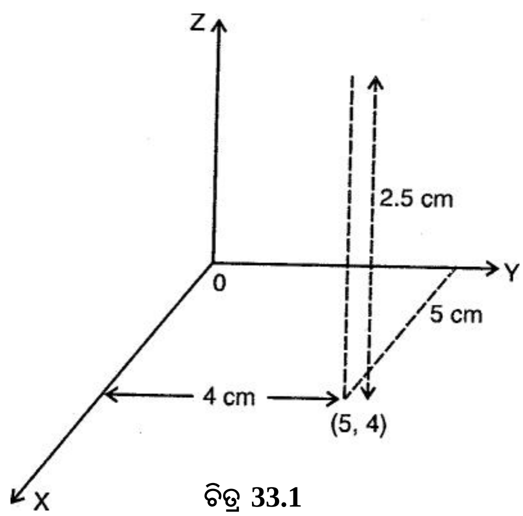
୩୩

ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତିର ଉପକ୍ରମ

ତୁମେ ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପଢ଼ିଛ ଯେ, ସମତଳ ଉପରେ ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମ୍ଭବ ଯାହାକୁ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ସେହି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ରମିତ ଯୋଡି (x, y) ପାଇଁ ସମତଳ ଉପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ।

ମନେକର ଗୋଟିଏ ଘର ଚଟାଣ ଉପରେ ଏକ ରବର ବଲ୍‌କୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ନିକ୍ଷେପ କରିବା । ଘରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ ପ୍ରସ୍ଥକୁ ଅକ୍ଷ ନେଇ ସେଇ ଅକ୍ଷ ସାହାଯ୍ୟରେ ବଲ୍‌ଟି ଚଟାଣକୁ ଆଘାତ କରିଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । କିନ୍ତୁ ଯେତେବେଳେ ବଲ୍‌ଟି ଚଟାଣକୁ ଆଘାତ କଲାପରେ ଲମ୍ବ ଦିଗରେ ବାଉନ୍ସ କରି ଉପରକୁ ଯିବ, ସେତେବେଳେ ଯେକୌଣସି ସମୟରେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ବଲ୍‌ର ଅବସ୍ଥିତିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପୂର୍ବରୁ ନେଇଥିବା ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷ ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ନାହିଁ । ଯଦି ଆମେ ଚଟାଣଠାରୁ ବଲ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା ଜାଣିବା, ତେବେ ଯେକୌଣସି ସମୟରେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ବଲ୍‌ଟିର ଅବସ୍ଥିତିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ପୂର୍ବ ଦୁଇ ଅକ୍ଷ ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଯଦି ଚଟାଣ ଠାରୁ ବଲ୍‌ର ଉଚ୍ଚତା 2·5 ସେ.ମି. ଏବଂ ବଲ୍‌ଟି ଚଟାଣକୁ ଆଘାତ କରିଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (5, 4) ହୁଏ, ତେବେ ଏହି ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ବଲ୍‌ଟି ଥିବା ସ୍ଥାନର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଆମେ (5, 4, 2·5) ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।



ଚିତ୍ର 33.1

ତେଣୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ / ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ, ସ୍ପେସ୍‌ରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ସହିତ ଗୋଟିଏ କ୍ରମିତ ତ୍ରୟୀକୁ ଓ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଗୋଟିଏ କ୍ରମିତ ତ୍ରୟିକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିପାରିବ;
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;

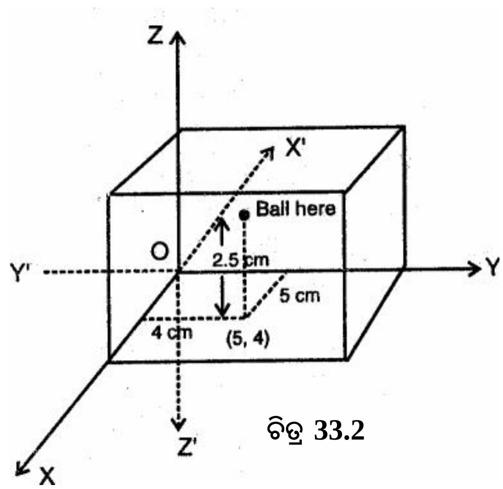
- ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଏକ ଦତ୍ତ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ / ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଡିରେକସନ୍ କୋସାଇନ୍ / ରେସିଓର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରିପାରିବ;
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡିରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିରୂପଣ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ବା ସମାନ୍ତର ହେବା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଦ୍ୱିମାତ୍ରିକ ସମତଳ ଜ୍ୟାମିତି
- ବୀଜଗଣିତ, ଜ୍ୟାମିତି, ତ୍ରିକୋଣମିତି ଏବଂ ଭେକ୍ଟର ବୀଜଗଣିତର ମୌଳିକ ଜ୍ଞାନ ।

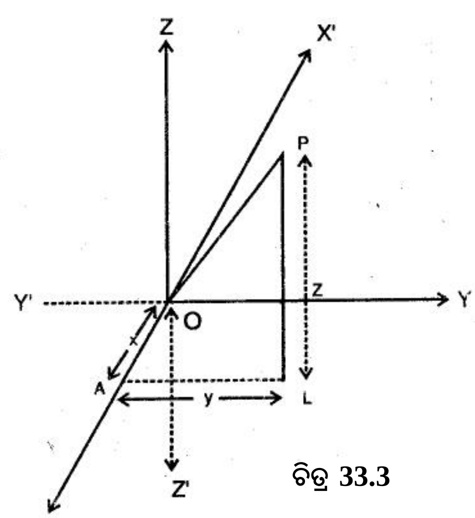
33.1 ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପଦ୍ଧତି ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinate system and co-ordinates of a point in space)

ଘରର ଗୋଟିଏ କଣକୁ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ନେଇ ବାଉନ୍ସ ହେଉଥିବା ବଲ୍‌ର ଉଦାହରଣକୁ ମନେ ପକାଅ । ଘରର ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କଣକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନେବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ । ଆମେ ଘରର ଯେକୌଣସି କଣ (ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ)କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନେଇ ପାରିବା ଏବଂ ସେହି ଅନୁସାରେ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କର ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବା । ତେଣୁ ଘରର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନେଇପାରିବା ।



ଚିତ୍ର 33.2

ମନେକର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ O । O ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ତିନୋଟି ସରଳରେଖା X'OX, Y'OY, Z'OZ ଅଙ୍କନ କର । O କୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପଦ୍ଧତିର ମୂଳବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ଏବଂ X'OX, Y'OY ଏବଂ Z'OZ ସରଳରେଖାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x - ଅକ୍ଷ, y- ଅକ୍ଷ z- ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 33.2 ରେ, ଅକ୍ଷମାନଙ୍କର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗକୁ ତୀର ଚିହ୍ନ ଥିବା ଗାଢ଼ ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି । x ଏବଂ y ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସମତଳକୁ XY - ସମତଳ (XOY ସମତଳ) କୁହାଯାଏ । ସେହିଭଳି YZ- ସମତଳ (YOZ ସମତଳ) ଏବଂ ZX - ସମତଳ (ZOX- ସମତଳ) ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇପାରିବ । ଏହି ତିନୋଟି ସମତଳକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ କୁହାଯାଏ । ଏହି ସମତଳ ତିନୋଟି ସମୁଦାୟ ସ୍ପେଶ୍‌କୁ ଆଠଟି ଅଂଶରେ ଭାଗ କରୁଛି ଯାହାକୁ **ଅଷ୍ଟାଂଶକ** (Octant - ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟ) କୁହାଯାଏ ।

