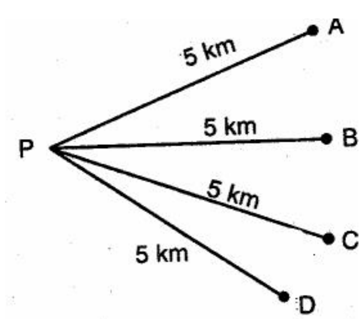
୩୨

ଭେକ୍ଟର(ସଦିଶ ରାଶି)

ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଆମେ ଭୌତିକ ରାଶି ଯଥା ଦୂରତା, ବେଗ, ତାପମାତ୍ରା, ଆୟତନ ପ୍ରଭୃତିର ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ । ଏହି ରାଶିଗୁଡିକ ଯଥାକ୍ରମେ ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତନ, ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର, ବସ୍ତୁ କିମ୍ବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସ୍ଥାନର ତାପମାତ୍ରା ଏବଂ ଆବଦ୍ଧ ଥିବା ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ସ୍ପେସ୍ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ପାଇଁ ଯଥେଷ୍ଟ ଅଟେ । ଆମେ ଆଉ କେତେଗୁଡିଏ ଭୌତିକ ରାଶି ଯଥା ବିସ୍ଥାପନ, ପରିବେଗ, ତ୍ୱରଣ, ସଂବେଗ ଆଦି ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୋଇଥାଉ, ଯେଉଁ ଗୁଡିକ ଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ।

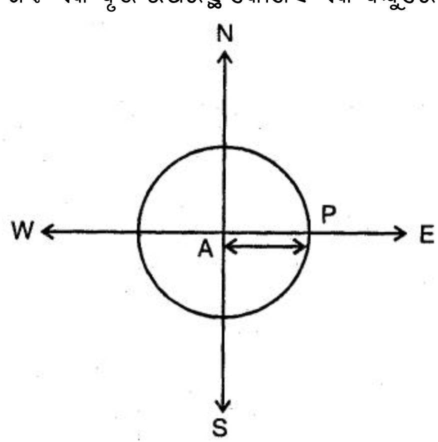
ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିସ୍ଥିତି ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ମନେକର ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C ଓ D ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ (ପ୍ରତ୍ୟେକ 5 କି.ମି.) । ଯଦି ତୁମକୁ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ 5 କି.ମି. ଯିବାକୁ କୁହାଯାଏ, ତେବେ ତୁମେ A, B, C କିମ୍ବା D ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ପହଞ୍ଚିପାର । ତେଣୁ କେବଳ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ଦୂରତା, ଗନ୍ତବ୍ୟ ସ୍ଥାନର ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ । ଏଥିପାଇଁ ଆମେ ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇଥିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯିବା ପାଇଁ ଦିଗର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ।



ଚିତ୍ର 32.1

ଗୋଟିଏ ଗଡୁଥିବା ବଲ୍‌ର ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଉ । ଯଦି ଆମେ ଯେକୌଣସି ସମୟରେ ବଲ୍‌ର ଅବସ୍ଥାନର ପୂର୍ବାନୁମାନ କରିବାକୁ ଇଚ୍ଛା କରିବା, ତେବେ ସେହି ପୂର୍ବାନୁମାନ ପାଇଁ କ'ଣ ସବୁ ମୂଳତତ୍ତ୍ୱ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ ?

ମନେକର ବଲ୍‌ଟି ଆରମ୍ଭରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରେ ଅଛି । ଯଦି ଏଠାରେ ଜଣା ଅଛି ଯେ, ବଲ୍‌ଟି ଏକ ସରଳରେଖାରେ ସେକେଣ୍ଡ ପ୍ରତି 5 ସେ.ମି. ବେଗରେ ଯାଉଛି, ତେବେ ଆମେ ପୂର୍ବାନୁମାନ କରିପାରିବା କି ବଲ୍‌ଟି 3 ସେକେଣ୍ଡ ପରେ କେଉଁଠି ଥିବ ? ପ୍ରକୃତରେ ନୁହେଁ । ସମ୍ଭବତଃ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା ଯେ ବଲ୍‌ଟି A ବିନ୍ଦୁଠାରୁ 15 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଥିବ ଏବଂ ଏଥିପାଇଁ ବଲ୍‌ଟି କେନ୍ଦ୍ର A ଏବଂ 15 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଥିବ । ତେଣୁ କେବଳ ବେଗ ଏବଂ ନେଉଥିବା ସମୟର ଜ୍ଞାନ ଥିଲେ, ବଲ୍‌ର ଅବସ୍ଥାନ ପାଇଁ ପୂର୍ବାନୁମାନ କରିବା ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ । କିନ୍ତୁ ଯଦି ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ ବଲ୍‌ଟି A ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ପୂର୍ବ ଦିଗରେ ସେକେଣ୍ଡ ପ୍ରତି 5 ସେ.ମି. ରେ ଗତି କରୁଛି ତେବେ ଆମେ କହିବାକୁ ସକ୍ଷମ ହେବା ଯେ ବଲ୍‌ଟି A ବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ପୂର୍ବ ଦିଗରେ 15 ସେ.ମି. ଦୂରରେ P ଠାରେ ପହଞ୍ଚିବ ।



ଚିତ୍ର 32.2

ତେଣୁ t ସମୟ (3 ସେକେଣ୍ଡ) ପରେ ଏକ ବଲ୍‌ର ବିସ୍ଥାପନ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଆମେ ବଲ୍‌ଟିର ବେଗର ପରିମାଣ ସେକେଣ୍ଡ ପ୍ରତି 5 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଦିଗ (A ଠାରୁ ପୂର୍ବ) ବିଷୟରେ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଅଦିଶ (Scalar) ରାଶି (ଯାହାର କେବଳ ପରିମାଣ ଅଛି) ଏବଂ ସଦିଶ (Vector) ରାଶି (ଯାହାର ପରିମାଣ ଓ ଦିଗ

ଉଭୟ ଅଛି) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଭେକ୍ଟରକୁ ଆମେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇବା ଏବଂ ଏହାର ପରିମାଣ ଓ ଦିଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଆମେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଭେକ୍ଟର ବିଷୟରେ ପଢ଼ିବା ଏବଂ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହିତ ସେମାନଙ୍କର ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ ବିଷୟରେ ପଢିବା । ଏକ ମୂଳବିନ୍ଦୁର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସହିତ ଅଭ୍ୟସ୍ତ ହେବା । ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଦୁଇ ଓ ତିନି ଦିଗରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ଦୁଇଟି, ତିନୋଟି ମାତ୍ରାରେ ନିର୍ଦ୍ଧାରିତ ଅଂଶ ଆମେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଆମେ ମଧ୍ୟ ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପ୍ରଶ୍ନ ମାନଙ୍କରେ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା । ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର, ସ୍କାଲାର ଗୁଣଫଳ ଓ ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳର ସଂଜ୍ଞା ଦେବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ପଢି ସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ଦିଗ ଦର୍ଶାଇବାର ଆବଶ୍ୟକତାକୁ ବୁଝାଇପାରିବ,
- ଅଦିଶ (ସ୍କାଲାର) ଓ ସଦିଶ (ଭେକ୍ଟର)ର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବ;
- ଅଦିଶ ଓ ସଦିଶ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଜାଣିପାରିବ;
- ସଦିଶ ରାଶିକୁ ଦିଗ ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଇପାରିବ;
- ସଦିଶର ପରିମାଣ ଓ ଦିଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ସଦିଶ ରାଶି ମାନଙ୍କୁ ଶୂନ୍ୟ ଓ ଏକକ ସଦିଶ ରାଶି ଗୁଡ଼ିକରେ ବିଭାଗୀକରଣ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସଦିଶ ରାଶିର ସମାନତାର ସଂଜ୍ଞାପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟରର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ସଦିଶ ରାଶିମାନଙ୍କର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କରିପାରିବ;
- ଅଦିଶ ରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ସଦିଶ ରାଶିର ଗୁଣନ କରିପାରିବ;
- ସଦିଶ ରାଶି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପ୍ରୟୋଗ ସହିତ ସେଗୁଡ଼ିକର ଧର୍ମକୁ ଜାଣିବ;
- ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ସ୍ପେଶର ଧାରଣା କରିପାରିବ;
- ଦୁଇ କିମ୍ବା ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଅକ୍ଷରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ଶାଖା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିପାରିବ;
- ବିଭାଜନ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି ଓ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ
- ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ସ୍କେଲାର (ଡଟ୍) ଓ ଭେକ୍ଟର (କ୍ରସ୍) ଗୁଣଫଳର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସମତଳ ଓ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଜ୍ଞାନ
- ତ୍ରିକୋଣମିତିର ଜ୍ଞାନ

32.1 ଅଦିଶ ଏବଂ ସଦିଶ

ଯେଉଁ ଭୌତିକ ରାଶିକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରେ, ଅର୍ଥାତ୍ ଯାହାର କେବଳ ପରିମାଣ ଥାଏ, ତାକୁ ଅଦିଶ ରାଶି କୁହାଯାଏ । ସମୟ, ବସ୍ତୁତ୍ୱ, ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ବେଗ, ତାପମାତ୍ରା, ଆୟତନ, ତାପର ପରିମାଣ, କାର୍ଯ୍ୟର ପରିମାଣ ପ୍ରଭୃତି ଅଦିଶ ରାଶି ଅଟନ୍ତି ।

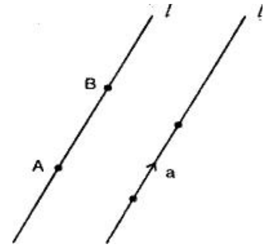
ଯେଉଁ ଭୌତିକ ରାଶିର ପରିମାଣ ସହିତ ଦିଗ ଥାଏ, ତାକୁ ସଦିଶ ରାଶି କୁହାଯାଏ । ବିସ୍ଥାପନ, ପରିବେଗ, ତ୍ୱରଣ, ବଳ, ଓଜନ ଆଦି ସଦିଶ ରାଶିର ଉଦାହରଣ ।

32.2 ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ଦିଗରେ ଥିବା ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ରୂପରେ ସଦିଶ ରାଶିର ଉପସ୍ଥାନ :

ତୁମେ ମନେ ପକେଇ ପାରିବ ଯେ ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସରଳରେଖାର ଏକ ଅଂଶ ଯାହାର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଛି । ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା l ନିଅ । ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଥିବା l ର ଅଂଶକୁ ରେଖାଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ । A ରୁ B ଦିଗରେ ଥିବା AB

ଟିପ୍ପଣୀ

ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $\vec{AB}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ଦିଗ ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ରେଖାଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ । A ଏବଂ B କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଭେକ୍ଟର $\vec{AB}$ ର ଆଦ୍ୟ ଓ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 32.3

