = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.1

1. ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. (0, 0, –2) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. (5, –7, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. (1, 2, –3) ଏବଂ (4, 2, –3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

34.3 ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ (Equation of a plane passing through three given points)

ତୁମେ ମନେ ପକାଇ ପାରିବ ଯେ ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣରେ ତିନୋଟି ସ୍ୱାଧୀନ ଧ୍ରୁବକ ଥାଏ । ତେଣୁ ତିନୋଟି ଅଣରେଖୀୟ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମତଳ ରହିଥିବାର ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ମନେକର $ax+by+cz+d = 0$ ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ଏବଂ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ଏବଂ (x_3, y_3, z_3) ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

(x_1, y_1, z_1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେବ

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0 \qquad \ldots (i)$$

ଯଦି ସମତଳ (i), (x_2, y_2, z_2) ଏବଂ (x_3, y_3, z_3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ, ତେବେ

$a(x_2-x_1)+b(y_2-y_1)+c(z_2-z_1) = 0$ ... (ii)

$a(x_3-x_1)+b(y_3-y_1)+c(z_3-z_1) = 0$ ... (iii)

a, b ଏବଂ c କୁ (i), (ii) ଏବଂ (iii) ରୁ ଅପସାରଣ କଲେ, ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେବ

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{... (A)}$$

34.4 ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ (Equation of a plane in intercept form)

ମନେକର x, y ଏବଂ z ଅକ୍ଷରେ ସମତଳ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଛେଦାଂଶର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଗୁଡିକ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଏବଂ c । ଏହା ସୂଚାଏ ଯେ ସମତଳଟି (a, 0, 0), (0, b, 0) ଏବଂ (0, 0, c) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଛି ।

ସମୀକରଣ (A) ରେ

$x_1 = a \quad y_1 = 0 \quad z_1 = 0$

$x_2 = 0 \quad y_2 = b \quad z_2 = 0$

$x_3 = 0 \quad y_3 = 0 \quad z_3 = c$ ନେଲେ

ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେବ

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

ଯାହାକୁ ସରଳ କଲେ ପାଇବା $bcx+acy+abz - abc = 0$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \qquad \text{... (B)}$$

ସମୀକରଣ (B)କୁ ସମତଳର **ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 34.4

(0, 2, 3), (2, 0, 3) ଏବଂ (2, 3, 0) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (A)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି ସମତଳର ସମୀକରଣକୁ ଲେଖିପାରିବା

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-3 \\ 2-0 & 0-2 & 3-3 \\ 2-0 & 3-2 & 0-3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & y-2 & z-3 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x(6-0)-(y-2)(-6)+(z-3)(2+4) = 0$

$\Rightarrow 6x+6(y-2)+6(z-3) = 0$

$\Rightarrow x+y-2+z-3=0 \qquad \Rightarrow x+y+z=5$

ଉଦାହରଣ 34.5

ଦର୍ଶାଅ ଯେ (2, 2, 0), (2, 0, 2) ଏବଂ (4, 3, 1) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = y + z$ ।

ସମାଧାନ : (2, 2, 0) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$a(x-2)+b(y-2)+c(z-0)=0 \qquad \ldots (i)$

$\because$ (i) (2, 0, 2) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରେ,

$\therefore a(2-2)+b(0-2)+c(2-0)=0$

$\Rightarrow c=b \qquad \ldots (ii)$

ପୁନଶ୍ଚ (i) (4, 3, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ, ତେଣୁ

$a(4-2)+b(3-2)+c=0$

$\Rightarrow 2a+b+c=0 \qquad \ldots (iii)$

(ii) ଏବଂ (iii) ରୁ ଆମେ ପାଇବା $2a+2b=0 \Rightarrow a=-b$

$\therefore$ (i) ରେ ପ୍ରାପ୍ତ ମାନକୁ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$-b(x-2)+b(y-2)+bz=0$

$\Rightarrow -(x-2)+(y-2)+z=0$

$\Rightarrow y+z-x=0$

$\Rightarrow x=y+z$

ଉଦାହରଣ 34.6

ସମତଳର ସମୀକରଣ $4x-5y+6z-60=0$ କୁ ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ ଏହାର ଛେଦାଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$4x-5y+6z-60=0$

$\Rightarrow 4x-5y+6z=60 \quad \ldots .(i)$

$$\Rightarrow \frac{4x}{60}-\frac{5y}{60}+\frac{6z}{60}=1 \Rightarrow \frac{x}{15}+\frac{y}{-12}+\frac{z}{10}=1$$

ଯାହାକି ସମତଳର ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ଏବଂ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ ସମତଳର ଛେଦାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ 15, –12 ଏବଂ 10 ।

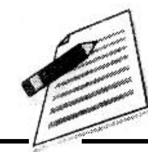
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) (2, 2, –1), (3, 4, 2) ଏବଂ (7, 0, 6)

(b) (2, 3, –3), (1, 1, –2) ଏବଂ (–1, 1, 4)

(c) (2, 2, 2), (3, 1, 1) ଏବଂ (6, –4, –6)