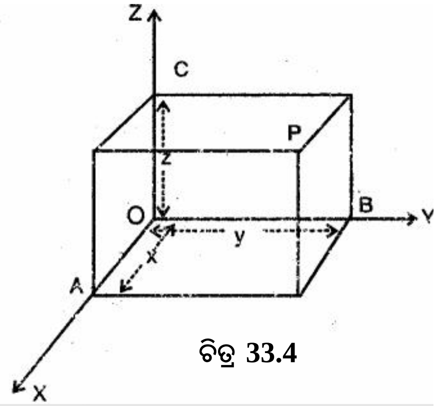


ଚିତ୍ର 33.3

ମନେକର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ P ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁଦେଇ XY - ସମତଳ ଉପରେ PL ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଯାହା ଉକ୍ତ ସମତଳକୁ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । OY ସହିତ ସମାନ୍ତର କରି L ବିନ୍ଦୁଦେଇ LA ଅଙ୍କନ କର ଯାହା OX କୁ A ବିନ୍ଦୁରେ

ଛେଦ କରିବ । ଯଦି ଆମେ ଲେଖିବା OZ = x, AL = y ଏବଂ LP = z, ତେବେ (x, y, z) କୁ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯିବ ।

ପୁନଶ୍ଚ, ଯଦି ଆମେ P ବିନ୍ଦୁଦେଇ ଆୟତଘନ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ କରିବା ଯାହାର ତିନୋଟି ଧାର OA, OB ଏବଂ OC ପରସ୍ପର ସହିତ O ବିନ୍ଦୁରେ ମିଳିତ ହେବେ ଏବଂ OP ଏହାର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ହେବ, ତେବେ (OA, OB, OC) ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅର୍ଥାତ୍ (x, y, z) କୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 33.4

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ଚିତ୍ର 33.4 ରେ ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାର :

(i) P ର x ସ୍ଥାନାଙ୍କ = OA = P ବିନ୍ଦୁରୁ YZ - ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

(ii) P ର y ସ୍ଥାନାଙ୍କ = OB = P ବିନ୍ଦୁରୁ ZX - ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

(iii) P ବିନ୍ଦୁର z ସ୍ଥାନାଙ୍କ = OC = P ବିନ୍ଦୁରୁ XY - ସମତଳ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ।

ତେଣୁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ତିନୋଟି ଯାକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ YZ, ZX ଏବଂ XY ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲମ୍ବ ଦୂରତାକୁ P ବିନ୍ଦୁର x, y ଏବଂ z ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ ।

ଏହି ହେତୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P ପାଇଁ କ୍ରମିତ ତ୍ରୟୀ (x, y, z) ମିଳିବ ଯାହାକୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ କୁହାଯାଏ । ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଯେକୌଣସି କ୍ରମିତ ତ୍ରୟୀ (x, y, z) ପାଇଁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ମିଳିବ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y, z) ହେବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ :

1. ଠିକ୍ ଯେପରି ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷ ସମତଳକୁ ଚାରୋଟି ପାଦରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ସେହିପରି ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଦ୍ୱାରା ସ୍ପେଶ୍ ଆଠଟି ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟ ରେ ବିଭକ୍ତ ହେବ ଯାହାକୁ ନାମିତ କରିବା OXYZ, OX′YZ, OXY′Z, OXYZ′, OXY′Z′, OX′YZ′, OX′Y′Z ଏବଂ OX′Y′Z′ ।
2. ଯଦି P ପ୍ରଥମ ଅକଟାଣ୍ଟରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁହୁଏ, ତେବେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅକଟାଣ୍ଟରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ବିନ୍ଦୁ ମିଳିବ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରୁ ଦୂରତାର ପରମମାନ ଗୁଡିକ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସହ ସମାନ ହେବ । ଯଦି P ବିନ୍ଦୁ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, b, c) ହୁଏ, ତେବେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ (i) ରେ ଆଲୋଚିତ ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (–a, b, c), (a, –b, c), (a, b, –c), (a, –b, –c), (–a, b, –c), (–a, –b, c) ଏବଂ (–a, –b, –c) ହେବ ।
3. XY, YZ ଏବଂ ZX - ସମତଳ ଉପରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (a, b, 0), (0, b, c) ଏବଂ (a, 0, c) ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।
4. X - ଅକ୍ଷ, Y - ଅକ୍ଷ ଏବଂ Z - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (a, 0, 0), (0, b,0) ଏବଂ (0, 0, c) ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।
5. ତୁମେ O ଲକ୍ଷ୍ୟକରି ପାରିବ ଯେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଅନୁଯାୟୀ $\overrightarrow{OP}$ ଭେକ୍ଟରର P ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର (x,y,z) ଅନୁରୂପ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 33.1 ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ କେଉଁ ଅକଟାଣ୍ଟରେ ଅଛି ଲେଖ ।

(a) (2, 6, 8) (b) (–1, 2, 3) (c) (–2, –5, 1),

(d) (–3, 1, – 2) (e) (–6, –1, –2)

ସମାଧାନ :

(a) ଯେହେତୁ ସବୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ (2, 6, 8) ବିନ୍ଦୁଟି OXYZ ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟରେ ରହିବ ।

(b) ଯେହେତୁ x ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ, y ଏବଂ z ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ (–1, 2, 3) ବିନ୍ଦୁଟି OX′YZ ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟରେ ରହିବ ।

(c) ଯେହେତୁ x ଏବଂ y ଉଭୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ z ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ (–2, –5, 1) ବିନ୍ଦୁଟି OX′Y′Z ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟରେ ରହିବ ।

(d) ଯେହେତୁ x ଏବଂ z ଉଭୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ, y ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ (–3, 1, –2) ବିନ୍ଦୁଟି OX′YZ′ ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟରେ ରହିବ ।

(e) ଯେହେତୁ x, y ଏବଂ z, ତିନୋଟି ଯାକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଋଣାତ୍ମକ ତେଣୁ (–6, –1, –2) ବିନ୍ଦୁଟି OX′Y′Z′ ଅକ୍‌ଟାଣ୍ଟରେ ରହିବ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.1

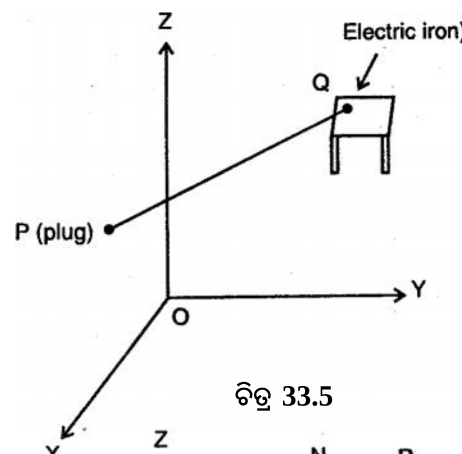
1. ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡିକ କେଉଁ ଅକଟାଣ୍ଟରେ ଅବସ୍ଥିତ ଲେଖ ।

(a) (–4, 2, 5) (b) (4, 3, –6) (c) (–2, 1, –3)

(d) (1, –1, 1) (e) (8, 9, –10)

33.2 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା (Distance between two points)

ମନେକର ଘରର ଏକ କାନ୍ଥରେ ଇଲେକ୍ଟ୍ରି ପ୍ଲଗ୍ ଅଛି ଏବଂ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ଏକ ଇସ୍ତ୍ରି ଅଛି । ଇଲେକ୍ଟ୍ରି ଇସ୍ତ୍ରିକୁ ପ୍ଲଗରେ ସଂଯୋଗ କରିବା ପାଇଁ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତେ ତାର ଦରକାର ହେବ ? ଏହା ଏକ ଉଦାହରଣ ଯେଉଁଥିରେ ଆମେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ବାହାର କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।



ଚିତ୍ର 33.5

ମନେକର ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) । PQ କୁ କର୍ଣ୍ଣ ନେଇ PMSNRLKQ ଆୟତଘନ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ କର ।