ଦୈର୍ଘ୍ୟ AB କୁ ଭେକ୍ଟର $\vec{AB}$ ର **ପରିମାଣ** ବା **ମଡୁଲସ୍** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ $|\vec{AB}|$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ଅର୍ଥରେ ଦୈର୍ଘ୍ୟ $AB = |\vec{AB}|$ । ଅଦିଶ ରାଶି ଗୁଡ଼ିକ ସାଧାରଣତଃ a, b, c ପ୍ରଭୃତି ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ, ମାତ୍ର ସଦିଶ ରାଶି ଗୁଡ଼ିକୁ ସାଧାରଣତଃ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ର ପରିମାଣ, ଅର୍ଥାତ୍ $|\vec{a}|$ କୁ ସାଧାରଣତଃ a ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ ।

32.3 ସଦିଶ ରାଶିମାନଙ୍କର ଶ୍ରେଣୀବିଭାଗ

32.3.1 ଜିରୋ ଭେକ୍ଟର (ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର) :

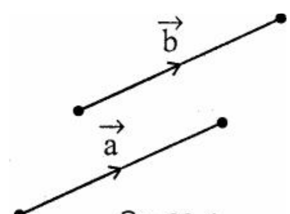
ଯେଉଁ ଭେକ୍ଟରର ପରିମାଣ ଶୂନ, ତାକୁ **ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର** କିମ୍ବା **ଜିରୋ ଭେକ୍ଟର** କୁହାଯାଏ । ଜିରୋ ଭେକ୍ଟରର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦିଗ ନାହିଁ । $\vec{AA}, \vec{BB}$ ଆଦି ଜିରୋ ଭେକ୍ଟର ଅଟନ୍ତି । ଜିରୋ ଭେକ୍ଟରକୁ ମଧ୍ୟ $\vec{0}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ଯାହାଦ୍ୱାରା ଏହା ସ୍କାଲାର 0 ଠାରୁ ପୃଥକ ବୋଲି ଜଣାପଡିବ ।

32.3.2 ଏକକ ଭେକ୍ଟର (Unit Vector) :

ଯେଉଁ ଭେକ୍ଟର୍‌ର ପରିମାଣ ଏକ, ତାକୁ **ଏକକ ଭେକ୍ଟର** କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ଏକକ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ପାଇଁ $|\vec{a}| = 1$ । ଗୋଟିଏ ଏକକ ଭେକ୍ଟରକୁ ସାଧାରଣତଃ $\hat{a}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ତେଣୁ $\vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$

32.3.3 ସମାନ ଭେକ୍ଟର (Equal Vectors) :

ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ କୁ ସମାନ କହିବା ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ, ଅର୍ଥାତ୍ $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ ଏବଂ ସେଦ୍ୱୟ ସମାନ ଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥା'ନ୍ତି, ଯେପରି ଚିତ୍ର 32.4 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ସଂକେତରେ ଏହାକୁ $\vec{a} = \vec{b}$ ରୂପେ ଦର୍ଶାଯାଏ ।

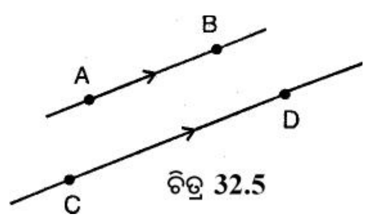


ଚିତ୍ର 32.4

ଟିପ୍ପଣୀ : ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟ ସମାନ ହୋଇପାରିବେ ଯଦିଓ ସେମାନେ ଭିନ୍ନ ସମାନ୍ତର ରେଖାରେ ଥାଆନ୍ତି ।

32.3.4 ସମତୁଲ୍ୟ ଭେକ୍ଟର (Like Vectors)

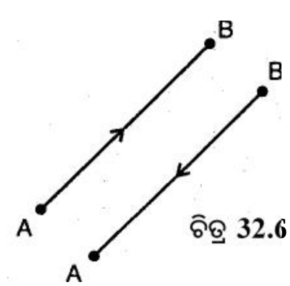
ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ଯାହା ଥାଉ ନା କାହିଁକି ଯଦି ସେମାନେ ଏକା ଦିଗରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସମତୁଲ୍ୟ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ । ପାଖ ଚିତ୍ର 32.5ରେ ଦର୍ଶିତ $\vec{AB}$ ଏବଂ $\vec{CD}$ **ସମତୁଲ୍ୟ ଭେକ୍ଟର** ଅଟନ୍ତି ଯଦିବା ଭିନ୍ନ ତାଙ୍କର ପରିମାଣ ଭିନ୍ନ ।



ଚିତ୍ର 32.5

32.3.5 ରଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର (Negative Vector)

$\vec{BA}$ କୁ $\vec{AB}$ ର **ରଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର** କୁହାଯିବ ଯେତେବେଳେ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ କିନ୍ତୁ ଦିଗ ବିପରୀତ, ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{BA} = -\vec{AB}$ ।



ଚିତ୍ର 32.6

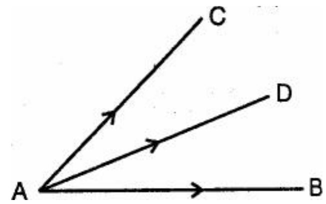
ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ
ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

32.3.6 ସହ-ଆଦ୍ୟ ଭେକ୍ଟର (Co-initial Vectors)

ଅଭିନ୍ନ ଆଦ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଥିବା ଦୁଇ କିମ୍ବା ଅଧିକ ଭେକ୍ଟରକୁ **ସହ- ଆଦ୍ୟ ଭେକ୍ଟର** କୁହାଯାଏ ।

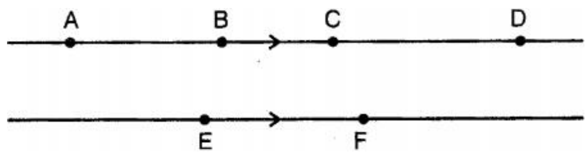
ପାଖ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AC}$ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ସହ-ଆଦ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ସମସ୍ତଙ୍କର ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ A ।



ଚିତ୍ର 32.7

32.3.7 ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର (Collinear Vectors)

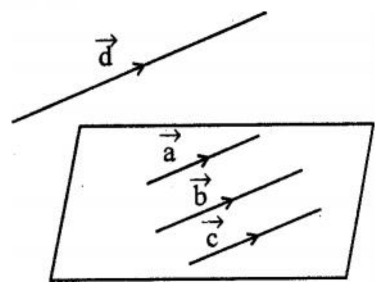
ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକର ପରିମାଣ ଯାହା ହେଇନା କାହିଁକି, ଯଦି ସେମାନେ ଏକ ସରଳରେଖା ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସରଳରୈଖିୟ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ । ପାଖ ଚିତ୍ରରେ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ଏବଂ $\overrightarrow{EF}$ ଗୁଡିକ ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର । $\overrightarrow{AB}$ ଏବଂ $\overrightarrow{DC}$ ମଧ୍ୟ ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର ।



ଚିତ୍ର 32.8

32.3.8 ସମତଳୀୟ ଭେକ୍ଟର (Co-planar Vectors)

ଯଦି ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ଏକ ସମତଳ ସହିତ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କୁ ସମତଳୀୟ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ । ପାଖ ଚିତ୍ରରେ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ଏବଂ $\vec{d}$ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ସମତଳୀୟ ଭେକ୍ଟର । ଏଠାରେ $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ଥିବା ସମତଳ ସହିତ $\vec{d}$ ସମାନ୍ତର ।



ଚିତ୍ର 32.9

ଟିକା : (i) ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର, ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର ସହିତ ସରଳରେଖୀୟ ହୋଇପାରିବ ।

(ii) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ସର୍ବଦା ସମତଳୀୟ ।

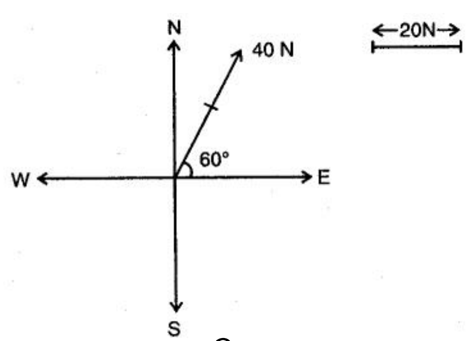
ଉଦାହରଣ 32.1 ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡିକ ସ୍କାଲାର ଏବଂ କେଉଁ ଗୁଡିକ ଭେକ୍ଟର କାରଣ ସହ ଦର୍ଶାଅ ।

(a) ବସ୍ତୁତ୍ୱ (b) ଓଜନ (c) ସଂବେଗ (d) ତାପମାତ୍ରା (e) ବଳ (f) ସାନ୍ଦ୍ରତା

ସମାଧାନ : (a), (d) ଏବଂ (f) ହେଉଛନ୍ତି ସ୍କାଲାର, କାରଣ ସେମାନଙ୍କର କେବଳ ପରିମାଣ ଅଛି, କିନ୍ତୁ (b), (c) ଏବଂ (e) ହେଉଛନ୍ତି ଭେକ୍ଟର, କାରଣ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସହିତ ଦିଗ ମଧ୍ୟ ଅଛି ।

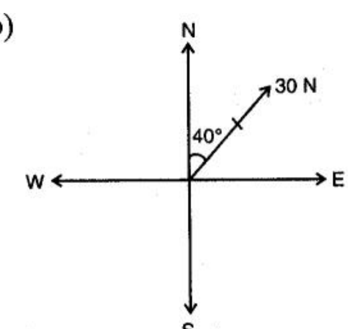
ଉଦାହରଣ 32.2 ଲେଖଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ

(a) ପୂର୍ବଦିଗର 60^0 ଉତ୍ତର ଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ 40N ବଳ । (b) ଉତ୍ତର ଦିଗର 40^0 ପୂର୍ବଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ 30N ବଳ ।



ଚିତ୍ର 32.10

(b)



ଚିତ୍ର 32.11

ଟିପ୍ପଣୀ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.1

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଅଦିଶ ରାଶି ?

   (a) ବିସ୍ଥାପନ (b) ପରିବେଗ (c) ବଳ (d) ଲମ୍ବ

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଦିଶ ରାଶି ?