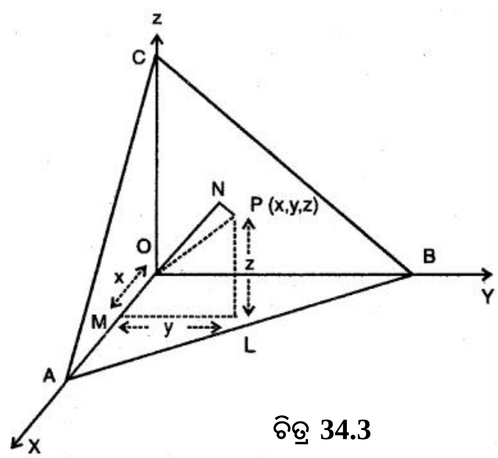


ଟିପ୍ପଣୀ

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (3, 3, 1), (–3, 2, –1) ଏବଂ (8, 6, 3) ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ $4x+2y-13z = 5$ ହେଉଛି ।
3. ଗୋଟିଏ ସମତଳର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଛେଦାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ 2, 3 ଏବଂ 4 ହେଲେ, ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ସମତଳ $2x+3y+4z = 24$ ଦ୍ୱାରା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ଛେଦାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (–1, 4, –3), (3, 2, –5), (–3, 8, –5) ଏବଂ (–3, 2, 1) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବେ ।

34.5 ନର୍ମାଲ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ (Equation of a plane in the normal form)

ମନେକର, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ରୁ ସମତଳ ABC ପ୍ରତି ON ଲମ୍ବ ଏବଂ ମନେକର ସମତଳ ଉପରେ P(x, y, z) ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ମନେକର, XY ସମତଳ ଉପରେ PL ଲମ୍ବ ଏବଂ OX ଉପରେ LM ଲମ୍ବ ଯେପରି OM = x, ML = y ଏବଂ PL = z । OM, ML ଏବଂ LP ର ON ଉପରେ ଥିବା ଅଭିକ୍ଷେପ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସହ OP ର ON ଉପରେ ଥିବା ଅଭିକ୍ଷେପ ସମାନ ।



ଚିତ୍ର 34.3

ଯଦି ON ର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ଲମ୍ବ ON ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ p ହୁଏ, ତେବେ

$$lx+my+nz = p \qquad \text{... (i)}$$

(i) କୁ ସମତଳର ନରମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଆମେ ଜାଣିଛେ $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ ଏବଂ $n = \cos\gamma$, ଯେଉଁଠାରେ ତିନୋଟି ଯାକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ON ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ α, β ଏବଂ γ ।

∴ (i) କୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = p$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : x, y, z ସମ୍ବଳିତ ଏକଘାତୀ ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ, ଅର୍ଥାତ୍ $ax+by+cz+d = 0$ କୁ $lx+my+nz = p$ ସହିତ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ $ax+by+cz+d = 0$ ସମତଳ ପ୍ରତି ନରମାଲ୍‌ର ଡାଇରକସନ୍ କୋସାଇନ୍ a, b ଏବଂ c ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ଏବଂ

$$\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \pm\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ ସହିତ ସମାନ

ଯେହେତୁ ପ୍ରଚଳିତ ପ୍ରଥା ଅନୁଯାୟୀ p ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ d ଧନାତ୍ମକ ଥିଲେ, ସମସ୍ତ ଚିହ୍ନକୁ ଧନାତ୍ମକ ନେବା ଏବଂ d ରଣାତ୍ମକ ଥିଲେ, ସମସ୍ତ ଚିହ୍ନକୁ ରଣାତ୍ମକ ନେବା ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= \dfrac{|-d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ $ax+by+cz+d = 0$କୁ ନରମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ $-\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ କିମ୍ବା $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଭାଗ କରାଯାଏ ଯଦି d ଧନାତ୍ମକ କିମ୍ବା ରଣାତ୍ମକ ହୋଇଥାଏ ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଉଦାହରଣ 34.7

ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମତଳର ସମୀକରଣକୁ ନରମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $2x-3y+4z-5=0$ (ii) $2x+6y-3z+5=0$

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ସମତଳର ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$2x-3y+4z-5=0$ ... (A)

(A) କୁ $\sqrt{2^2+(-3)^2+4^2}=\sqrt{29}$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{2x}{\sqrt{29}}-\frac{3y}{\sqrt{29}}+\frac{4z}{\sqrt{29}}-\frac{5}{\sqrt{29}}=0$$

$$\Rightarrow\frac{2x}{\sqrt{29}}-\frac{3y}{\sqrt{29}}+\frac{4z}{\sqrt{29}}=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

ଯାହାକି ସମତଳର ନର୍ମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ।

ଏଠାରେ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $=\frac{5}{\sqrt{29}}$

(ii) ସମତଳର ସମୀକରଣଟି $2x+6y-3z+5=0$ ... (B)