KQ ରେଖା ପ୍ରତି PK ଲମ୍ବ ।

$\therefore$ ସମକୋଣୀ Δ PKQ ରେ (K କୋଣ ସମକୋଣ)

ଆମେ ଜାଣୁ $PQ^2 = PK^2+KQ^2$

ପୁନଶ୍ଚ PKL ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ (L କୋଣ ସମକୋଣ)

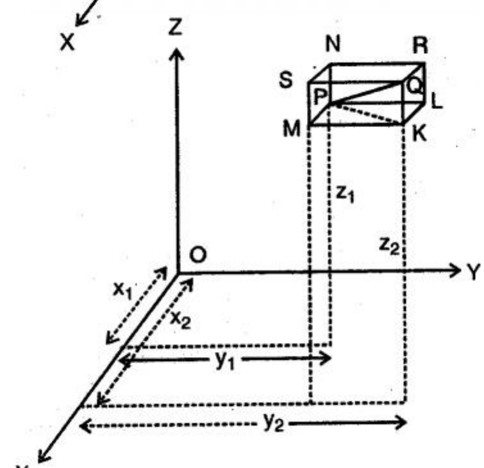
$PK^2 = KL^2+PL^2 = MP^2+PL^2$ ($\because KL = MP$)

$\therefore PQ^2 = MP^2+PL^2+KQ^2$ ... (i)

MP, PL ଏବଂ KQ ଧାର ଗୁଡ଼ିକ, ସ୍ଥାନାଙ୍କ-ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ YOZ ସମତଳରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା = x_1, ଏବଂ YOZ ସମତଳରୁ Q ଏବଂ M ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା = x_2

$\therefore MP = |x_2-x_1|$



ଚିତ୍ର 33.6

ସେହିପରି $PL = |y_2 - y_1|$ ଏବଂ $KQ = |z_2 - z_1|$

$\therefore PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ [(i) ରୁ]

କିମ୍ବା $\mathbf{|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା :

ଯଦି ବିନ୍ଦୁ $Q(x_2, y_2, z_2)$, ମୂଳବିନ୍ଦୁ (0, 0, 0) ସହିତ ମିଶିଯାଏ, ତେବେ $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

$\therefore$ ମୂଳବିନ୍ଦୁରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

$$|OP| = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z_1 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

ସାଧାରଣ ଭାବେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ P(x, y, z) ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ଉଦାହରଣ 33.2

ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (2, 5, –4) ଏବଂ (8, 2, –6) ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର P(2, 5, –4) ଏବଂ Q(8, 2, –6) ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ।

$$\therefore |PQ| = \sqrt{(8-2)^2 + (2-5)^2 + (-6+4)^2}$$

$$= \sqrt{36+9+4} = \sqrt{49} = 7$$

$\therefore$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 7 ଏକକ ।

ଉଦାହରଣ 33.3

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (–2, 4, –3), (4, –3, –2) ଏବଂ (–3, –2, 4) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ହେଉଛନ୍ତି $A(-2, 4, -3), B(4, -3, -2)$ ଏବଂ $C(-3, -2, 4)$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ

$$|AB| = \sqrt{(4+2)^2 + (-3-4)^2 + (-2+3)^2} = \sqrt{36+49+1} = \sqrt{86}$$

$$|BC| = \sqrt{(-3-4)^2 + (-2+3)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{49+1+36} = \sqrt{86}$$

$$|CA| = \sqrt{(-2+3)^2 + (4+2)^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{86}$$

ଯେହେତୁ |AB| = |BC| = |CA|, ଏଣୁ Δ ABC ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଉଦାହରଣ 33.4

ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜ ହେବ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

(a) A(–1, 2, 3), B(1, 4, 5) ଏବଂ C(5, 4, 0)

(b) (2, –3, 3), (1, 2, 4) ଏବଂ (3, –8, 2)

ସମାଧାନ :

(a) $|AB| = \sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}$

$= \sqrt{2^2+2^2+2^2} = 2\sqrt{3} \simeq 3\cdot 464$ (ପ୍ରାୟ)

$|BC| = \sqrt{(5-1)^2+(4-4)^2+(0-5)^2}$

$= \sqrt{16+0+25} = \sqrt{41} \simeq 6\cdot 4$ (ପ୍ରାୟ)

ଏବଂ $|AC| = \sqrt{(5+1)^2+(4-2)^2+(0-3)^2}$

$= \sqrt{36+4+9} = 7$

$\therefore |AB|+|BC| = 3\cdot 464 + 6\cdot 4 = 9\cdot 864 > |AC|$

$\therefore$ |AB|+|AC| > |BC| ଏବଂ |BC|+|AC| > |AB|

ଯେହେତୁ, ଯେକୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର, ତେଣୁ ଉପରୋକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

(b) (2, –3, 3), (1, 2, 4) ଏବଂ (3, –8, 2) ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଏବଂ R ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଉ ।

$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2+(2+3)^2+(4-3)^2}$

$= \sqrt{1+25+1} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$|QR| = \sqrt{(3-1)^2+(-8-2)^2+(2-4)^2}$

$= \sqrt{4+100+4} = 6\sqrt{3}$

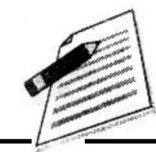
$|PR| = \sqrt{(3-2)^2+(-8+3)^2+(2-3)^2}$

$= \sqrt{1+25+1} = 3\sqrt{3}$

ଏଠାରେ $|PQ|+|PR| = 3\sqrt{3}+3\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = |QR|$

ଏଣୁ ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ନାହିଁ ।

ପ୍ରକୃତରେ ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରେ ରହିବେ ।



ଟିପ୍ପଣୀ

ଉଦାହରଣ 33.5

ଦର୍ଶାଅ ଯେ A(1, 2, –2), B(2, 3, –4) ଏବଂ C(3, 4, –3) ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

ସମାଧାନ : $AB^2 = (2-1)^2+(3-2)^2+(-4+2)^2 = 1+1+4 = 6$

$BC^2 = (3-2)^2+(4-3)^2+(-3+4)^2 = 1+1+1 = 3$

ଏବଂ $AC^2 = (3-1)^2+(4-2)^2+(-3+2)^2 = 4+4+1 = 9$

ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ $AB^2+BC^2 = 6+3 = 9 = AC^2$

$\therefore \Delta ABC$ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଏଣୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ 33.6

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A(0, 4, 1), B(2, 3, –1), C(4, 5, 0) ଏବଂ D(2, 6, 2) ବିନ୍ଦୁମାନ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ

$AB = \sqrt{(2-0)^2+(3-4)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3$ ଏକକ

$BC = \sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2+(0+1)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3$ ଏକକ

$CD = \sqrt{(2-4)^2+(6-5)^2+(2-0)^2}$

$= \sqrt{4+1+4} = 3$ ଏକକ

ଏବଂ $DA = \sqrt{(0-2)^2+(4-6)^2+(1-2)^2}$

$= \sqrt{4+4+1} = 3$ ଏକକ

$\therefore AB = BC = CD = DA$

ବର୍ତ୍ତମାନ $AC^2 = (4-0)^2+(5-4)^2+(0-1)^2$

$= 16 + 1 + 1 = 18$

$\therefore AB^2+BC^2 = 3^2+3^2 = 18 = AC^2$

$\therefore \angle B = 90^0$

$\therefore$ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $AB = BC = CD = DA$ ଏବଂ $\angle B = 90^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) (4, 3, –6) ଏବଂ (–2, 1, –3) (b) (–3, 1, –2) ଏବଂ (–3, –1, 2)

(c) (0, 0, 0) ଏବଂ (–1, 1, 1)