   (a) ବସ୍ତୁତ୍ୱ (b) ବଳ (c) ସମୟ (d) ତାପମାତ୍ରା

3. ତୁମକୁ ପୂର୍ବଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ 5 ସେ.ମି. ବିସ୍ଥାପନ ଭେକ୍ଟର ଦିଆଯାଇଛି । ଚିତ୍ରରେ ଏହାର ରଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର ଦେଖାଅ ।

4. ସମତୁଲ୍ୟ ଓ ସମାନ ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଦର୍ଶାଅ ।

5. ଲେଖଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ।

   (a) ଉତ୍ତର ଦିଗର 60^0 ପଶ୍ଚିମ ଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ 60 ନିଉଟନର ଏକ ବଳ ।

   (b) 100 ନିଉଟନର ଏକ ବଳ ଯାହାର ଦିଗ ପଶ୍ଚିମର ଉତ୍ତରକୁ 45^0 ପରିମାଣର କୋଣ କରିଥିବ ।

32.4 ସଦିଶ ରାଶିମାନଙ୍କର ଯୋଗ (Addition of Vectors)

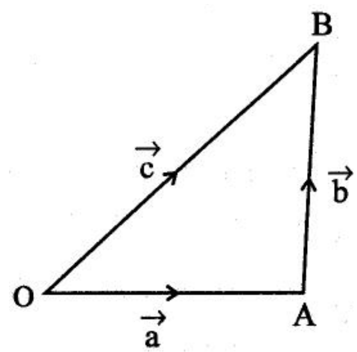
ତୁମେ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଚାରୋଟି ମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଯଥା ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଏବଂ ହରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢିଛ ମନେ ପକାଅ । ସଦିଶ ରାଶିମାନଙ୍କର ଯୋଗ (ବିୟୋଗ), ସଂଖ୍ୟା (ଅଦିଶ) ମାନଙ୍କର ଯୋଗ (ବିୟୋଗ) ଠାରୁ ଭିନ୍ନ ଅଟେ ।

ବାସ୍ତବରେ, ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର ତତ୍ତ୍ୱ ଅଛି (ଏଗୁଡ଼ିକ ଦୁଇଟି ପରିବେଗ, ଦୁଇଟି ବଳ ପ୍ରଭୃତି ହୋଇପାରନ୍ତି ।) ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ଏହା ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ।

ମନେକର ଏକ ନାଉରୀର ଉଦାହରଣ ଆମେ ନେବା ଯିଏ ନିଜ ଡଙ୍ଗାରେ ନଦୀ ପାର ହେବାକୁ ଚାହୁଁଛି ଏବଂ ଆରମ୍ଭ ସ୍ଥାନର ଠିକ୍ ଅପରପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଏକ ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ଚାହୁଁଛି । ଯଦି ବି ସେ ନଦୀ କୂଳ ପ୍ରତି ଠିକ୍ ଲମ୍ବ ଦିଗରେ ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭ କରେ, ଜଳର ସ୍ରୋତ ତାକୁ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ଥିବା ସ୍ଥାନରେ ନ ପହଞ୍ଚାଇ ଅନ୍ୟ ଏକ ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚାଏ । ଏହି ଉଦାହରଣରେ ଦୁଇଟି ପରିବେଗର ପ୍ରଭାବରେ ଏକ ତୃତୀୟ ପରିବେଗର ଉତ୍ପତ୍ତି ହେଉଛି ଯାହାକୁ ଆମେ ପରିଣାମୀ ପରିବେଗ କହିବା । ତେଣୁ 3 ଓ 4 ଏକକ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରକୁ ଯୋଗ କରିବା ପରେ, ଯେଉଁ ନୂତନ ଭେକ୍ଟର ହେବ ତାହାର ପରିମାଣ 7 ନ ହୋଇପାରେ । ଏହା ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଦିଗ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ, ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ । ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କ ଯୋଗର ତ୍ରିଭୁଜ ନିୟମ ଅନୁସାରେ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ଯୋଗ କରାଯିବ ।

32.4.1 ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କ ଯୋଗର ତ୍ରିଭୁଜ ନିୟମ (Triangle law of Vectors) :

ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର, ଯାହାର ପ୍ରଭାବ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ପରିଣାମୀ (କିମ୍ବା ସଂଯୁକ୍ତ) ପ୍ରଭାବ ସହ ସମାନ, ତାକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କର ଯୋଗ କିମ୍ବା ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ । ଏହା ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କର ଯୋଗର ତ୍ରିଭୁଜ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଏ । ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ର 32.12 ରେ $\overrightarrow{OA}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AB}$ ଭେକ୍ଟରର ପରିଣାମୀ କିମ୍ବା ଯୋଗ ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{OB}$ ଏବଂ ଆମେ ଲେଖିବା



ଚିତ୍ର 32.12

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}=\vec{c}$

ତୁମେ ମଧ୍ୟ ଦେଖିବ ଯେ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ର ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ଭେକ୍ଟର $\vec{b}$ ର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\vec{a}$ ର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\vec{a}+\vec{b}$ ର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ, $\vec{b}$ ର ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\vec{a}+\vec{b}$ ର ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ ।

32.4.2 ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ (Addition of more than two vectors) :

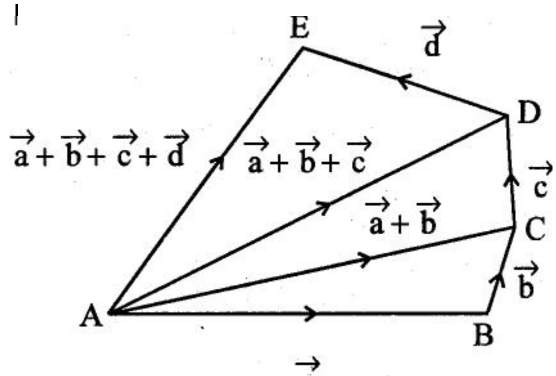
ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{AE}$



ଚିତ୍ର 32.13

$\overrightarrow{AE}$ ଭେକ୍ଟରକୁ ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି କିମ୍ବା ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର କୁହାଯାଏ ।

32.4.3 ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ଯୋଗର ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ନିୟମ (Parallelogram law of Addition of Vectors) :

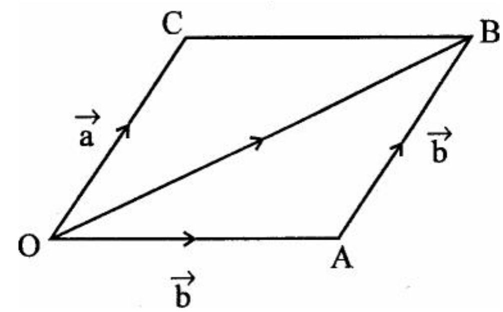
ମନେ ପକାଅ ଯେ ଆମେ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରକୁ ସମାନ କହିବା ଯଦି ତାଙ୍କର ଦିଗ ଓ ପରିମାଣ ସମାନ, ସେମାନେ ସମାନ୍ତର ବି ହୋଇପାରନ୍ତି (32.14 ଚିତ୍ର ଦେଖ) ।

ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର OABC ଦେଖ ।

ଏଠାରେ, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$

କିନ୍ତୁ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

$\therefore \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$



ଚିତ୍ର 32.14

ଯାହାକି ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ଯୋଗର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ନିୟମ ।

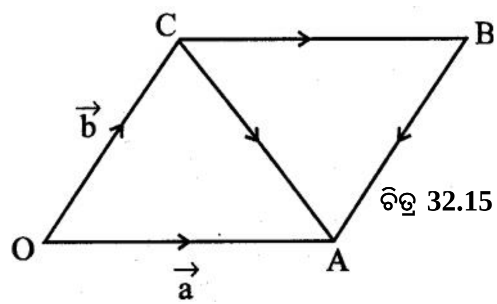
ଯଦି ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରକୁ ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ ରୂପରେ ନିଆଯାଏ, ତେବେ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱାରା ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର ସୂଚିତ ହେବ ।

32.4.4 ଋଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର (Negative Vectors) :

ମନେକର $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ଯେକୌଣସି ଏକ ଭେକ୍ଟର ।

$\vec{a}$ ର ଋଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର ହେବ $\overrightarrow{AO}$ ।

$\overrightarrow{AO}$ ର ଋଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟ $\overrightarrow{OA}$ ।



ଚିତ୍ର 32.15

ତେଣୁ $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AO}|=|\vec{a}|$ ଏବଂ $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}$ ।

ତେଣୁ ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ପାଇଁ $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

ଟିପ୍ପଣୀ

32.4.5 ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ଥିବା ଭେକ୍ଟରର ଅନ୍ତର (The difference of two Vectors) :

ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଓ $\vec{b}$ ପାଇଁ ଅନ୍ତର $\vec{a}-\vec{b}$ ର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ଋଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟରର ଯୋଗ, ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$

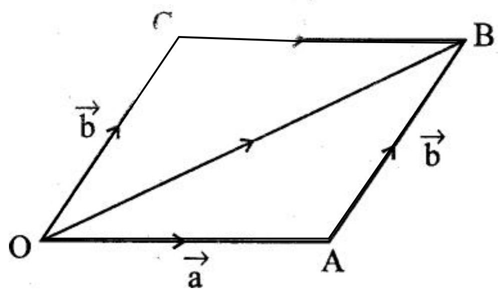
ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ରରେ, ଯଦି $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ ତେବେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର OABC ରେ $\overrightarrow{CB}=\vec{a}$ ଏବଂ $\overrightarrow{BA}=-\vec{b}$

$\therefore \overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$

ଉଦାହରଣ 32.3 କେତେବେଳେ ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟରର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ହୁଏ ?

ସମାଧାନ : ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟରର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ହେବ, ଯେତେବେଳେ ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମାନ କିନ୍ତୁ ଦିଗ ବିପରୀତ ।

ଉଦାହରଣ 32.4 ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଅ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$



ଚିତ୍ର 32.16

ସମାଧାନ : ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ର 32.16 ରେ ପରିଣାମୀ

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$

$=\vec{a}+\vec{b}$ ... (i)

OABC ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଏହି ଚିତ୍ରରେ

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}=\vec{b}$

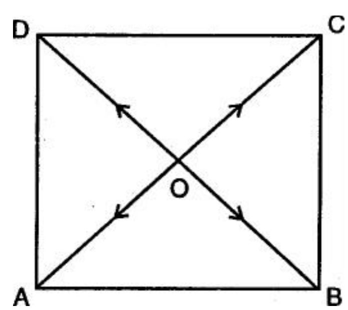
$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OA}=\vec{a}$

$\therefore \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\vec{b}+\vec{a}$ ... (ii)

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ [((i) ଏବଂ (ii) ରୁ]

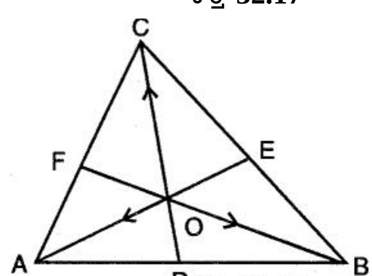
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.2

1. ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ABCD ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OD}$ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 32.17