(B) କୁ $-\sqrt{2^2+6^2+(-3)^2}=-7$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ପାଇବା [ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ (ii) କୁ ଦେଖ]

$$\frac{2x}{-7}+\frac{6y}{-7}-\frac{3z}{-7}+\frac{5}{-7}=0$$

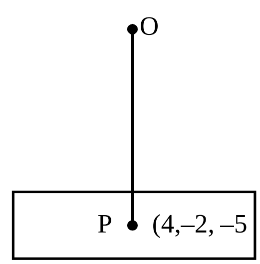
$$\Rightarrow-\frac{2x}{7}-\frac{6y}{7}+\frac{3z}{7}=\frac{5}{7}$$

ଯାହାକି ସମତଳର ନର୍ମାଲ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ସମୀକରଣ ।

ଏଠାରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $=\frac{5}{7}$

ଉଦାହରଣ 34.8

ଯଦି ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଗୋଟିଏ ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ (4, –2, –5) ହୁଏ, ତେବେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 34.4

ସମାଧାନ : ଯଦି ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ରୁ ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ P ହୁଏ, ତେବେ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4, –2, –5) ।

P (4, –2, –5) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ

$a(x-4)+b(y+2)+c(z+5)=0$ ... (i)

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମତଳ ପ୍ରତି OP ଲମ୍ବ ଏବଂ OP ର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ 4–0, –2–0, –5–0 ଅର୍ଥାତ୍ 4, –2, –5 ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ।

ତେଣୁ (i) ରେ a, b ଏବଂ c ପାଇଁ ଯଥାକ୍ରମେ 4, –2, –5 ବସାଇଲେ ଆମେ ପାଇବା

$4(x-4)-2(y+2)-5(z+5)=0$

$\Rightarrow 4x-16-2y-4-5z-25 = 0$

$\Rightarrow 4x-2y-5z = 45$

ଯାହାକି ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେବ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.3

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମତଳର ସମୀକରଣକୁ ନର୍ମାଲ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

   (i) $4x+12y-6z-28 = 0$

   (ii) $3y+4z+3 = 0$

2. ଯଦି ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ $(1, -3, 1)$ ହୁଏ, ତେବେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଯଦି ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ $(1, -2, 1)$ ହୁଏ, ତେବେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କୁ ଗୋଟିଏ ସମତଳ A, B ଏବଂ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଯେପରି ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, b, c) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଉକ୍ତ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେବ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$ ।

5. ଗୋଟିଏ ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କୁ P, Q ଏବଂ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜ PQR ର ଭରକେନ୍ଦ୍ର ହେଉଛି $(3, 4, -6)$ । ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

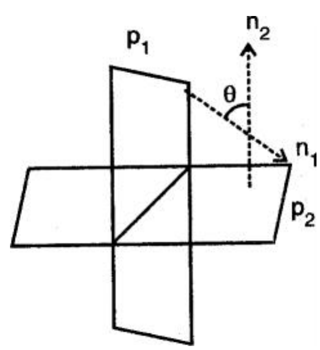
34.6 ଦୁଇଟି ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ (Angle between two planes)

ମନେକର ଦୁଇଟି ସମତଳ P_1 ଏବଂ P_2 ଦତ୍ତ ଅଛି ଯାହାର ସମୀକରଣ

$a_1x+b_1y+c_1z+d_1= 0$ ... (i)

ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ... (ii)

ମନେକର ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ସରଳରେଖା l ରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ନର୍ମାଲ୍ n_1 ଏବଂ n_2 । ମନେକର ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ।



ଚିତ୍ର 34.5

$\therefore$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ନର୍ମାଲ ମାନଙ୍କର ଡାଇରେକ୍ସନନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଲା

$$\pm\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \pm\frac{b_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}, \pm\frac{c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}$$

ଏବଂ $$\pm\frac{a_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}, \pm\frac{b_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}, \pm\frac{c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

ଯେଉଁଠାରେ $\cos\theta$ କୁ ଧନାତ୍ମକ କରିବା ପାଇଁ ଉପଯୁକ୍ତ ଚିହ୍ନ ବାଛିବା ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

ଯେତେବେଳେ ସମତଳ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ, ସେତେବେଳେ $\theta = 90^0$

$\therefore \cos\theta = 0$

$\therefore a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 :

ଯଦି ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହେବେ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ନର୍ମାଲ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ ।

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$\therefore a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହେବା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ସମାନ୍ତର ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସମୀକରଣ କେବଳ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଦ୍ୱାରା ଭିନ୍ନ ହେବେ । ତେଣୁ $ax+by+cz+d = 0$ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ଯେକୌଣସି ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେବ $ax+by+cz+k = 0$, ଯେଉଁଠି k ଏକ ଧ୍ରୁବକ ।

ଉଦାହରଣ 34.9

$3x+2y-6z+7 = 0$ ... (i)

ଏବଂ $2x+3y+2z-5 = 0$ ... (ii)

ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = -6$

ଏବଂ $a_2 = 2, b_2 = 3, c_2 = 2$

$\therefore$ ଯଦି ସମତଳ (i) ଏବଂ (ii) ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ θ ହୁଏ, ତେବେ

$$\cos\theta = \frac{3\times 2 + 2\times 3 + (-6)\times 2}{\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}\sqrt{2^2+3^2+2^2}} = 0$$