2. (5, –1, 7) ଏବଂ (a, 5, 1) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 9 ଏକକ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ ‘a’ ର ମୂଲ୍ୟ 2 କିମ୍ୱା 8 ହେବ ।

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (a, b, c), (b, c, a) ଏବଂ (c, a, b) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (–1, 0, –4), (0, 1, –6) ଏବଂ (1, 2, –5) ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ତ୍ରିଭୁଜ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (0, 7, 10), (–1, 6, 6), ଏବଂ (–4, 9, 6) ବିନ୍ଦୁମାନେ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ।

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (3, –1, 2), (5, –2, –3), (–2, 4, 1) ଏବଂ (–4, 5, 6) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (2, 2, 2), (–4, 8, 2), (–2, 10, 10) ଏବଂ (4, 4, 10) ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେବେ ।

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଏକରେଖୀ ।

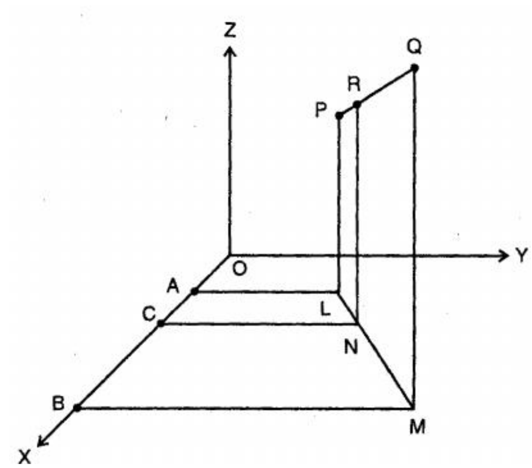
(a) (–3, 2, 4), (–1, 5, 9) ଏବଂ (1, 8, 14)

(b) (5, 4, 2), (6, 2, –1) ଏବଂ (8, –2, –7)

(c) (2, 5, –4), (1, 4, –3) ଏବଂ (4, 7, –6)

33.3 ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Coordinates of a point of division of a line segment)

ମନେକର ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ କୁ R(x, y, z) ବିନ୍ଦୁ l : m ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।



ଚିତ୍ର 33.7

ମନେକର P ଓ Q ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) । P, R ଏବଂ Q ବିନ୍ଦୁରୁ XY - ସମତଳ ପ୍ରତି PL, RN ଏବଂ QM ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । OX ପ୍ରତି LA, NC ଏବଂ MB ଲମ୍ବ ମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ AC = OC–OA = $x-x_1$ ଏବଂ BC = OB–OC = x_2-x

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $\frac{AC}{BC}=\frac{LN}{NM}=\frac{PR}{RQ}=\frac{l}{m}$

$$\therefore \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{l}{m}$$

$\Rightarrow mx-mx_1 = lx_2-lx$

$\Rightarrow (l+m)\,x = lx_2+mx_1$

$$\Rightarrow x=\frac{lx_2+mx_1}{l+m}$$

ସେହିପରି, ଯଦି ଆମେ OY ଏବଂ OZ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରିବା, ଆମେ ପାଇବା

$$y=\frac{ly_2+my_1}{l+m} \text{ ଏବଂ } z=\frac{lz_2+mz_1}{l+m}$$

$\therefore$ R ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m},\frac{ly_2+my_1}{l+m},\frac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$

ଯଦି $\lambda=\frac{l}{m}$, ତେବେ PQ କୁ $\lambda : 1$ ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରୁଥିବା R ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ,

$$\left(\frac{\lambda x_2+x_1}{\lambda+1},\frac{\lambda y_2+y_1}{\lambda+1},\frac{\lambda z_2+z_1}{\lambda+1}\right),\ \lambda+1\neq 0$$

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ λ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ପାଇଁ ଆମେ PQ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା ଏବଂ ବିପରୀତ କ୍ରମେ PQ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ R ପାଇଁ ଆମେ λ ର ଏକ ମାନ ପାଇବା । ଯଦି λ ଧନାତ୍ମକ, R ବିନ୍ଦୁଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ ଉପରେ ରହିବ ଏବଂ ଯଦି λ ରଣାତ୍ମକ, R ବିନ୍ଦୁଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ ଉପରେ ରହିବ ନାହିଁ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବସ୍ଥାରେ R ବିନ୍ଦୁଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ କୁ $-\lambda : 1$ ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରିବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ କୁ $l : m$ ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m},\frac{ly_2-my_1}{l-m},\frac{lz_2-mz_1}{l-m}\right)$$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : PQ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

ଉଦାହରଣ 33.7

ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (2, –4, 3) ଏବଂ (–4, 5, –6) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A(2, –4, 3) ଏବଂ B (–4, 5, –6) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ,

ମନେକର P(x, y, z) ବିନ୍ଦୁଟି AB କୁ 2 : 1 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।

$$\therefore x = \frac{2(-4)+1\times 2}{2+1} = -2, y = \frac{2\times 5+1(-4)}{2+1} = 2$$

ଏବଂ $z = \frac{2(-6)+1\times 3}{2+1} = -3$

ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–2, 2, –3)

ଉଦାହରଣ 33.8

(–1, –3, 2) ଏବଂ (1, –1, 2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 3 ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (–1, –3, 2) ଏବଂ (1, –1, 2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ରୂପେ ନାମିତ କରାଯାଉ ।

ମନେକର R(x, y, z) ବିନ୍ଦୁ, PQ କୁ 2 : 3 ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।

$$\therefore x = \frac{2(1)-3(-1)}{2-3} = -5, y = \frac{2(-1)-3(-3)}{2-3} = -7$$

ଏବଂ $z = \frac{2(2)-3(2)}{2-3} = 2$

ତେଣୁ R ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–5, –7, 2)

ଉଦାହରଣ 33.9

(2, –3, 5) ଏବଂ (7, 1, 3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ XY - ସମତଳ ଯେଉଁ ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରୁଛି ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅନୁପାତ $l : m$

$\therefore$ ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(\frac{7l+2m}{l+m}, \frac{l-3m}{l+m}, \frac{3l+5m}{l+m}\right)$

ଯେହେତୁ ବିନ୍ଦୁଟି XY - ସମତଳରେ ଅଛି, ତେଣୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ z = 0

$$\therefore \frac{3l+5m}{l+m} = 0 \Rightarrow \frac{l}{m} = -\frac{5}{3}$$

ତେଣୁ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ XY - ସମତଳ 5 : 3 ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଛି ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.3

1. (2, –5, 3) ଏବଂ (–3, 5, –2) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 1 : 4 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. (2, –3, 1) ଏବଂ (3, 4, –5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 3 : 2 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଏବଂ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।
3. (2, 4, 5) ଏବଂ (3, 5, –4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ YZ - ସମତଳ କେଉଁ ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରୁଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (3, 5, –7) ଏବଂ (–2, 1, 8) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ YZ - ସମତଳ 3 : 2 ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\left(0, \frac{13}{5}, 2\right)$ ।

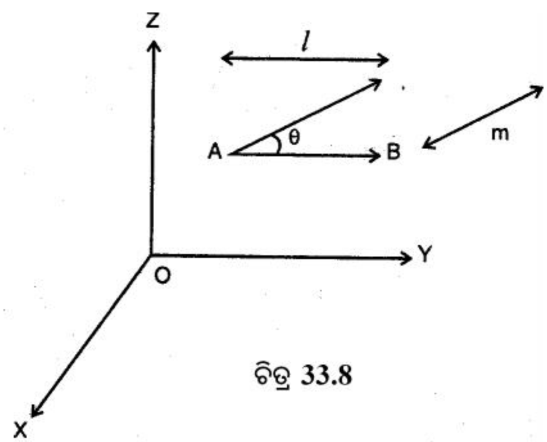
5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (–2, 4, 7) ଏବଂ (3, –5, 8) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଗୁଡିକ 2 : 3 ଏବଂ 4 : 5 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ ଏବଂ 7 : 8 ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରନ୍ତି ।