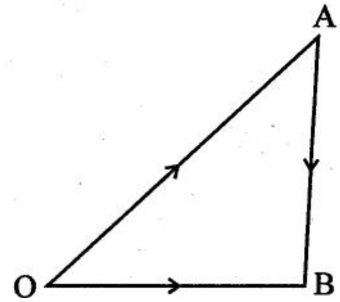
2. ABC ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OC}$ ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 32.18

32.5 ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର (Position Vector of a Point)

ଆମେ ଶୂନ୍ୟ (ସ୍ପେଶ୍)ରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ O ନେବା । ଶୂନ୍ୟରେ ନିଆଯାଇଥିବା ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P କୁ O ସହିତ ଯୋଡିଲେ ଆମେ ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{OP}$ ପାଇବା । $\overrightarrow{OP}$ କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ P ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର କହିବା । ତେଣୁ O କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ନେଇ ଶୂନ୍ୟରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଅନନ୍ୟ ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ପାଇବା । ବିପରୀତ କ୍ରମେ, O କୁ ଦତ୍ତ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ରୂପେ ଉଲ୍ଲେଖ କରି O ଆଦ୍ୟବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେକ୍ଟରର ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ, ଶୂନ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ । ଏକ ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{AB}$ ନିଅ । ମନେକର ଉଲ୍ଲିଖିତ ମୂଳବିନ୍ଦୁ O । ତେବେ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ କିମ୍ବା $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$ ।



ଚିତ୍ର 32.19

କିମ୍ବା $\overrightarrow{AB}=$ ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ B ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର – ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ A ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

32.6 ସ୍କାଲାର ଦ୍ୱାରା ଭେକ୍ଟରର ଗୁଣନ (Multiplication of a vector by a scalar)

ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ କୁ ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର $x \neq 0$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ହେବ ଏବଂ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, $|x|\vec{a}$ ହେବ ଏବଂ $x > 0$ ହେଲେ, ଏହାର ଦିଗ $\vec{a}$ ଦିଗ ସହ ସମାନ ହେବ ଏବଂ $x < 0$ ହେଲେ ଏହାର ଦିଗ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ର ଦିଗର ବିପରୀତ ଦିଗ ହେବ । ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଓ ସ୍କାଲାର xର ଗୁଣନକୁ $x\vec{a}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ କୁ ସ୍କାଲାର 0 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ଏହା ଭେକ୍ଟର $\vec{0}$ ହେବ ।

ସଂଜ୍ଞା ଦ୍ୱାରା ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଭେକ୍ଟର $\vec{0}$ ଓ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସ୍କାଲାରର ଗୁଣଫଳ ହେଉଛି ଭେକ୍ଟର $\vec{0}$ । ଅର୍ଥାତ୍ $x\vec{0}=\vec{0}$, ଏବଂ $0\vec{a}=\vec{0}$ ।

ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ଗୁଣନ ନିୟମ : ଯଦି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ x, y ସ୍କାଲାର, ତେବେ

(i) $x(y\vec{a})=(xy)\vec{a}$ (ii) $x\vec{a}+y\vec{a}=(x+y)\vec{a}$

(iii) $x\vec{a}+x\vec{b}=x(\vec{a}+\vec{b})$ (iv) $0\vec{a}+x\vec{0}=\vec{0}$

ମନେପକାଅ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟରର ଦିଗ ସମାନ କିନ୍ତୁ ପରିମାଣ ଭିନ୍ନ ହୋଇପାରେ । ଏହା ଦର୍ଶାଉଅଛି ଯେ ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର $\vec{b}$ ସହିତ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା (ସ୍କାଲାର) x ମିଳିବ ଯେପରି $\vec{a}=x\vec{b}$ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 32.1

ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଆବଶ୍ୟକ ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି ଯେ ଦୁଇଟି ସ୍କାଲାର x(=1) ଏବଂ y=(–*l*) (ଦୁଇଟି ଯାକ ଉଭୟ ଜିରୋ ନୁହେଁ) ମିଳିପାରିବ, ଯେପରି $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତ ଦୁଇଟି ଯଥେଷ୍ଟ :

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ସରଳରେଖୀୟ । ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର l ରହିଛି ଯେପରି $\vec{a}=l\hat{b}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{a}+(-l)\vec{b}=\vec{0}$

ମଡ୍ୟୁଲ-I

ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

ତେଣୁ ଆମେ ସ୍କାଲାର $x = 1$ ଏବଂ $y = -l$ ପାଇବା ଯେପରିକି $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$

ଏଠାରେ ସ୍କାଲାର $1 \neq 0$

ସର୍ତ୍ତଟି ଯଥେଷ୍ଟ : ମନେକର ଦିଆଯାଇଛି $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ଏବଂ $x \neq 0$ ଏବଂ $y \neq 0$ (ଏକାବେଳେ) । ଆମେ ନେଇପାରୁ $y \neq 0$

$$\therefore y\vec{b} = -x\vec{a} \Rightarrow \hat{b} = -\frac{x}{y}\hat{a}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{a}$ ସରଳରେଖୀୟ

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ ରୂପକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମ୍ବନ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x = 0$ ଏବଂ $y = 0$ ।

ସୂଚନା : ଯଦି x ଏବଂ y ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ (ମନେକର y) ଅଣଶୂନ୍ୟ, ତେବେ ଆମେ ପାଇବା $\vec{b} = -\frac{x}{y}\vec{a}$ ଯାହାକି ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ ।

ଉଦାହରଣ 32.5 ସଂଖ୍ୟା x ବାହାରକର ଯାହାକୁ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣିଲେ ପାଇବା

(i) $\hat{a}$ (ii) $-\hat{a}$

ସମାଧାନ : (i) $x\vec{a} = \hat{a}$, ଅର୍ଥାତ୍ $x|\vec{a}|\hat{a} = \hat{a}$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{|\vec{a}|}$$

(ii) $x\vec{a} = -\hat{a}$, ଅର୍ଥାତ୍ $x|\vec{a}|\hat{a} = -\hat{a}$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{|\vec{a}|}$$

ଉଦାହରଣ 32.6 $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଅଣରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର । x ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ଭେକ୍ଟର $\vec{c} = (x-2)\vec{a} + \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{d} = (2x+1)\vec{a} - \vec{b}$ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଭେକ୍ଟର $\vec{b}$ ର ସହଗ ଅଣଶୂନ୍ୟ ହୋଇଥିବାରୁ $\vec{c}$ ମଧ୍ୟ ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବ ।

$\therefore$ ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର y ମିଳିପାରିବ ଯେପରି $\vec{d} = y\vec{c}$

ଅର୍ଥାତ୍ $(2x+1)\vec{a} - \vec{b} = y(x-2)\vec{a} + y\vec{b}$

$$\Rightarrow (yx - 2y - 2x - 1)\vec{a} + (y+1)\vec{b} = 0$$

ଯେହେତୁ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଅଣରେଖୀୟ

$\therefore$ $yx - 2y - 2x - 1 = 0$ ଏବଂ $y + 1 = 0$

ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା $y = -1$, $x = \frac{1}{3}$

ତେଣୁ $\vec{c} = -\frac{5}{3}\vec{a} + \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{d} = \frac{5}{3}\vec{a} - \vec{b}$

ଏଠାରେ ଆମେ ପାଇବା $\vec{c}$ ଏବଂ $\vec{d}$ ବିପରୀତ ଭେକ୍ଟର । ତେଣୁ ସରଳରେଖୀୟ ।

ଉଦାହରଣ 32.7 ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $2\vec{a}+3\vec{b}$ ଏବଂ $3\vec{a}+\vec{b}$ । $\vec{AB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର O ଉଲ୍ଲିଖିତ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ।

ତେଣୁ $\vec{AB} =$ B ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର – A ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$= \vec{OB} - \vec{OA}$

$= (3\vec{a}+\vec{b}) - (2\vec{a}+3\vec{b})$

$= (3-2)\vec{a} + (1-3)\vec{b}$

$= \vec{a} - 2\vec{b}$

ଉଦାହରଣ 32.8 P, Q ଏବଂ R ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $\vec{a}-2\vec{b}$, $2\vec{a}+3\vec{b}$ ଏବଂ $-7\vec{b}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ସରଳରେଖୀୟ ।

ସମାଧାନ : $\vec{PQ} =$ Q ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର –P ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$= (2\vec{a}+3\vec{b}) - (\vec{a}-2\vec{b})$

$= \vec{a} + 5\vec{b}$ ... (i)

$\vec{QR} =$ R ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର – Q ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$= -7\vec{b} - (2\vec{a}+3\vec{b})$

$= -7\vec{b} - 2\vec{a} - 3\vec{b}$

$= -2\vec{a} - 10\vec{b}$

$= -2(\vec{a}+5\vec{b})$ ... (ii)

(i) ଏବଂ (ii) ରୁ ଆମେ ପାଇଲେ $\vec{PQ} = -2\vec{QR}$ ଯାହାକି ଏକ ସ୍କାଲାର ଗୁଣନ $\vec{QR}$

$\Rightarrow \vec{PQ} \| \vec{QR}$

କିନ୍ତୁ Q ହେଉଛି ଏକ ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ

$\therefore \vec{PQ}$ ଏବଂ $\vec{QR}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବେ । ଏଣୁ P, Q ଏବଂ R ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ରହିବେ ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.3

1. ଯଦି ଗୋଟିଏ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ ବିଶିଷ୍ଟ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଯଥାକ୍ରମେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଏବଂ B ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ହୁଅନ୍ତି ତେବେ $\overrightarrow{AB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କର : (i) $3\vec{a}$ (ii) $-5\vec{b}$

3. A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁଚାରୋଟିର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $2\vec{a}, 3\vec{b}, 4\vec{a}+3\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{a}+2\vec{b}$ । $\overrightarrow{DB}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AC}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଭେକ୍ଟର $\vec{n}$ ଏବଂ ସ୍କାଲାର y ର ଗୁଣଫଳର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

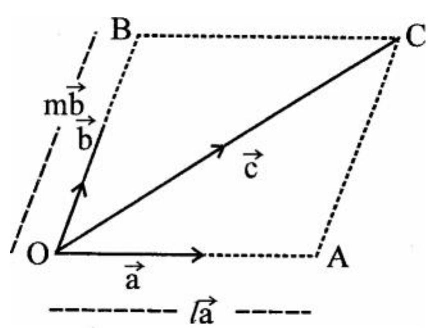
5. ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ଓ ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାରର ଗୁଣଫଳ ଭେକ୍ଟର କିମ୍ବା ସ୍କାଲାର ହେବ ଲେଖ ।

6. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{p}$ ଏବଂ $\vec{q}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବା ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ଲେଖ ।

7. ପ୍ରତିପାଦନ କର : $5\vec{a}+6\vec{b}, 7\vec{a}-8\vec{b}$ ଏବଂ $3\vec{a}+20\vec{b}$ ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ହୋଇଥିବା ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରୟ ସରଳରେଖୀୟ ।