$\therefore \theta = 90^0$

$\therefore$ (i) ଏବଂ (ii) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ ।

ଉଦାହରଣ 34.10

$x-3y+4z-1 = 0$ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $(3, 1, -2)$ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $x-3y+4z-1 = 0$ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x-3y+4z+k = 0$ ... (i)

ଯେହେତୁ ସମତଳ (i), $(3, 1, -2)$ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି, ତେଣୁ ଏହା $(3, 1, -2)$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ

$\therefore 3-3-8+k = 0 \Rightarrow k = 8$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x-3y+4z+8 = 0$

ଉଦାହରଣ 34.11 ଗୋଟିଏ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହା (–1, 2, 3) ଏବଂ (2, –3, 4) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଏ ଏବଂ $3x+y-z+5=0$ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ସମାଧାନ : (–1, 2, 3) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ଯେକୌଣସି ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$a(x+1)+b(y-2)+c(z-3)=0 \ldots \text{(i)}$

ଯେହେତୁ ସମତଳ (i), (2, –3, 4) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଛି, ତେଣୁ ସମୀକରଣ (i) କୁ (2, –3, 4) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ କଲେ ପାଇବା

$3a-5b+c=0 \qquad \ldots \text{(ii)}$

ପୁନଶ୍ଚ ସମତଳ (i) ଓ ସମତଳ $3x+y-z+5=0$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତେଣୁ

$3a+b-c=0 \qquad \ldots \text{(iii)}$

ବଜ୍ର ଗୁଣନ ପଦ୍ଧତିରେ (ii) ଏବଂ (iii) ରୁ ଆମେ ପାଇବା $\frac{a}{4}=\frac{b}{6}=\frac{c}{18}$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{9}$$

ତେଣୁ ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେବ

$2(x+1)+3(y-2)+9(z-3)=0 \qquad$ [(i) ରୁ]

$\Rightarrow 2x+3y+9z=31$

ଉଦାହରଣ 34.12 (2, –1, 5) ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସମତଳ, ଯାହାକି ସମତଳ $x+2y-z=1$ ଏବଂ $3x-4y+z=5$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତା'ର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (2, –1, 5) ବିନ୍ଦକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$a(x-2)+b(y+1)+c(z-5)=0 \ldots \text{(i)}$

ଯେହେତୁ ଏହି ସମତଳ (i), $x+2y-z=1$ ଏବଂ $3x-4y+z=5$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ, ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା

$a\times1+b\times2+c(-1)=0$

ଏବଂ $a\times3+b(-4)+c(1)=0$

$\Rightarrow a+2b-c=0 \qquad \ldots \text{(ii)}$

ଏବଂ $3a-4b+c=0 \qquad \ldots \text{(iii)}$

(ii) ଏବଂ (iii) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{a}{2-4}=\frac{b}{-3-1}=\frac{c}{-4-6}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{-2}=\frac{b}{-4}=\frac{c}{-10}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{5}=\lambda \text{ (ମନେକର)}$$

$\therefore a=\lambda, b=2\lambda, c=5\lambda$

a, b ଏବଂ c ର ମାନକୁ (i) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\lambda(x-2)+2\lambda(y+1)+5\lambda(z-5) = 0$

$\Rightarrow x-2+2y+2+5z-25 = 0$

$\Rightarrow x+2y+5z-25 = 0$

ଯାହାକି ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.4

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) $2x-y+z = 6$ ଏବଂ $x+y+2z = 3$
   (ii) $3x-2y+z+17 = 0$ ଏବଂ $4x+3y-6z+25 = 0$
2. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମତଳ ଗୁଡିକ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
   (i) $x+2y+2z = 0$ ଏବଂ $2x+y-2z = 0$
   (ii) $3x+4y-5z = 9$ ଏବଂ $2x+6y+6z = 7$
3. $2x+3y+6z+7 = 0$ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଏବଂ $(2, 3, -1)$ ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରିଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. $(-1, 1, 1)$ ଏବଂ $(1, -1, 1)$ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ଏବଂ $x+2y+2z = 5$ ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ଏବଂ ସମତଳ $x+2y+2z = 0$ ଏବଂ $2x+y-2z = 0$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

34.7 ଗୋଟିଏ ସମତଳ ଠାରୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା (Distance of a point from a plane)

ମନେକର ନର୍ମାଲ ମାଧ୍ୟମରେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x \cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = p$ ଯେଉଁଠି $p > 0$ ... (i)

ଅବସ୍ଥା - I : ମନେକର $P(x^1, y^1, z^1)$ ବିନ୍ଦୁଟି ସମତଳର ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅଛି ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ରହିଛି । 'P' କୁ ଧାରଣ କରିଥିବା ଏବଂ ସମତଳ (i) ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସମତଳ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ଏହାର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma = p'$ ... (ii)

ଯେଉଁଠି p' ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ (ii) ପ୍ରତି ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

ଏଣୁ ସମତଳ (i) ଠାରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା $= p - p'$

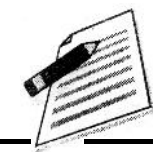
ଯେହେତୁ ସମତଳ (ii), (x', y', z') ବିନ୍ଦୁକୁ ଧାରଣ କରେ, ତେଣୁ