6. $P(z_1, y_1, x_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ 2 : 1 ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ R ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର । ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ Q ବିନ୍ଦୁଟି PR ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

33.4 ଦୁଇଟି ରେଖା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀକୋଣ (Angle between two lines)

ସମତଳ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ବିଷୟରେ ତୁମେ ଆଗରୁ ଧାରଣା କରିଛ । ଏହି ଧାରଣାକୁ ଆମେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କରିବା ।

ମନେକର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ବା ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଅଛନ୍ତି । ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ A ନିଅ ଏବଂ ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର ଯାହା ପୂର୍ବରୁ ଥିବା ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସହିତ ସମାନ୍ତର । ଏହି ଦୁଇ ସରଳରେଖା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣକୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ବୋଲି କହିବା ।



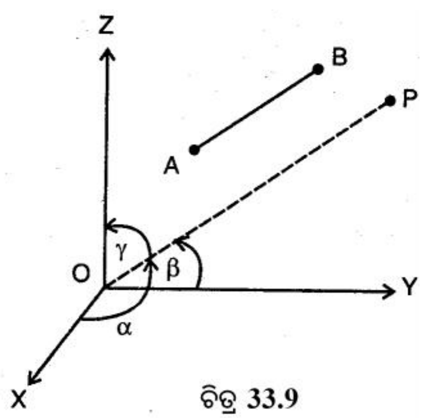
ଚିତ୍ର 33.8

ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ତୁମେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ, l ଏବଂ m ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ ।

33.5 ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ (Direction cosines of a Line)

ଯଦି AB ରେଖା X, Y ଏବଂ Z ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଯଥାକ୍ରମେ α, β ଏବଂ γ କୋଣ ଗଠନ କରେ, ତେବେ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, ଏବଂ $\cos\gamma$ କୁ AB ର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ l, m ଏବଂ n ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ

$l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$ ଏବଂ $n = \cos\gamma$ ।



ଚିତ୍ର 33.9

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ତୁମେ ସହଜରେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ, X - ଅକ୍ଷର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଉଛନ୍ତି 1, 0, 0, କାରଣ ସରଳରେଖାଟି X - ଅକ୍ଷ ସହିତ ମିଶିଯାଇଛି ଏବଂ Y, Z - ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ । ଯେହେତୁ $\cos 0^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$ । ସେହିପରି Y ଏବଂ Z - ଅକ୍ଷର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଯଥାକ୍ରମେ 0, 1, 0 ଏବଂ 0, 0, 1 ।

33.5.1 ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ (Direction cosines of a Line)

ମନେକର ଏକ ରେଖା OP ର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ $\cos\alpha$, $\cos\beta$ ଏବଂ $\cos\gamma$ ଅର୍ଥାତ୍ l, m ଏବଂ n ।

ପୁନଶ୍ଚ ଯେହେତୁ, $\angle OLP$, $\angle OMP$ ଏବଂ $\angle ONP$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ସମକୋଣ ଅଟନ୍ତି, ଏଣୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{OL}{OP} = \cos\alpha = l$$

$\frac{OM}{OP} = \cos\beta = m$ ଏବଂ $\frac{ON}{OP} = \cos\gamma = n$

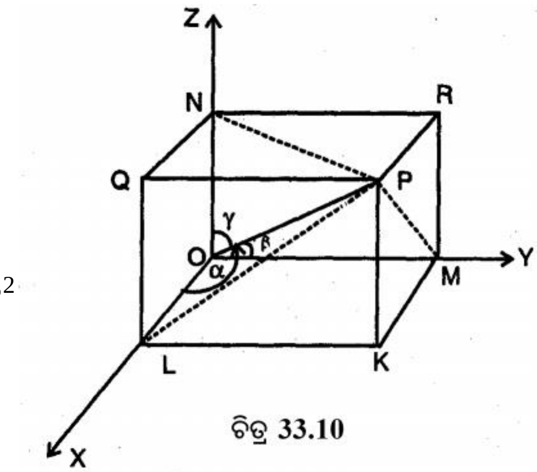
ଅର୍ଥାତ୍ $l \cdot OP = OL$, $m \cdot OP = OM$ ଏବଂ $n \cdot OP = ON$

$\therefore OP^2(l^2 + m^2 + n^2) = OL^2 + OM^2 + ON^2 = OP^2$

$\Rightarrow l^2 + m^2 + n^2 = 1$

ଅର୍ଥାତ୍ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

ଏହା ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ।



ଚିତ୍ର 33.10

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ 1 : ଯଦି ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା a, b ଏବଂ c ଯଥାକ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେହି ସଂଖ୍ୟା a, b ଏବଂ c କୁ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ କିମ୍ବା ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର a, b ଏବଂ c ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ l, m, n ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ l, m ଏବଂ n କୁ a, b ଏବଂ c ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

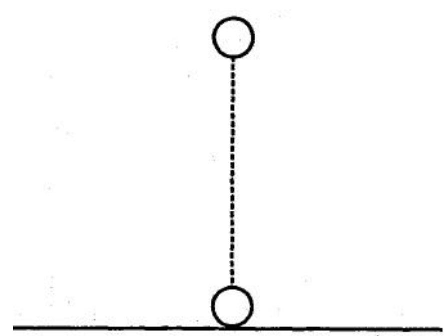
$$\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = \pm\frac{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\Rightarrow l = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},\ m = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\ \ n = \pm\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

ଯେଉଁଠି ସବୁଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ହୁଏତ ଧନାତ୍ମକ ଅଥବା ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ନିଆଯିବ ।

33.6 ଅଭିକ୍ଷେପ (Projection)

ମନେକର ତୁମେ ଏକ ଗଛର ଛାୟା ତଳେ ଠିଆ ହୋଇଛ । ଗୋଟିଏ ସମୟରେ, ଯେତେବେଳେ ସୂର୍ଯ୍ୟ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ଗଛ ଉପରେ ଥିବେ, ସେହି ସମୟରେ ଭୂମିରେ ପଡୁଥିବା ଗଛର ଛାଇକୁ ଆମେ ଗଛର ଭୂମି ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ବୋଲି କହିଥାଉ ।

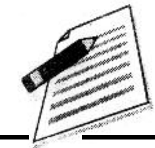


ଚିତ୍ର 33.11

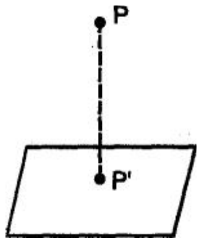
ଏହାକୁ ଆମେ ଅଭିକ୍ଷେପ କହୁ, କାରଣ ଗଛ ଉପରେ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ପଡୁଥିବା ରଶ୍ମି ଦ୍ୱାରା ସୃଷ୍ଟ ଗଛର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରତିବିମ୍ବକୁ ନେଇ ଛାୟାଟି ଗଠିତ । ବାଉନ୍ସ କରୁଥିବା ବଲ୍‌ର ଉଦାହରଣକୁ ମନେ ପକାଅ । ଯେତେବେଳେ ବଲ୍‌ଟି ମୁକ୍ତ ଭାବରେ ଶୂନ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଭୂମି ଉପରେ ପଡ଼େ, ସେତେବେଳେ ଭୂମି ଉପରିସ୍ଥ ବଲ୍ ପଡ଼ିଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ଶୂନ୍ୟରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଭୂମି ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

33.6.1 ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ (Projection of a point and a line segment)