32.7 ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କ ସମତଳତା (Co-Planarity of Vectors)

ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଦିଆଯାଇଥିଲେ, ଆମେ ସେମାନଙ୍କୁ ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ରଖିପାରିବା । ସେଠାରେ (ସମତଳରେ) ଭେକ୍ଟର ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ । ଆମେ ତାଙ୍କର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁକୁ O ନେବା ଏବଂ ମନେକର ସେ ଭେକ୍ଟର ଦୁଇଟି $\overrightarrow{OA}$ ଏବଂ $\overrightarrow{OB}$ । ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଥିବା ସମତଳରେ ଏକ ତୃତୀୟ ଭେକ୍ଟର $\vec{c}$ ଦିଆଯାଇଛି ଯାହାର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁକୁ ଆମେ O ନେବା । ମନେକର C ଏହାର ଅନ୍ତିମ ବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{OC}$ କୁ କର୍ଣ୍ଣ ଏବଂ $\vec{a}, \vec{b}$ କୁ ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ ନେଇ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟିଏ ଅଙ୍କନ କର ।



ଚିତ୍ର 32.20

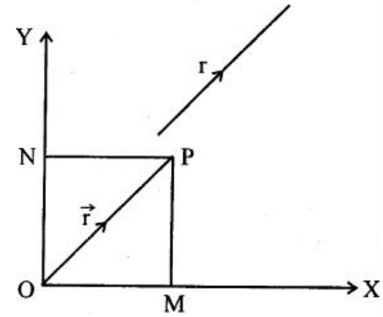
$$\vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$$

ତେଣୁ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ସହିତ ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $\vec{c}$ ଏକ ସମତଳରେ ରହିବ ଏବଂ ଆମେ $\vec{c}$ କୁ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ସରଳରେଖୀୟ ସଂଯୋଜକ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା । ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{c} = l\,\vec{a} + m\,\vec{b}$

32.8 ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ବିଭେଦନ (Resolution of a Vector along two perpendicular axes)

ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଦୁଇଟି ଏକକ ଭେକ୍ଟର $\hat{i}$ ଏବଂ $\hat{j}$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷ OX ଏବଂ OY ଦିଗରେ ନିଆଯାଉ । ଆମେ ଉପରେ ଦେଖିଛୁ ଯେ, ଏଠାରେ $\hat{i}$ ଏବଂ $\hat{j}$ ଥିବା ସମତଳ ଉପରେ ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର

$\vec{r}$ ନେଇ ଲେଖିପାରିବା ଯେ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ । ଯଦି O, $\vec{r}$ ର ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ OM = x ଏବଂ ON = y ଓ X ଏବଂ Y ଅକ୍ଷରେ $\vec{OM}$ ଏବଂ $\vec{ON}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\vec{r}$ ର ଉପାଂଶ କୁହାଯାଏ । ଏହି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତିରେ $\vec{OM}$ ଏବଂ $\vec{ON}$ କୁ ମଧ୍ୟ $\vec{r}$ ର ଶାଖା (resolved part) କୁହାଯାଏ ।

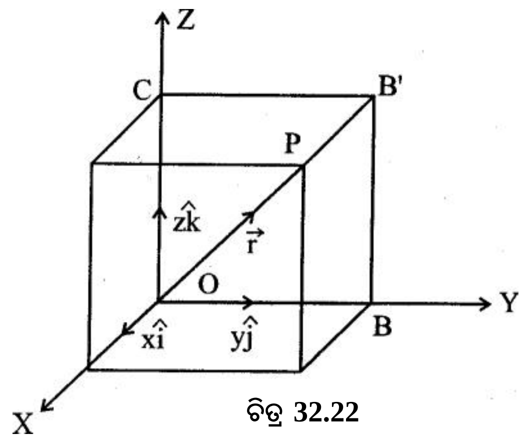


ଚିତ୍ର 32.21

32.9 ତ୍ରିମାତ୍ରାରେ ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଅକ୍ଷରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ବିଭେଦନ (Resolution of a Vector in three dimeisions along three mutually perpendicular axes)

ତ୍ରିମାତ୍ରାରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତିଲମ୍ବ ଅକ୍ଷ ଉପରେ ବିଭେଦନର ଧାରଣା, ଏକ ସମତଳରେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ସମକୋଣୀୟ ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏକ ଭେକ୍ଟରର ବିଭେଦନ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଧାରଣାର ସମ୍ପ୍ରସାରଣ ମାତ୍ର ।

ଯଦି $\hat{i}, \hat{j}$ ଏବଂ $\hat{k}$ ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତିଲମ୍ବ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $\vec{r}$ କୁ $\hat{i}, \hat{j}$ ଏବଂ $\hat{k}$ ର ସରଳରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା (ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ର 32.22) । ଆୟତଘନର ଚିତ୍ରଟିଏ



ଚିତ୍ର 32.22

ଅଙ୍କନ କରିବା ଯେପରି $\vec{OP} = \vec{r}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ହେବ । ତେବେ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅକ୍ଷଉପରେ $x\hat{i}, y\hat{j}$ ଏବଂ $z\hat{k}$ କୁ $\vec{r}$ ର ଶାଖା କୁହାଯାଏ । ତେଣୁ ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଅବସ୍ଥିତ ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର୍ $\hat{r}$ କୁ ତିନୋଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତିଲମ୍ବ ଏକକ ଭେକ୍ଟର, $\hat{i}, \hat{j}$ ଏବଂ $\hat{k}$ ର ସରଳରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ଦର୍ଶାଇପାରିବା ।

Fig. 32.21 ଅନୁସାରେ, $OP^2 = OM^2 + ON^2$ (ଦ୍ୱି ମାତ୍ରା)

କିମ୍ବା $\vec{r}^2 = x^2 + y^2$ ... (i)

Fig. 32.22 ଅନୁସାରେ, $OP^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2$

$\Rightarrow \vec{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ... (ii)

$\vec{r}$ ର ପରିମାଣ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (i) କ୍ଷେତ୍ରରେ

ଏବଂ $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ

ଟୀକା : ମନେକର ଏକ ସମତଳରେ ନଥିବା ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ (ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ଏକକ ଭେକ୍ଟର ହେବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ) । ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର $\vec{d}$ କୁ ଏହି ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟରର ସରଳରେଖୀୟ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା –

ଅର୍ଥାତ୍ $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

ଉଦାହରଣ 32.9 ପୂର୍ବ ଦିଗର 30^0 ଉତ୍ତର ଦିଗ ବିଶିଷ୍ଟ ଭେକ୍ଟର 10 ନିଉଟନ୍ ରହିଛି । ପୂର୍ବ ଏବଂ ଉତ୍ତର ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଏହାର ଉପାଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $\vec{OX}$ ଏବଂ $\vec{OY}$ ଉପରେ (ଯଥାକ୍ରମେ ପୂର୍ବ ଏବଂ ଉତ୍ତର ଦିଗରେ) $\hat{i}$ ଏବଂ $\hat{j}$ ଯଥାକ୍ରମେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ।

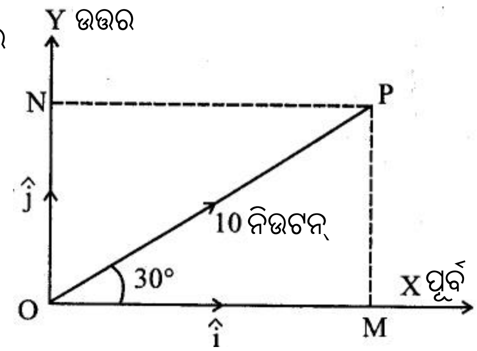
OX ଏବଂ OY ଦିଗରେ $\vec{OP}$ ର ଶାଖା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ

$$\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{ON}$$

$$= 10\cos 30^0\,\hat{i} + 10\sin 30^0\,\hat{j}$$

$$= 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{i} + 10\cdot\frac{1}{2}\hat{j}$$

$$= 5\sqrt{3}\,\hat{i} + 5\,\hat{j}$$



ଚିତ୍ର 32.23

$\therefore$ ପୂର୍ବକୁ ଉପାଂଶ $= 5\sqrt{3}$ ନିଉଟନ୍

ଉତ୍ତରକୁ ଉପାଂଶ = 5 ନିଉଟନ୍

ଉଦାହରଣ 32.10 ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ

$\vec{a} - 2b, 3\vec{a} + \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{a} + 4\vec{b}$

ସମାଧାନ : ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ସମତଳୀୟ ହେବେ ଯଦି ସ୍କାଲାର x ଏବଂ y ବାହାରିପାରିବ, ଯେପରି

$$\vec{a} + 4\vec{b} = x(\vec{a} - 2\vec{b}) + y(3\vec{a} + \vec{b})$$

$$= (x + 3y)\vec{a} + (-2x + y)\vec{b} \quad \text{...(i)}$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ସହଗକୁ ତୁଳନା କଲେ (i)ରୁ ପାଇବା

$x+3y = 1, -2x+y = 4$

ସମାଧାନ କଲେ ମିଳିବ $x = -\frac{11}{7}$ ଏବଂ $y = \frac{6}{7}$

ଯେହେତୁ $\vec{a} + 4\vec{b}$ କୁ ଆମେ $\vec{a} - 2\vec{b}$ ଏବଂ $3\vec{a} + \vec{b}$ ର ସରଳରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିଲେ, ତେଣୁ ଭେକ୍ଟର ତିନୋଟି ସମତଳୀୟ ।

ଉଦାହରଣ 32.11 ଦତ୍ତ ଅଛି $\vec{r}_1 = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ଏବଂ $\vec{r}_2 = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$ । ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\vec{r}_1$ (b) $\vec{r}_2$ (c) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$ (d) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$

ସମାଧାନ : (a) $|\vec{r}_1| = |\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

(b) $|\vec{r}_2| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{29}$

(c) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})$

$= 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\vec{r}_1 + \vec{r}_2| = |3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2} = \sqrt{38}$

(d) $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}|$

$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{26}$

ଉଦାହରଣ 32.12 ମନେକର $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ । ଏହି ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର ସହିତ ସମାନ୍ତର ଥିବା ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର $= \vec{R}$

$\therefore \vec{R} = \vec{a} + \vec{b} = (3\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + (\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}) = 4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{R}$ ର ପରିମାଣ $|\vec{R}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$\therefore$ $\vec{R}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଏକକ ଭେକ୍ଟର

$$= \frac{\vec{R}}{|\vec{R}|} = \frac{4\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}}{\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{29}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{29}}\hat{k}$$

ଉଦାହରଣ 32.13 $\vec{r} - \vec{s}$ ଦିଗରେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠାରେ $\vec{r} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{s} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$