$x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma = p'$

$\therefore$ ସମତଳ (i) ଠାରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଲମ୍ବ ଦୂରତା

$p-p' = p-(x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma)$

ଅବସ୍ଥା - II : ଯଦି P ବିନ୍ଦୁଟି ସମତଳର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ତା'ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସମତଳ (i) ରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ହେଉଛି



$p'-p = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma - p$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ଯଦି ସମତଳର ସମୀକରଣ $ax+by+cz+d = 0$ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଏହାକୁ ପ୍ରଥମେ ନର୍ମାଲ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା, ଯେପରି ପୂର୍ବରୁ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ତା'ପରେ ଉପର ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

34.8 ଦୁଇଟି ସମତଳ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ (Equation of a plane bisecting the angle between two plane) :

ମନେକର $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ଦୁଇଟି ସମତଳର ସମୀକରଣ । ଏହି ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳ ଉପରେ ଯଦି $P(x_1, y_1, z_1)$ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ P ବିନ୍ଦୁରୁ ଦତ୍ତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

$$\therefore \frac{a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x_1+b_2y_1+c_2z_1+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

ଲମ୍ବ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ଚିହ୍ନ କିମ୍ବା ବିପରୀତ ଚିହ୍ନଯୁକ୍ତ ହେବେ ।

$\therefore$ ସମୀକରଣ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}} = \pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}} \quad \dots \text{(i)}$$

ଦତ୍ତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳ ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

$\therefore$ (i) ହେଉଛି ଦତ୍ତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳ ମାନଙ୍କର ସମୀକରଣ ।

ମନେରଖ : ତୁମେ ମନେ ରଖ ଯେ, ଆମେ ଦୁଇଟି ସମତଳର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଭାବରେ ଦୁଇଟି ସମତଳ ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 34.13

ସମତଳ $3x-2y+5z+17 = 0$ ଠାରୁ (1, 2, 3)ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଦୂରତା

$$= \frac{3\times1-2\times2+5\times3+17}{\sqrt{3^2+(-2)^2+5^2}} = \frac{31}{\sqrt{38}} \text{ ଏକକ}$$

ଉଦାହରଣ 34.14

ଦୁଇଟି ସମତଳ $x-2y+3z-6 = 0$ ଏବଂ $2x-4y+6z+17 = 0$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x-2y+3z-6 = 0$ ... (i)

$2x-4y+6z+17 = 0$ ... (ii)

ଏଠାରେ $\frac{1}{2} = \frac{(-2)}{(-4)} = \frac{3}{6}$

$\therefore$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ (i) ଏବଂ (ii) ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର

(6, 0, 0) ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ସମତଳ (i) ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

$\therefore$ ସମତଳ (i) ଏବଂ (ii) ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା = ବିନ୍ଦୁ (6, 0, 0) ର ସମତଳ (ii) ଠାରୁ ଦୂରତା

$$= \frac{2\times 6 - 4\times 0 + 6\times 0 + 17}{\sqrt{2^2 + (-4)^2 + 6^2}}$$

$$= \frac{29}{\sqrt{56}}$$ ଏକକ

$$= \frac{29}{2\sqrt{14}}$$ ଏକକ

ଉଦାହରଣ 34.15

3x–2y+6z+8 = 0 ଏବଂ 2x–y+2z+3 = 0 ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\frac{3x - 2y + 6z + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}} = \pm\frac{2x - y + 2z + 3}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{3x - 2y + 6z + 8}{7} = \pm\frac{2x - y + 2z + 3}{3}$$

$\Rightarrow$ 9x–6y+18z+24 = +(14x–7y+14z+21)

କିମ୍ବା 9x–6y+18z+24 = –(14x–7y+14z+21)

$\Rightarrow$ 5x–y–4z = 3

କିମ୍ବା 23x–13y+32z+45 = 0

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.5

1. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର:

   (i) ସମତଳ 5x–2y+3z+11 = 0 ଠାରୁ (2, –3, 1) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

   (ii) ସମତଳ 2x–3y+3z+27 = 0 ଠାରୁ (3, 4, –5) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   3x+y–z–7 = 0 ଏବଂ 6x+2y–2z+11 = 0

3. ଦତ୍ତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ -ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2x+y-2z = 4$ ଏବଂ $2x-3y+6z+2 = 0$

(ii) $3x-4y+12z = 26$ ଏବଂ $x+2y-2z = 9$

(iii) $x+2y+2z-9 = 0$ ଏବଂ $4x-3y+12z+13 = 0$

34.9 ଦୁଇଟି ସମତଳର ସୂଚକ ସମଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ (Homogenetus equation of second degree representing two planes)

ମନେକର ଦୁଇଟି ସମତଳର ସମୀକରଣ

$A \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ... (i)

ଏବଂ $B \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ... (ii)

ସମୀକରଣ $AB = 0$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

ଅର୍ଥାତ୍ $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)(a_2x+b_2y+c_2z+d_2) = 0$ ... (iii)