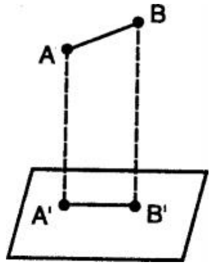
ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରୁ ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବର ପାଦ ବିନ୍ଦୁକୁ ଆମେ ଉକ୍ତ ସମତଳ ଉପରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଅଭିକ୍ଷେପ କହିଥାଉ । ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟରୁ ଏକ ସମତଳ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ପାଦ



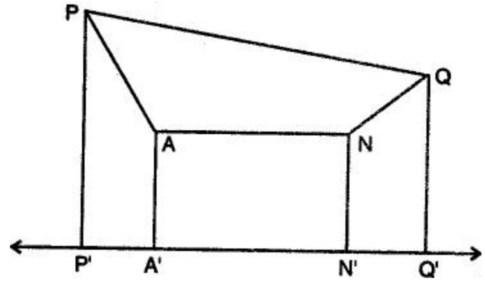
ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଉକ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡର ସେହି ସମତଳ ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ କୁହାଯାଇଥାଏ । ଆମେ ସେହିପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅନ୍ୟ ଏକ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପର ସଂଜ୍ଞା ଦେଇପାରିବା ।



ଚିତ୍ର 33.12



ଚିତ୍ର 33.13



ଚିତ୍ର 33.14

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ ହେଉଛି ବିଖଣ୍ଡିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କର ସେହି ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଅଭିକ୍ଷେପ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ । ଅର୍ଥାତ୍ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ = PA ର ଅଭିକ୍ଷେପ + AN ର ଅଭିକ୍ଷେପ + NQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ ।

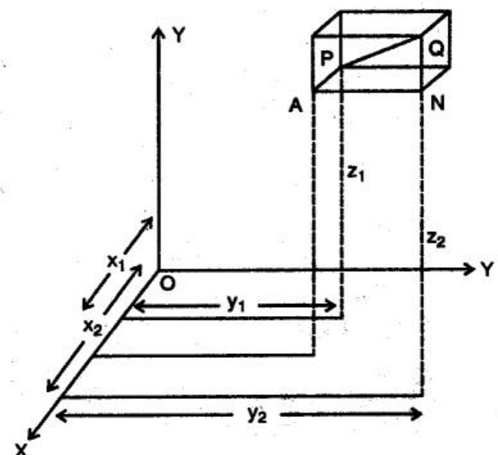
33.6.2 ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ, ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ (Projection of a line segment joining two points on a line)

ମନେକର $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ । l, m ଓ n ଡାଇରେକ୍ସନ କୋସାଇନ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରେ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଏଥିପାଇଁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର କରି ସମତଳ ମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଯେପରି ଏକ ଆୟତଘନ ଅଙ୍କିତ ହେବ ଏବଂ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ହେବ PQ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $PA = x_2 - x_1$, $AN = y_2 - y_1$ ଏବଂ $NQ = z_2 - z_1$

PQ, AN ଏବଂ NQ ରେଖା ଯଥାକ୍ରମେ X-ଅକ୍ଷ, Y- ଅକ୍ଷଏବଂ Z - ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ୍ତର ।



ଚିତ୍ର 33.15

ତେଣୁ, l, m ଓ n ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଥିବା ରେଖା ଉପରେ ସେମାନଙ୍କର ଅଭିକ୍ଷେପ ଯଥାକ୍ରମେ $(x_2 - x_1)l$, $(y_2 - y_1)m$ ଏବଂ $(z_2 - z_1)n$ ।

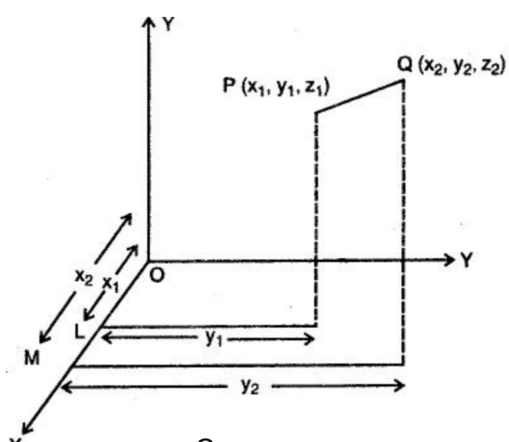
ମନେ ପକାଅ, ଯେକୌଣସି ସରଳରେଖା ଉପରେ PQର ଅଭିକ୍ଷେପ ହେଉଛି PA, AN ଏବଂ NQ ର ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଅଭିକ୍ଷେପର ସମଷ୍ଟି ସହିତ ସମାନ ।

ତେଣୁ ଏଠାରେ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ ହେଉଛି

$$l(x_2 - x_1) + m(y_2 - y_1) + n(z_2 - z_1)$$

33.7 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ (Direction cosines of the line joining two points) :

ମନେକର $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟରୁ X - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ L ଏବଂ M ।



ଚିତ୍ର 33.16

ଯେପରିକି $OL = x_1$ ଏବଂ $OM = x_2$ । x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ $LM = OM–OL = x_2–x_1$

ଯଦି PQ ର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ X - ଅକ୍ଷ ଉପରେ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ $= l\cdot PQ$

$\therefore\ l\,PQ = x_2–x_1$

ସେହିପରି Y - ଅକ୍ଷ ଏବଂ Z - ଅକ୍ଷ ଉପରେ PQ ର ଅଭିକ୍ଷେପ ନେଲେ ଆମେ ପାଇବା ଯଥାକ୍ରମେ,

$mPQ = y_2–y_1$ ଏବଂ $nPQ = z_2–z_1$

$$\therefore \frac{x_2 - x_1}{l} = \frac{y_2 - y_1}{m} = \frac{z_2 - z_1}{n} = PQ$$

ତେଣୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1, z_1) ଏବଂ (x_2, y_2, z_2) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ $x_2–x_1$, $y_2–y_1$ ଏବଂ $z_2–z_1$ ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

ଉଦାହରଣ 33.10 ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କ ସହିତ ସମାନ କୋଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\alpha = \beta = \gamma$

କିନ୍ତୁ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow 3\cos^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ ମାନ ହେଉଛନ୍ତି

$$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ସବୁଠାରେ ସମାନ ଚିହ୍ନ (ଧନାତ୍ମକ କିମ୍ବା ଋଣାତ୍ମକ) ନିଆଯିବ ।

ଉଦାହରଣ 33.11 ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କ ସହିତ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଯଥାକ୍ରମେ 30^0, 45^0 ଏବଂ 60^0 ପରିମାଣର କୋଣ କରିବା ସମ୍ଭବ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କ ସହିତ ସରଳରେଖାଟି ଯଥାକ୍ରମେ α, β ଏବଂ γ କୋଣ କରୁଛି ।

$\therefore\ \alpha = 30^0, \beta = 45^0$ ଏବଂ $\gamma = 60^0$

ଯେହେତୁ $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$

ତେଣୁ $\cos^2 30^0+\cos^2 45^0+\cos^2 60^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} > 1$

ତେଣୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷମାନଙ୍କ ସହିତ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଉପରୋକ୍ତ କୋଣ କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 33.12 ଯଦି ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ ରେସିଓ 6, 2 ଏବଂ 3 ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ।

$$\therefore l = \pm\frac{6}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{6}{7},\quad m = \pm\frac{2}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{2}{7}$$

ଏବଂ $n = \pm\frac{3}{\sqrt{6^2+2^2+3^2}} = \pm\frac{3}{7}$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଗୁଡିକ ହେଉଛନ୍ତି $\frac{6}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7}$ କିମ୍ବା $-\frac{6}{7},-\frac{2}{7},-\frac{3}{7}$

ଉଦାହରଣ 33.13 ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (2, 1, –3) ର ଅଭିକ୍ଷେପ (ଲମ୍ବର ପାଦବିନ୍ଦୁ) ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କର ।