ସମାଧାନ : $\vec{r} - \vec{s} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) - (2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$

$\therefore |\vec{r} - \vec{s}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{35}$

$\therefore$ $\vec{r} - \vec{s}$ ଦିଗରେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର $= \dfrac{\vec{r} - \vec{s}}{|\vec{r} - \vec{s}|}$

$$= \frac{-\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}}{\sqrt{35}} = -\frac{1}{\sqrt{35}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{35}}\hat{j} - \frac{5}{\sqrt{35}}\hat{k}$$

ଉଦାହରଣ 32.14 ଯଦି $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ହୁଏ, ତେବେ $2\vec{a} + 3\vec{b}$ ଦିଗରେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}) + 3(3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k})$

$= 2\hat{i}+6\hat{j}+2\hat{k}+9\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k} = 11\hat{i}-\hat{k}$

$\therefore |2\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{11^2+(-1)^2} = \sqrt{122}$

$\therefore (2\vec{a}+3\vec{b})$ ଦିଗରେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ହେଉଛି $\frac{11}{\sqrt{122}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{122}}\hat{k}$

ଉଦାହରଣ 32.15 ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ସମତଳୀୟ ।

$4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$, $-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$ ଏବଂ $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ ଯେଉଁଠାରେ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ତ୍ରୟ ଅଣ-ସମତଳୀୟ ଭେକ୍ଟର ।

ସମାଧାନ : ଯଦି ଏହି ଭେକ୍ଟର ଗୁଡ଼ିକ ସମତଳୀୟ ହେବେ, ତେବେ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ଅନ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ସରଳରେଖୀୟ ସଂଯୋଜଗ ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ।

ମନେକର $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = x(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c})+y(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$

ଯେଉଁଠାରେ x ଏବଂ y ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର ।

ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ର ସହଗକୁ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$4x-2y = -2,\ -2x+4y = -2$ ଏବଂ $-2x-2y = 4$

ଏହି ତିନୋଟି ସମୀକରଣ $x = -1, y = -1$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

ତେଣୁ $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c} = (-1)(4\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c})+(-1)(-2\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})$

$\therefore$ ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଥିବା ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର ସମତଳୀୟ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.4

1. $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ସମତଳୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ଲେଖ ।

2. ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର $\vec{r}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ଦୁଇ ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କାର୍ଟେଜୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ ଉପାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ଏବଂ 4 ଏକକ ।

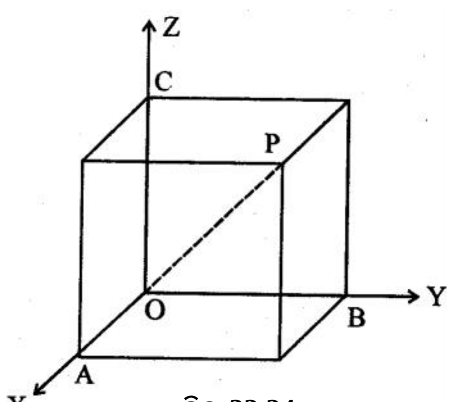
3. ସଂଲଗ୍ନ ଚିତ୍ର 32.24 ରେ $|OA| = 4, |OB| = 3$ ଏବଂ $|OC| = 5$ $\vec{OP}$ କୁ ଏହାର ଉପାଂଶ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖ ।

4. ଯଦି $\vec{r}_1 = 4\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}, \vec{r}_2 = -2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{r}_3 = \hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $|\vec{r}_1+\vec{r}_2+\vec{r}_3| = 7$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ଦ୍ୱୟର ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର ସହିତ ସମାନ୍ତର ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   $\vec{a} = 2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

6. ଯଦି $\vec{a} = \hat{i}-\hat{j}-\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ ହୁଏ, ତେବେ $3\vec{a}-2\vec{b}$ ଦିଗରେ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 32.24

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟର ଗୁଡିକ ସମତଳୀୟ । $3\vec{a}-7\vec{b}-4\vec{c}$, $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$ ଏବଂ $\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ ଯେଉଁଠାରେ $\vec{a},\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ତ୍ରୟ ଅଣ-ସମତଳୀୟ ଭେକ୍ଟର ।

32.10 ବିଭାଜନ ସୂତ୍ର (Section formula)

ମନେ ପକାଅ ଯେ O କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ନେଇ, ସ୍ପେଶ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{r}=\vec{OP}$ । ନିମ୍ନରେ ଆମେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ m : n ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ମନେକର A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଯଥାକ୍ରମେ ସେମାନଙ୍କର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର,

ଯେପରିକି $\vec{OA}=\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{OB}=\vec{b}$

ମନେକର P, AB କୁ m : n ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରୁଛି ।

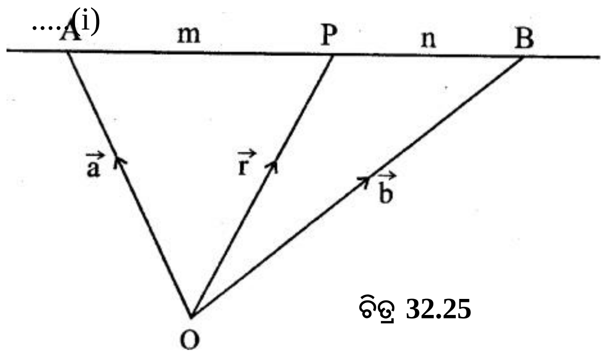
ଫଳରେ $\frac{AP}{PB}=\frac{m}{n}\Rightarrow n\vec{AP}=m\vec{PB}$ ....(i)

$\Rightarrow n(\vec{OP}-\vec{OA})=m(\vec{OB}-\vec{OP})$

$\Rightarrow (m+n)\vec{OP}=m\vec{OB}+n\vec{OA}$

$\Rightarrow \vec{OP}=\frac{m\vec{OB}+n\vec{OA}}{m+n}$

$\Rightarrow \vec{r}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$



ଚିତ୍ର 32.25

ଯେଉଁଠାରେ O କୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଉଲ୍ଲେଖ କରି P ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{r}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : $\frac{m}{n}=1\Rightarrow m=n$

ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁ AB ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

$\therefore$ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ – 2 : P ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟରକୁ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଇପାରିବ

$$\vec{r}=\frac{\vec{a}+\frac{m}{n}\vec{b}}{1+\frac{m}{n}}=\frac{\vec{a}+k\vec{b}}{1+k} \qquad \text{... (ii)}$$

ଯେଉଁଠି $k=\frac{m}{n}$, $k\neq -1$

ଟିପ୍ପଣୀ

$\therefore$ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ହେଲେ, ସେହି ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ କୁ k : 1 ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର (ii) ହେବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଯଦି P ବିନ୍ଦୁ AB କୁ m : n ଅନୁପାତରେ ବହିର୍ବିଭାଜନ କରେ, ତେବେ P ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{r} = \dfrac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}$

[**ସୂଚନା :** m : n ଅନୁପାତରେ ଏହି ବିଭାଜନ ଅଛି]

ଉଦାହରଣ 32.16 ମନେକର ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{x}$ ଏବଂ $\vec{y}$ । ଏହି ଦୁଇ ବିନ୍ଦୁକୁ 2 : 3 ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $\vec{r}$ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$$\therefore \vec{r} = \frac{3\vec{x}+2\vec{y}}{3+2} = \frac{1}{5}(3\vec{x}+2\vec{y})$$

ଉଦାହରଣ 32.17 ଯଦି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଏବଂ B ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $\vec{x}+2\vec{y}$ ଏବଂ $2\vec{x}-\vec{y}$ ତେବେ AB ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : AB ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$$= \frac{(\vec{x}+2\vec{y})+(2\vec{x}-\vec{y})}{2} = \frac{3}{2}\vec{x}+\frac{1}{2}\vec{y}$$

ଉଦାହରଣ 32.18 Δ ABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A, B ଏବଂ C ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ । Δ ABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ରର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର Δ ABC ରେ BC ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D

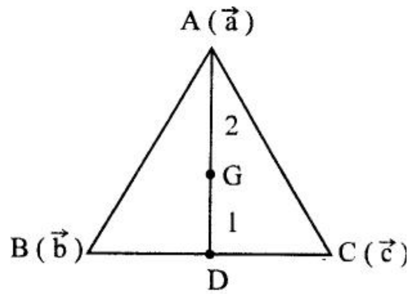
ମନେକର Δ ABC ର ଭରକେନ୍ଦ୍ର G ।

ତେବେ G ବିନ୍ଦୁ, ମଧ୍ୟମା AD କୁ 2 : 1 ରେ ବିଭକ୍ତ କରିବ, ଅର୍ଥାତ୍ AG : GD = 2 : 1

ବର୍ତ୍ତମାନ D ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $= \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$

$\therefore$ G ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

$$= \frac{2\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+1\cdot\vec{a}}{2+1} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$



ଚିତ୍ର 32.26

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.5

1. (i) ଯଦି C ବିନ୍ଦୁ AB କୁ $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}$ ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ତେବେ C ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଦତ୍ତ ଅଛି A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ଯଥାକ୍ରମେ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ।

(ii) A ଏବଂ B ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ । ଯଦି C ବିନ୍ଦୁ AB କୁ $2:-3$ ଅନୁପାତରେ ବିଭକ୍ତ କରେ, ତେବେ C ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. $P(\vec{p})$ ଏବଂ $Q(\vec{q})$ କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ $3:4$ ଅନୁପାତରେ ଅର୍ନ୍ତବିଭାଜନ କରୁଛି, ତାହାର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. $C(\vec{c})$ ଏବଂ $D(\vec{d})$ ର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ P ଏବଂ Q ର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଭେକ୍ଟର ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରମାଣ କର, ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।

5. ଭେକ୍ଟର ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରମାଣ କର, ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

32.11 ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ଗୁଣନ (Product of Vectors)

32.9 ବିଭାଗରେ ତୁମେ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟରକୁ ସ୍କାଲାର ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିଅଛ । ଭେକ୍ଟରର ସ୍କାଲାର ଦ୍ୱାରା ଗୁଣଫଳ ଆମକୁ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ଦେଇଛି । ଏହି ବିଭାଗରେ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟରକୁ ଅନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବା । ଏହାର ଦୁଇଟି ଅବସ୍ଥା ଆସିବ ।

(i) ଯେତେବେଳେ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଗୁଣଫଳ ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର ହେବ, ଆମେ ଏହାକୁ ସ୍କାଲାର ଗୁଣଫଳ ବା ଡଟ୍ ଗୁଣଫଳ କହିବା ଏବଂ '.' ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ।