(i) ଏବଂ (ii) କୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ (iii) ମଧ୍ୟ ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ $A = 0$ କିମ୍ବା $B = 0$ ରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ସମୀକରଣ $AB = 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ପୃଷ୍ଠତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

ପୁନଶ୍ଚ $AB = 0$ ହେଉଛି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

$\therefore$ x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ, ସମତଳ ଯୁଗ୍ମକୁ ସୂଚାଇବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ଗୁଣନୀୟକର ଗୁଣଫଳ ଭାବରେ ଲେଖା ଯାଇପାରିବ (ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୁଣନୀୟକକୁ ଜିରୋ ସହିତ ସମାନ ନେଲେ ଗୋଟିଏ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେବ) ।

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ଏକ ସାଧାରଣ ସମଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ନିମ୍ନରେ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ତଥ୍ୟ ଦେଉଛୁ ।

ସାଧାରଣ ସମଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gxz = 0$ ... (A)

(A) କୁ ଆମେ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ଗୁଣନୀୟକର ଗୁଣଫଳ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = 0$

ପୁନଶ୍ଚ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ପାଇଁ ଆମେ ପାଇବା

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ca}}{a+b+c}$$

ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ପରିସର ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 34.16

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସମୀକରଣ $8x^2-3y^2-10z^2+10xy+17yz+2xz = 0$ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳ ଯୁଗ୍ମର ସମୀକରଣ ହେବ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 8, b = -3, c = -10, h = 5, f = \frac{17}{2}$ ଏବଂ $g = 1$

$\therefore abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$

$$= 8(-3)(-10) + 2\left(\frac{17}{2}\right)(1)(5) - 8\left(\frac{17}{2}\right)^2 + 3(1)^2 + 10(5)^2$$

$= 240+85-578+3+250$

$= 578-578 = 0$

y ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ $8x^2-3y^2-10z^2+10xy+17yz+2xz = 0$ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳ ଯୁଗ୍ମର ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ θ ହେଲେ

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{f^2+g^2+h^2-ab-bc-ac}}{a+b+c}$$

$$= \frac{2\sqrt{\frac{289}{4}+1+25+24-30+80}}{-5} = -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{689}{4}}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1}\left[-\frac{2}{5}\sqrt{\frac{689}{4}}\right]$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.6

1. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସମୀକରଣ $2x^2-6y^2-12z^2+18yz+2xz+xy = 0$ ଏକ ସମତଳ ଯୁଗ୍ମର ସମୀକରଣ । ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମୀକରଣ $6x^2+4y^2-10z^2+3yz+4xz-11xy = 0$ ଏକ ସମତଳ ଯୁଗ୍ମ ହେବ ଏବଂ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ପରିଶିଷ୍ଟ

ତିନୋଟି ଚଳରାଶି x, y ଏବଂ z ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଏକ ସାଧାରଣ ସମଦ୍ୱିଘାତୀ ପୋଲିନୋମିଆଲର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପାଇଁ ଏକ ବିଶେଷ ପ୍ରଣାଳୀ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ନିମ୍ନ ସମଦ୍ୱିଘାତୀ ପୋଲିନୋମିଆଲ୍ ନିଆଯାଉ

$8x^2-3y^2-10z^2+10xy+17yz+2xz \quad ...(i)$

(i) ରେ $z = 0$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$8x^2-3y^2+10xy$

$= 8x^2+12xy-2xy-3y^2$

$= 4x(2x+3y)-y(2x+3y)$

$= (2x+3y)(4x-y) \quad ...(A)$

(i) ରେ $y = 0$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$8x^2+2xz-10z^2 = 8x^2+10xz-8xz-10z^2$

$= 2x(4x+5z)-2z(4x+5z)$

$= (4x+5z)(2x-2z) \quad ...(B)$

(i) ରେ $x = 0$ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$-3y^2-10z^2+17yz$

କିମ୍ବା, $3y^2-17yz+10z^2$

$= 3y^2-2yz-15yz+10z^2$

$= y(3y-2z)-5z(3y-2z)$

$= (3y-2z)(y-5z) \quad ...(C)$

(A), (B) ଏବଂ (C) କୁ ଏକତ୍ର କଲେ ଆମେ (i) ର ଉତ୍ପାଦକ ପାଇବା

$(4x-y+5z)$ ଏବଂ $(2x+3y-2z)$

$\therefore 8x^2-3y^2-10z^2+10xy+17yz+2xz \equiv (4x-y+5z)(2x+3y-2z)$

x, y ଏବଂ z ସମ୍ବଳିତ ସମସ୍ତ ସମଦ୍ୱିଘାତୀ ପୋଲିନୋମିଆଲ ପାଇଁ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରିବ ।

ମନେରଖ : (i) (A) ର ଉତ୍ପାଦକ $(2x+3y)$ ଏବଂ (B) ର ଉତ୍ପାଦକ $(2x-2z)$ କୁ ଦେଖ । ଯେହେତୁ ଉଭୟରେ $2x$ ସାଧାରଣ, ତେଣୁ $(2x+3y-2z)$ ଗୋଟିଏ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପାଦକ । ସେହିପରି (A) ର $(4x-y)$ ଏବଂ (B) ର $(4x+5z)$ କୁ ଦେଖ । ଆମେ ପାଇବା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପାଦକଟି $(4x-y+5z)$ ।