(a) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଉପରେ (b) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଉପରେ

ସମାଧାନ : (a) ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁର YZ, ZX ଏବଂ XY ସମତଳ ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ଯଥାକ୍ରମେ (0,1,–3),(2,0,–3) ଏବଂ (2, 1, 0) ।

(b) X, Y ଏବଂ Z ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଅଭିକ୍ଷେପ ଯଥାକ୍ରମେ (2, 0, 0), (0, 1, 0) ଏବଂ (0, 0, –3)

ଉଦାହରଣ 33.14

(2, 5, –4) ଏବଂ (8, 2, –6) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ (2, 5, –4) ଓ (8, 2, –6) ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ।

ତେଣୁ ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍‌ଗୁଡ଼ିକ 8–2, 2–5 ଏବଂ –6+4 ସହିତ ସମାନୁପାତୀ,

ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ ହେଉଛନ୍ତି 6, –3, –2 ।

ତେଣୁ ସରଳରେଖାର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହେଉଛନ୍ତି

$\frac{6}{7},-\frac{3}{7},-\frac{2}{7}$ କିମ୍ବା $-\frac{6}{7},\frac{3}{7},\frac{2}{7}$ ଯେହେତୁ $\sqrt{6^2+(-3)^2+(-2)^2} = 7$

ଉଦାହରଣ 33.15 (2, –1, 4) ଏବଂ (0, 1, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ସରଳରେଖା ଉପରେ (3, 3, 5) ଏବଂ (5, 4, 3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (2, –1, 4) ଏବଂ (0, 1, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ $-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}$

କାରଣ $\sqrt{(2-0)^2+(-1-1)^2+(4-5)^2} = 3$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରେ (3, 3, 5) ଏବଂ (5, 4, 3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ହେଉଛି

$$(5-3)\left(-\frac{2}{3}\right)+(4-3)\left(\frac{2}{3}\right)+(3-5)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

ଯେହେତୁ ଅଭିକ୍ଷେପ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ତେଣୁ ଏହା ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ ।

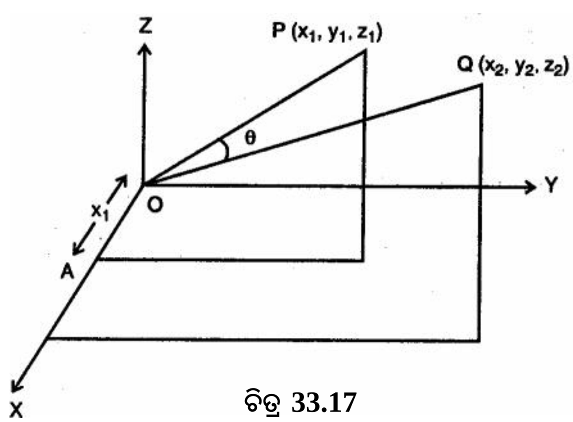
ତେଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅଭିକ୍ଷେପ $= \frac{4}{3}$ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.4

1. ଏକ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଡିରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ ହେଉଛି
   (a) 3, –1, 2 (b) 1, 1, 1
2. (–3, 5, 6) ବିନ୍ଦୁର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କର :
   (a) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ଉପରେ (b) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଉପରେ
3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) (5, –3, 8) ଏବଂ (6, –1, 6)
   (ii) (4, 3, –5) ଏବଂ (–2, 1, –8)
4. ଯେଉଁ ରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ 6, 2 ଏବଂ 3 ତାହା ଉପରେ P(4, –2, 5) ଏବଂ Q(2, 1, –3) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. (2, –1, 4) ଏବଂ (0, 1, 5) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ରେଖା ଉପରେ (2, 1, 3) ଏବଂ (1, 0, –4) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

33.8 ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଦତ୍ତ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଅର୍ନ୍ତଗତ କୋଣ (Angle between two lines with given direction cosines)

ମନେକର ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଯଥାକ୍ରମେ (l_1, m_1, n_1) ଏବଂ (l_2, m_2, n_2) ।



ଚିତ୍ର 33.17

ମନେକର O ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ OP ଏବଂ OQ ଦୁଇଟି ରେଖା ଯାହା ଉପରୋକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ସହିତ ସମାନ୍ତର ।

ମନେକର OP ଏବଂ OQ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ θ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x_1, y_1, z_1) । XY - ସମତଳ ପ୍ରତି PL ଲମ୍ବ ଏବଂ X - ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି LA ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ OQ ଉପରେ OPର ଅଭିକ୍ଷେପ = OA, AL ଏବଂ LP ର OQ ଉପରେ ଅଙ୍କିତ ଅଭିକ୍ଷେପର ସମଷ୍ଟି ।

ଅର୍ଥାତ୍, $OP \cos\theta = x_1 l_2 + y_1 m_2 + z_1 n_2$ ... (i)

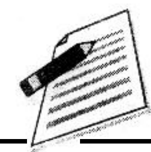
କିନ୍ତୁ, x_1 = X - ଅକ୍ଷ ଉପରେ OP ର ଅଭିକ୍ଷେପ = $OP \cdot l_1$

ସେହିପରି $y_1 = OP \cdot m_1$, $z_1 = OP \cdot n_1$ ... (ii)

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା, $OP \cos\theta = OP\,(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2)$ ((i) ଏବଂ (ii) ରୁ)

$\Rightarrow \cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$ ... (iii)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଯଦି ଉପରୋକ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ a_1, b_1, c_1 ଏବଂ a_2, b_2, c_2 ହେବେ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ଲାଗି ଆମେ ଲେଖିବା



$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

ଏଠାରେ θ ର ପରିମାଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ କିମ୍ବା ସ୍ଥୁଳକୋଣ, ତଦନୁଯାୟୀ $\cos\theta$ ଲାଗି ଧନାତ୍ମକ କିମ୍ବା ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ନେବା ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଯଦି OP ଏବଂ OQ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତି (ଅର୍ଥାତ୍ $\theta = 90^0$), ତେବେ

$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = \cos 90^0 = 0$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଯଦି OP ଏବଂ OQ ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହେବେ, ତେବେ $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ OP || OQ ଏବଂ O ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ, OP, OQ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାନ କରିବ ।

ଏଣୁ $\sin\theta = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$

$$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$$

$$= (l_1 m_2 - l_2m_1)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2$$

$\sin\theta = 0 \Rightarrow l_1m_2-l_2m_1 = 0,\ m_1n_2-m_2n_1 = 0,\ n_1l_2-n_2l_1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ :

(a) ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l_1, m_1, n_1 ଏବଂ l_2, m_2, n_2 ହେଲେ ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି (i) ଲମ୍ବ ହେବେ, ଯଦି $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$

(ii) ସମାନ୍ତର ହେବେ, ଯଦି $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$

(b) ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ a_1, b_1, c_1 ଏବଂ a_2, b_2, c_2 ହେଲେ, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ ଯଦି $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$

[ସୂଚନା : $l_1 = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$, $m_1 = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$ ଏବଂ $n_1 = \frac{c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$]

(c) ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ a_1, b_1, c_1 ଏବଂ a_2, b_2, c_2 ହେଲେ, ସେମାନେ ସମାନ୍ତର ହେବେ, ଯଦି, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

ଉଦାହରଣ 33.16 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ –1, 0, 1 ଏବଂ 0, –1, 1 ହୋଇଥାଏ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ θ । ତେବେ

$$\cos\theta = \pm\frac{(-1)\times 0 + 0\times(1)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}} = \pm\frac{1}{2}$$