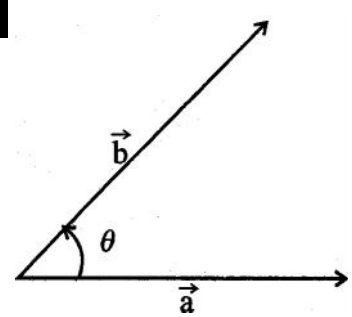
(ii) ଯେତେବେଳେ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଗୁଣଫଳ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ହେବ, ଆମେ ଏହାକୁ ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳ ବା କ୍ରସ୍ ଗୁଣଫଳ କହିବା ଏବଂ 'x' ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ।

32.12 ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ସ୍କେଲାର ଗୁଣଫଳ

ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ । ସ୍କାଲାର ଗୁଣଫଳ (ଯାହାକି $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା)ର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ପ୍ରକୃତରେ, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ସ୍କାଲାର ହେବ ଯେହେତୁ $|\vec{a}|,|\vec{b}|,\cos\theta$ ସ୍କାଲାର ଅଟନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର 32.27

ମନ୍ତବ୍ୟ :

1. ଯଦି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଲାଇକ୍ ଭେକ୍ଟରସ୍, ତେବେ $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta=ab$, ଯେଉଁଠାରେ $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ପରିମାଣ ହେଉଛି a ଏବଂ b ।

2. ଯଦି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଅନ୍‌ଲାଇକ୍ ଭେକ୍ଟରସ୍, ତେବେ $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\pi=-ab$

3. ଯଦି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ ହୁଏ, ତେବେ $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

4. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$

5. ମନେକର $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

6. $n(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (n\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(n\vec{b})$ ଯେଉଁଠାରେ n ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

7. $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ ଏବଂ $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$, ଯେହେତୁ $\hat{i},\hat{j}$ ଏବଂ $\hat{k}$ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ସମକୋଣୀୟ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ।

ଉଦାହରଣ 32.19 ଯଦି $\vec{a} = 3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b} = 4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}$, ତେବେ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $\vec{a}\cdot\vec{b} = (3\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k})\cdot(4\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$

$= 3\times 4+2\times(-3)+(-6)\times 1$

$= 12-6-6 = 0$

$\left[\because \hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \text{ ଓ } \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0\right]$

ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ

ତେଣୁ, $\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = 0$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{2}$

32.13 ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳ (Vector product of two vectors)

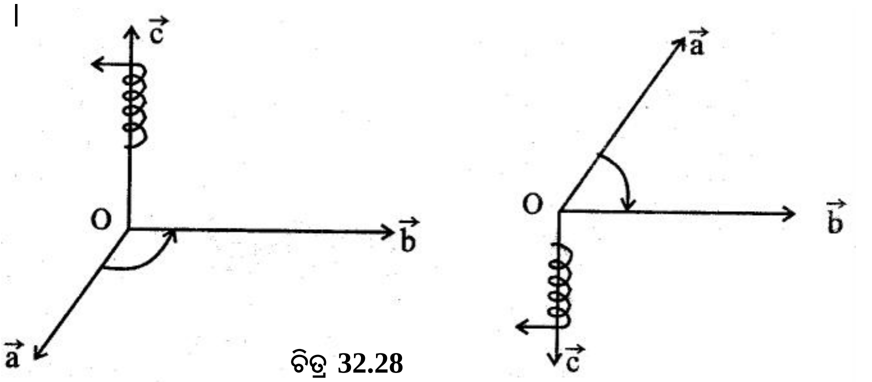
ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରର ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳର ସଂଜ୍ଞା ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ ନିମ୍ନରେ ଦକ୍ଷିଣ ହସ୍ତ ଏବଂ ବାମହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉ (ପେଚ) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏବଂ ଏହା ସହିତ ଭେକ୍ଟର ତ୍ରିୟୀକୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିବା ।

32.13.1 ଦକ୍ଷିଣହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉ (ପେଚ)

ଯଦି ଏକ ସ୍କ୍ରିଉ ନେଇ ଏହାକୁ ବାମାବର୍ତ୍ତୀ (ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟା ବୁଲିବାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ) ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରିବା, ତେବେ ଏହା ପାଠକ ଆଡକୁ ସ୍ଥାନାନ୍ତରିତ ହେବ । ଏହାକୁ ଦକ୍ଷିଣହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉ କୁହାଯାଏ ।

32.13.2 ବାମହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉ (ପେଚ)

ଯଦି ଏକ ସ୍କ୍ରିଉ ନେଇ ଏହାକୁ ଦକ୍ଷିଣାବର୍ତ୍ତୀ (ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟା ବୁଲିବା ଦିଗରେ) ଘୂରାଇବା, ତେବେ ଏହା ପାଠକ ଠାରୁ ଦୂରକୁ ସ୍ଥାନାନ୍ତରିତ ହେବ । ଏହାକୁ ବାମହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉ କୁହାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଗୋଟିଏ ସ୍କ୍ରିଉକୁ ଦତ୍ତ କ୍ରମିତ ଭେକ୍ଟର ତ୍ରୟୀ ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିବା ।



ଚିତ୍ର 32.28

ମନେକର $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର ଯାହାର ମୂଳବିନ୍ଦୁ O

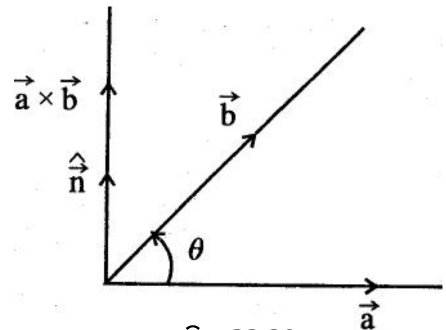
ଯଦି ଏକ ଦକ୍ଷିଣହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉକୁ O ଠାରେ 180^0 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣରେ $\vec{a}$ ରୁ $\vec{b}$ ଆଡକୁ ଘୂରାଇବା, ତେବେ ତାହା $\vec{c}$ ଦିଗରେ ସ୍ଥାନାନ୍ତରିତ ହେବ (ଚିତ୍ର 32.28(i))

ସେହିପରି ଯଦି ଏକ ବାମହସ୍ତ ସ୍କ୍ରିଉକୁ O ଠାରେ 180^0 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣରେ $\vec{a}$ ରୁ $\vec{b}$ ଆଡକୁ ଘୂରାଇବା, ତେବେ ତାହା $\vec{c}$ ଦିଗରେ ସ୍ଥାନାନ୍ତରିତ ହେବ (ଚିତ୍ର. 32.28 (ii)) । ଏହି ସମୟରେ ସ୍ଥାନାନ୍ତରଣର ଦିଗ ପ୍ରଥମଥରର ଦିଗର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ହେବ ।

ଏଣୁ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ କ୍ରମିତ ଭେକ୍ଟର ତ୍ରୟୀକୁ ଦକ୍ଷିଣହସ୍ତ କିମ୍ବା ବାମହସ୍ତ କହିବା ଯେତେବେଳେ 180^0 ରୁ କମ୍ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣରେ ଘୂରାଇଲେ ଏହା $\vec{c}$ ଦିଗରେ କିମ୍ବା ବିପରୀତ ଦିଗରେ ସ୍ଥାନାନ୍ତରିତ ହେବ ।

32.13.3 ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳ (Vector Product)

ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ଏବଂ θ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ଯେପରି $0 < \theta < \pi$ । $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳକୁ ଆମେ $\vec{a} \times \vec{b}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ଏବଂ ଏହାର ସଂଜ୍ଞା ହେଉଛି $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\, \hat{n}$ ଯେଉଁଠାରେ $\hat{n}$ ଏକ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ଯାହାକି ଉଭୟ $\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଓ $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\hat{n}$ ଦକ୍ଷିଣହସ୍ତୀ ଭେକ୍ଟର ତ୍ରୟୀ ଗଠନ କରିବ ।



ଚିତ୍ର 32.29

ମନ୍ତବ୍ୟ :

1. ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
2. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$
3. $\hat{i} \times \hat{i} = \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
4. $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ ଏବଂ $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$
5. ଯଦି $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, ତେବେ $\vec{a} = 0$ କିମ୍ବା $\vec{b} = 0$ କିମ୍ବା $\vec{a} \| \vec{b}$ ।
6. ଯଦି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ କିମ୍ବା ଉଭୟ $\vec{0}$ ହେବ, ତେବେ θ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ । ଯେହେତୁ $\vec{0}$ ର କୌଣସି ଦିଗ ନାହିଁ, ତେଣୁ $\hat{n}$ ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ ହେବ । ଏହି ସ୍ଥଳରେ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ।
7. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.6

1. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର ମଧ୍ୟରେ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ ଏବଂ $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ (b) $2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ ଏବଂ $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଯେଉଁ ଭୌତିକ ରାଶି କେବଳ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇପାରିବ ତାକୁ ସ୍କାଲାର (ଅଦିଶ) କୁହାଯାଏ ।
- ଯେଉଁ ଭୌତିକ ରାଶିର ଉଭୟ ଦିଗ ଓ ପରିମାଣ ଅଛି ତାକୁ ଭେକ୍ଟର (ସଦିଶ) କହିବା ।
- ଯେଉଁ ଭେକ୍ଟରର ପରିମାଣ a ଏବଂ ଦିଗ A ରୁ B, ତାକୁ $\vec{AB}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ଏବଂ ଏହାର ପରିମାଣ ହେବ $|\vec{AB}|=a$ ।
- ଯଦି ଏକ ଭେକ୍ଟରର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟ ଏକ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ର ପରିମାଣ ସହିତ ସମାନ ଏବଂ ଦିଗ ବିପରୀତ ତେବେ ତାକୁ $\vec{a}$ ର ଋଣାତ୍ମକ ଭେକ୍ଟର କହିବା ଏବଂ $-\vec{a}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ।
- ଏକକ ଭେକ୍ଟରର ପରିମାଣ 1 । ତେଣୁ $\vec{a}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଥିବା ଏକ ଏକକ ଭେକ୍ଟରକୁ $\hat{a}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା ଏବଂ ଏହା $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ସହିତ ସମାନ ।
- ଜିରୋ ଭେକ୍ଟରକୁ $\vec{0}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା । ଏହାର ପରିମାଣ 0 ଏବଂ ଏହାର କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦିଗ ନାହିଁ ।
- ସ୍କାଲାର ମାନଙ୍କର ଯୋଗ ଠାରୁ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ଯୋଗ ଭିନ୍ନ । ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ଯୋଗ, ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କ ଯୋଗର ତ୍ରିଭୁଜ ନିୟମ ଅନୁସାରେ ହୁଏ । ଏହି କାରଣରୁ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିର ପରିମାଣ, ଭେକ୍ଟରମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଠାରୁ ସାନ ବା ଏହା ସହିତ ସମାନ ।
- ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ଭେକ୍ଟର ମାନଙ୍କୁ ସରଳରେଖୀୟ କହିବା ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଆଧାର ସମାନ କିମ୍ବା ସମାନ୍ତର ।
- ତିନି ବା ଅଧିକ ଭେକ୍ଟରେ ମାନଙ୍କୁ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବୋଲି କହିବା ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ଆଧାର ଗୁଡିକ ସେହି ସମତଳ ସହ ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ସେହି ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥାନ କରୁଥିବେ ।
- ଯଦି $\vec{a}$ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ଏବଂ x ଗୋଟିଏ ସ୍କାଲାର, ତେବେ $x\vec{a}$ ଗୋଟିଏ ଭେକ୍ଟର ହେବ ଏବଂ ଏହାର ପରିମାଣ $\vec{a}$ ର ପରିମାଣର $|x|$ ଗୁଣ ହେବ । ଏହାର ଦିଗ $\vec{a}$ ର ଦିଗ ସହ ସମାନ ହେବ ଯଦି $x>0$ ଏବଂ ଏହା $\vec{a}$ ର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ହେବ ଯଦି $x<0$ ।
- ଯେକୌଣସି ଭେକ୍ଟର, ଦୁଇଟି ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର ସହିତ ଏକ ସମତଳରେ ରହିଲେ, ସେହି ଭେକ୍ଟରକୁ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟିର ସରଳରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ଭାବରେ ଲେଖି ହେବ ।
- ସ୍ପେସ୍‌ରେ ଥିବା କୌଣସି ଏକ ଭେକ୍ଟକୁ ଏକ ସମତଳରେ ନଥିବା ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ଭେକ୍ଟର ର ସରଳରୈଖିକ ସଂଯୋଗ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ହେବ ।
- ଯଦି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ହୁଏ, ତେବେ ସେହି ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ $m:n$ ଅନୁପାତରେ ଅନ୍ତର୍ବିଭାଜନ / ବହିର୍ବିଭାଜନ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର

ଯଥାକ୍ରମେ $\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}, \dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{n-m}$ ହେବ ।

- ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ହେଲେ, ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପୋଜିସନ୍ ଭେକ୍ଟର $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ ।
- ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ସ୍କାଲାର ଗୁଣଫଳ ହେଉଛି $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, ଯେଉଁଠି θ ହେଉଛି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ ।
- ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ଭେକ୍ଟର ଗୁଣଫଳ $\vec{a}\times\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, ଯେଉଁଠି $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣର ପରିମାଣ θ ଏବଂ ଏକକ ଭେକ୍ଟର $\hat{n}, \vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଥିବା ସମତଳ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ମନେକର $\vec{a}, \vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ତିନୋଟି ଭେକ୍ଟର ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ । ଯଦି $\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}$ ସହିତ ସରଳରେଖୀୟ ଏବଂ $\vec{b}+\vec{c}, \vec{a}$ ସହିତ ସରଳରେଖୀୟ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ପ୍ରମାଣ କର: ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବେ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି ଉଭୟ ଶୂନ ହୋଇ ନଥିବା ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା x ଏବଂ y ମିଳିବା ସମ୍ଭବ ଯଦ୍ୱାରା $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{0}$ ହେବ ।

3. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଯେଉଁଠି CD ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ M । ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{BD}$ ଏବଂ $\overrightarrow{AM}$ କୁ ଭେକ୍ଟର $\overrightarrow{BM}$ ଏବଂ $\overrightarrow{MC}$ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

4. $\vec{a}-\vec{b}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି (i) ଠାରୁ ସାନ (ii) ସହ ସମାନ (iii) ଅପେକ୍ଷା ବଡ ହୋଇପାରିବ କି ?

5. ମନେକର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଦୁଇଟି ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର । ଯଦି $(2-x)\vec{a}+\vec{b}$ ଏବଂ $y\vec{a}+(x-3)\vec{b}$ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ x ଏବଂ y ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ମନେକର ଭେକ୍ଟର $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ । ଯଦି $3\vec{a}+x\vec{b}$ ଏବଂ $(1-x)\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$

ସମାନ୍ତର ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା x ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. x ଏବଂ y ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି ଭେକ୍ଟର $\vec{a}=-2\hat{i}+3\hat{j}+y\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b}=x\hat{i}-6\hat{j}+z\hat{k}$ ସରଳରେଖୀୟ ହେବେ । $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଯଦି $\vec{a}=3\hat{i}-5\hat{j}+8\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{b}=-\hat{i}+\hat{j}-4\hat{k}$ ହୁଏ, ତେବେ ଭେକ୍ଟର $\vec{a}+\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{a}-\vec{b}$ ର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଯଦି $\vec{a}=-6\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ ହୁଏ, ତେବେ $\vec{a}$ ର ଦିଗରେ ଏକ ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟର $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ଏବଂ $-2\hat{i}+4\hat{j}+\hat{k}$ ର ପରିଣାମୀ ଭେକ୍ଟର ସହିତ ସମାନ୍ତର ହେଉଥିବା ଏକକ ଭେକ୍ଟର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ନିମ୍ନଲିଖିତ ବଳଗୁଡିକ କଣିକା P ଉପରେ ପ୍ରଯୁକ୍ତ ହୋଇଛନ୍ତି ।

$\vec{F}_1=2\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{F}_2=-3\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ ଏବଂ $\vec{F}_3=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ ଯାହାକି ନିଉଟନ୍ ଏକକରେ ଦତ୍ତ ।

(a) ବଳ ଗୁଡିକର ପରିଣାମୀ (b) ପରିଣାମୀ ବଳର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭେକ୍ଟରଗୁଡିକ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ :

$\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$, $\left(2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}\right)$ ଏବଂ $\left(-3\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}\right)$

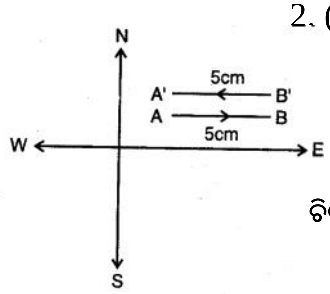
ଯେଉଁଠାରେ $\vec{a},\vec{b}$ ଏବଂ $\vec{c}$ ଭେକ୍ଟର ତ୍ରୟ ଏକ ସମତଳରେ ନାହାନ୍ତି ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.1

1. (d) 2. (b)

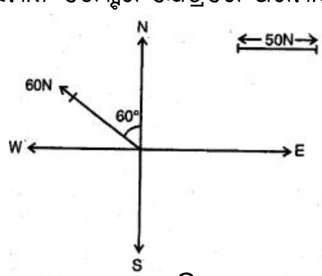
3.



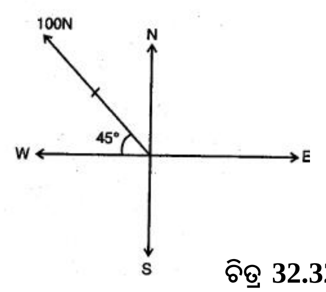
ଚିତ୍ର 32.30

4. ଦୁଇଟି ଭେକ୍ଟରକୁ ଲାଇକ୍ ଭେକ୍ଟର କହିବା ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଦିଗ ସମାନ, ପରିମାଣ ଯାହା ହେଉନା କାହିଁକି କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି ସମାନ ଭେକ୍ଟର କ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିମାଣ ଓ ଦିଗ ଉଭୟ ସମାନ ହେବେ ।

5.



ଚିତ୍ର 32.31



ଚିତ୍ର 32.32

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ଭେକ୍ଟର ଏବଂ ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି

ଟିପ୍ପଣୀ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.2

1. $\vec{0}$ 2. $\vec{0}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.3

1. $\vec{b}-\vec{a}$

2. (i) $\vec{a}$ ଭେକ୍ଟର ଦିଗରେ ଏହା ଏକ ଭେକ୍ଟର ଯାହାର ପରିମାଣ $\vec{a}$ ର ପରିମାଣର 3 ଗୁଣ ।

   (ii) ଭେକ୍ଟର $\vec{b}$ ର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଏହା ଏକ ଭେକ୍ଟର, ଯାହାର ପରିମାଣ $\vec{b}$ ର ପରିମାଣର 5 ଗୁଣ ।

3. $\vec{DB}=\vec{b}-\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{AC}=2\vec{a}+3\vec{b}$ 4. $|y\vec{n}|=y|\vec{n}|$ ଯଦି $y>0$

   $=-y|\vec{n}|$ ଯଦି $y<0$

   $=0$ ଯଦି $y=0$

5. ଭେକ୍ଟର 6. $\vec{p}=x\vec{q}$, x ଗୋଟିଏ ଜିରୋ ହୋଇନଥିବା ସ୍କାଲାର

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.4

1. ଯଦି x ଏବଂ y ସ୍କାଲାର ମିଳିପାରିବ ଯେପରିକି $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$ 2. $\vec{r}=3\hat{i}+4\hat{j}$

3. $\vec{OP}=4\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ 4. $\frac{1}{7}(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k})$ 5. $\frac{1}{\sqrt{51}}\hat{i}-\frac{5}{\sqrt{51}}\hat{j}-\frac{5}{\sqrt{51}}\hat{k}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.5

1. (i) $\frac{1}{5}(2\vec{a}+3\vec{b})$ (ii) $3\vec{a}-2\vec{b}$ 2. $\frac{1}{7}(4\vec{p}+3\vec{q})$ 3. $\frac{1}{3}(2\vec{c}+\vec{d}),\frac{1}{3}(\vec{c}+2\vec{d})$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 32.6

1. (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{14}\right)$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସକାର୍ଯ୍ୟ

1. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ 3. $\vec{BD}=\vec{BM}-\vec{MC},\vec{AM}=\vec{BM}+2\vec{MC}$

3. (i) ହଁ, $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଅଣ-ସରଳରେଖୀୟ ଭେକ୍ଟର କିମ୍ବା ଏକା ଦିଗରେ ଥିବା ଅଣଶୂନ୍ୟ ଭେକ୍ଟର ।

   (ii) ହଁ, $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଥିବା ଭେକ୍ଟର କିମ୍ବା ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଜିରୋ ଭେକ୍ଟର ।

   (iii) ହଁ, $\vec{a}$ ଏବଂ $\vec{b}$ ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଥିବା ଭେକ୍ଟର ।

4. $x=4, y=-2$ 5. $x=2,-1$ 6. $x=4, y=-1$

7. $|\vec{a}|=\sqrt{14},|\vec{b}|=2\sqrt{14}$ 8. $|\vec{a}+\vec{b}|=6,|\vec{a}-\vec{b}|=14$ 9. $-\frac{6}{7}\hat{i}+\frac{3}{7}\hat{j}-\frac{2}{7}\hat{k}$

10. $\pm\frac{1}{3}(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ 11. $2\hat{i}+\hat{j};\sqrt{5}$