(ii) ସମୀକରଣ $8x^2 - 3y^2 - 10z^2 + 10xy + 17yz + 2zx = 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଦୁଇଟି ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $4x-y+5z = 0$ ଏବଂ $2x+3y-2z = 0$

(iii) **ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.6** ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମତଳ ଯୁଗ୍ମର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି ପରିଶିଷ୍ଟରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

34.10 ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ (Area of a Triangl

ମନେକର ଏକ ସମତଳର ନର୍ମାଲ୍‌ର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ଏବଂ $\cos\gamma$ ଏବଂ ସମତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A । ତା'ପରେ

(i) yz - ସମତଳ ଉପରେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A ର ଅଭିକ୍ଷେପ $A_1 = A\cos\alpha$

(ii) xz - ସମତଳ ଉପରେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A ର ଅଭିକ୍ଷେପ $A_2 = A\cos\beta$

(iii) xy - ସମତଳ ଉପରେ, କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A ର ଅଭିକ୍ଷେପ $A_3 = A\cos\gamma$

$$\therefore A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = A^2\cos^2\alpha + A^2\cos^2\beta + A^2\cos^2\gamma$$

$$= A^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

$$= A^2 \quad (\text{ଯେହେତୁ } \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1)$$

ଆମେ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀକୁ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ବ୍ୟବହାର କରିବା । ମନେକର ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ ଏବଂ $C(x_3, y_3, z_3)$ ଏବଂ ମନେକର ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ Δ । ମନେକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ-ସମତଳ ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ଯଥାକ୍ରମେ Δ_{xy}, Δ_{yz} ଏବଂ Δ_{zx} ।

xy - ସମତଳ ଉପରେ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A, B ଏବଂ C ର ଅଭିକ୍ଷେପ ଯଥାକ୍ରମେ

$(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ ଏବଂ $(x_3, y_3, 0)$ ।

$$\therefore \Delta_{xy} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \ldots (A)$$

(ମନେ ପକାଅ ଯେ, ତୁମେ ଦ୍ୱିମାତ୍ରିକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ଏବଂ (x_3, y_3) ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଛ ଯାହା ଏଠାରେ (A) ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସେହିପରି $\Delta_{yz} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}$ ଏବଂ $\Delta_{zx} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}$

$$\therefore \Delta^2 = (\Delta_{xy})^2 + (\Delta_{yz})^2 + (\Delta_{zx})^2$$

ଟିପ୍ପଣୀ

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right]$$

ଯାହା ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସୂତ୍ର ।

ଉଦାହରଣ 34.17

(1, 5, 2), (1, 2, –3) ଏବଂ (3, 2, –1) ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $(\Delta_{xy})^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}^2$

$$=\frac{1}{4}[1(2-2)-5(1-3)+1(2-6)]^2 = \frac{1}{4}(10-4)^2 = 9$$

$$(\Delta_{yz})^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{1}{4}[5(-3+1)-2(2-2)+1(-2+6)]^2 = \frac{1}{4}(-10+4)^2 = 9$$

$$(\Delta_{zx})^2 = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}^2$$

$$=\frac{1}{4}[2(1-3)-1(-3+1)+1(-9+1)]^2 = \frac{1}{4}(-4+2-8)^2 = 25$$

$\therefore\ \Delta^2 = 9+9+25 = 43$

$\therefore \Delta = \sqrt{43}$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.7

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) (2, –5, 3), (1, –7, 4) ଏବଂ (2, –3, 5)
   (ii) (3, 0, 1), (4, –1, –1) ଏବଂ (3, –2, –2)
   (iii) (a, 0, 0), (0, b, 0) ଏବଂ (0, 0, c)

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଏକ ସମତଳ ହେଉଛି ଏକ ପୃଷ୍ଠ ଯେପରିକି ଏହା ଉପରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଭାବରେ ସେହି ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରେ ।

- ଏକ ସମତଳର ସାଧାରଣ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $ax+by+cz+d = 0$
- ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1) ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

  $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$
- ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ସମତଳ ସମ୍ଭବ ହେବ ।
- ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣ $Ax+By+Cz+1 = 0$ ରେ ତିନୋଟି ସ୍ୱାଧୀନ ଧ୍ରୁବକ ଅଛି ।
- ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ଏବଂ (x_3, y_3, z_3) ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

- ଛେଦାଂଶ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ଯେଉଁଠି x, y ଓ z ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଉପରେ ସମତଳର ଛେଦାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ a, b ଏବଂ c ।
- ନର୍ମାଲ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ଏକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $lx+my+nz = p$ ଯେଉଁଠି l, m, n ହେଉଛନ୍ତି ସମତଳ ପ୍ରତି ନର୍ମାଲ୍‌ର ଡାଇକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ହେଉଛି p ।
- ଯଦି ଦୁଇଟି ସମତଳ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ହୁଏ, ତେବେ