$\therefore\ \theta = 60^0$ କିମ୍ବା 120^0

ଉଦାହରଣ 33.17 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକସନ୍ ରେସିଓ 5, –12, 13 ଏବଂ –3, 4, 5 । ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ θ

$$\therefore \cos\theta = \pm\frac{5(-3)+(-12)4+(13)5}{\sqrt{5^2+(-12)^2+13^2}\sqrt{(-3)^2+4^2+5^2}}$$

$$= \pm\frac{-15-48+65}{\sqrt{25+144+169}\sqrt{9+16+25}}$$

$$= \pm\frac{2}{\sqrt{169+169}\sqrt{50}}$$

$$= \pm\frac{2}{13\sqrt{2}\times 5\sqrt{2}} = \pm\frac{1}{65}$$

ଯେହେତୁ θ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, $\cos\theta = \frac{1}{65}$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{65}\right)$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.5

1. ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍ସନ୍ ରେସିଓ 1, 1, 2 ଏବଂ $\sqrt{3}-1, -\sqrt{3}-1, 4$ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ A(7, 6, 3), B(4, 10, 1), C(–2, 6, 2) ଏବଂ D(1, 2, 4) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

3. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (4, 5, 0), (2, 6, 2) ଏବଂ (2, 3, –1) ହେଲେ, କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଏହା ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

4. ଡାଇରେକ୍ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ଦତ୍ତ ଥିବା ନିମ୍ନଲିଖିତ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3};-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3};$ (b) $\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{0}{5};\ \frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{0}{5};$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ସମକୋଣୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ସାହାଯ୍ୟରେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ P(x, y, z) ନେଇ ଯଦି ଆମେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର କରି ତିନୋଟି ସମତଳ ଅଙ୍କନ କରିବା ଯେପରି ତାହା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷକୁ ଛେଦ କରିବ (A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ), ତେବେ

  OA = x, OB = y, OC = z ଯେଉଁଠି O ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ।

  ବିପରୀତ କ୍ରମେ, ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା x, y, z ପାଇଁ ଆମେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y, z) ହେବ ।

- ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା PQ ହେଲେ

  $$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

  ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା ହେଉଛି $\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$ ।

- ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $l : m$ ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

  (a) ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\left(\frac{lx_2+mx_1}{l+m}, \frac{ly_2+my_1}{l+m}, \frac{lz_2+mz_1}{l+m}\right)$

  (b) ବର୍ହିବିଭାଜନ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\left(\frac{lx_2-mx_1}{l-m}, \frac{ly_2-my_1}{l-m}, \frac{lz_2+mz_1}{l-m}\right)$

  ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଭାବେ, PQ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ

  $$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

- ଯଦି l, m, n ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $l^2+m^2+n^2 = 1$

- ଯେଉଁ ତିନୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ସହିତ ସମାନୁପାତୀ, ସେମାନଙ୍କୁ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ ରେସିଓ କହନ୍ତି ।

- ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ x_2-x_1, y_2-y_1, ଏବଂ z_2-z_1 ସହିତ ସମାନୁପାତୀ ।

- ଏକ ସରଳରେଖା (ଯାହାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m, n) ଉପରେ, $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅଭିକ୍ଷେପ ହେଉଛି

  $l(x_2-x_1) + m(y_2-y_1) + n(z_2-z_1)$ ।

- $P(x_1, y_1, z_1)$ ଏବଂ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଧାରଣ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ l, m ଏବଂ n ହେଲେ, ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

  $$\frac{x_2-x_1}{l}=\frac{y_2-y_1}{m}=\frac{z_2-z_1}{n}=PQ$$

- ଯଦି l_1, m_1, n_1 ଏବଂ l_2, m_2, n_2 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ θ ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ହୁଏ, ତେବେ

  $\cos\theta = l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2$ ।

  ଯଦି ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ

  (i) ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2 = 0$

  (ii) ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର, ତେବେ $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$

- ଯଦି a_1, b_1, c_1 ଏବଂ a_2, b_2, c_2 ଦୁଇଟି ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ ରେସିଓ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ θ ହୁଏ, ତେବେ

$$\cos\theta = \pm\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

- ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେବେ, ଯଦି $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 0$ ଏବଂ ସମାନ୍ତର ହେବେ, ଯଦି $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org.*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (0, 7, 10), (–1, 6, 6) ଏବଂ (–4, 9, 6) ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।
2. ପ୍ରମାଣ କର P(3, 2, –4), Q(5, 4, –6) ଏବଂ R(9, 8, –10) ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଏକରେଖୀ । PR କୁ Q ବିନ୍ଦୁ ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. ମନେକର A(3, 2, 0), B(5, 3, 2) ଏବଂ C(–9, 6, –3) ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ । $\angle$BACର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ AD, BC କୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । D ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (ସୂଚନା : D, BC କୁ AB : AC ଅନୁପାତରେ ବିଭାଜନ କରେ)
4. (7, –5, 4) ଏବଂ (5, –3, 8) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ସହିତ ସମାନ ଭାବରେ ଆନତ ସରଳରେଖାର ଡାଇରେକ୍‌ସନ୍ କୋସାଇନ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସେହିପରି କେତୋଟି ସରଳରେଖା ଅବସ୍ଥିତ ?
6. ଏକ ସରଳରେଖା, ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ସହିତ 45^0, 60^0 ଏବଂ 120^0 ପରିମାଣର କୋଣ କରିବା ସମ୍ଭବ କି ନୁହେଁ ଦର୍ଶାଅ ।

ଟିପ୍ପଣୀ

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ (0, 4, 1), (2, 3, –1), (4, 5, 0) ଏବଂ (2, 6, 2) ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (4, 7, 8), (2, 3, 4), (–1, –2, 1) ଏବଂ (1, 2, 5) ବିନ୍ଦୁଗୁଡିକ ଗୋଟିଏ ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

9. A(6, 3, 2), B(5, 1, 4), C(3, –4, 7) ଏବଂ D(0, 2, 5) ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ ।

   (i) AB ର CD ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (ii) CD ର AB ଉପରେ ଅଭିକ୍ଷେପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ABCD ର ତିନୋଟି ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A(3, –4, 7), B(5, 3, –2) ଏବଂ C(1, 2, –3) ହେଲେ, ଏହାର ୪ର୍ଥ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ Dର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.1

1. (a) OX′YZ (b) OXYZ′ (c) OX′YZ′
   (d) OXY′Z (e) OXYZ′

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.2

1. (a) 7 (b) $2\sqrt{5}$ (c) $\sqrt{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.3

1. (1, –3, 2), 2. $\left(\frac{13}{5},\frac{6}{5},-\frac{13}{5}\right);(5,8,-17)$

3. –2 : 3

6. $(2x_2-x_1, 2y_2-y_1, 2z_2-z_1)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.4

1. (a) $\pm\frac{3}{\sqrt{14}},\pm\frac{1}{\sqrt{14}},\pm\frac{2}{\sqrt{14}}$ (b) $\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. (a) (0, 5, 6), (–3, 0, 6) ଏବଂ (–3, 5, 0)
   (b) (–3, 0, 0), (0, 5, 0) ଏବଂ (0, 0, 6)

3. (a) $\pm\frac{1}{3},\pm\frac{2}{3},\mp\frac{2}{3}$ (b) $\pm\frac{6}{7},\pm\frac{2}{7},\pm\frac{3}{7}$

4. $\frac{30}{7}$ 5. $\frac{7}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 33.5

1. $\frac{\pi}{3}$ 4.(a) ସମାନ୍ତର (b) ଲମ୍ବ

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

2. 1 : 2 3. $\left(\frac{38}{16},\frac{57}{16},\frac{17}{16}\right)$ 4. $\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}$ କିମ୍ବା $\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}$

5. $\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\pm\frac{-1}{\sqrt{3}},\pm\frac{1}{\sqrt{3}};4$ 6. ହଁ

9. (i) $\frac{13}{7}$ (ii) $\frac{13}{3}$ 10. (–1, –5, 6)