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

- ଦୁଇଟି ସମତଳ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$
- ଦୁଇଟି ସମତଳ ପରସ୍ପର ସହିତ ସମାନ୍ତର ହେବେ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$
- ଏକ ସମତଳ $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$ ରୁ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (x', y', z') ର ଦୂରତା ହେଉଛି $|p-(x'\cos\alpha+y'\cos\beta+z'\cos\gamma)|$, ଯେଉଁଠାରେ (x', y', z') ବିନ୍ଦୁଟି ସମତଳର ଯେଉଁ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ରହିଛି ସେହି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।
- ଦୁଇଟି ସମତଳ $a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0$ ଏବଂ $a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0$ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1z+d_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2z+d_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

- ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax^2+by^2+cz^2+2hxy+2fyz+2gzx = 0$ ଏକ ସମତଳ ଯୁଗ୍ମକୁ ସୂଚାଏ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2 = 0$
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) ଏବଂ (x_3, y_3, z_3) ହେଲେ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ବର୍ଗ

$$=\frac{1}{4}\left[\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right]$$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $(-2, 5, 4)$ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ $(2, 1, 4)$ ଏବଂ $(2, 6, 4)$ ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $2 : 3$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. $(1, 1, 0)$, $(1, 2, 1)$ ଏବଂ $(-2, 2, -1)$ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ $(0, -1, -1)$, $(4, 5, 1)$, $(3, 9, 4)$ ଏବଂ $(-4, 4, 4)$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ସେହି ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. $(1, -2, -3)$ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥିବା ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ $(3, 2, -1)$ ହେଲେ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. $x+y+2z = 9$ ଏବଂ $2x-y+z = 15$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
7. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $3x-5y+8z-2 = 0$ ଏବଂ $12x-20y+32z+9 = 0$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।
8. 'k' ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $3x-2y+kz-1 = 0$ ଏବଂ $x+ky+5z+2 = 0$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ ।
9. $2x-3y-5z = 7$ ସମତଳଠାରୁ $(3, 2, -5)$ବିନ୍ଦୁ ର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. $2x-y+2z+3 = 0$ ଏବଂ $3x-2y+6z+8 = 0$ ସମତଳ ଦ୍ୱୟର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ସମତଳର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଟିପ୍ପଣୀ

11. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମୀକରଣ $6x^2-12y^2+4z^2+xy+13yz-14xz = 0$ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସମତଳ ଯୁଗ୍ମକୁ ସୂଚାଏ । ସମତଳ ଦ୍ୱୟର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

12. $(1, 2, 1), (3, 4, -2)$ ଏବଂ $(4, 2, -1)$ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.1

1. $ax+by+cz = 0$
2. $ax+by+c(z+2) = 0$
3. $a(x-5)+b(y+7)+c(z-3) = 0$
4. $a\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)+b\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)+c\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)=0$
5. $a(x-2)+b(y-2)+c(z+3) = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.2

1. (a) $5x+2y-3z-17 = 0$ (b) $3x-y+z = 0$
   (c) $x+2y-z = 4$
2. $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$
3. x, y ଓ z ସ୍ଥାନାଙ୍କ - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଛେଦାଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ 12, 8, 6

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.3

1. (i) $\frac{4x}{14}+\frac{12y}{14}-\frac{6z}{14}=2$ (ii) $-\frac{3}{5}y-\frac{4}{5}z=\frac{3}{5}$
2. $x-3y+z-11 = 0$
3. $x-2y+z-6 = 0$
4. $4x+3y-2z = 36$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.4

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{2}$
3. $2x+3y+6z = 7$
4. $2x+2y-3z+3 = 0$
5. $2x-2y+z = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.5

1. (i) $\frac{30}{\sqrt{38}}$ ଏକକ (ii) $\frac{6}{\sqrt{22}}$ ଏକକ
2. $\frac{25}{2\sqrt{11}}$ ଏକକ

3. (i) $10x-y+2z-11 = 0$; $4x+8y-16z-17 = 0$

(ii) $4x+38y-62z-39 = 0$; $22x+14y+10z-195 = 0$

(iii) $25x+17y+62z-78 = 0$; $x+35y-10z-156 = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.6

1. $\cos^{-1}\left(\frac{16}{21}\right)$ 3. $\frac{\pi}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 34.7

1. (i) $\sqrt{11}$ ବର୍ଗ ଏକକ

(ii) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ

(iii) $\frac{1}{2}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}$ ବର୍ଗ ଏକକ

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସକାର୍ଯ୍ୟ

1. $a(x+2)+b(y-5)+c(z-4) = 0$
2. $a(x-2)+b(y-3)+c(z-4) = 0$
3. $2x+3y-3z-5 = 0$
4. $5x-7y+11z+4 = 0$
5. $x+2y+z = 6$
6. $\frac{\pi}{3}$
8. $k = -1$
9. $\frac{18}{\sqrt{38}}$
10. $5x-y-4z-3 = 0$; $23x-13y+32z+45 = 0$
11. $3x-4y-z = 0$; $2x+3y-4z = 0$; $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{26}\sqrt{29}}\right)$
12. $\frac{1}{2}\sqrt{77}$ ବର୍ଗ ଏକକ