୩

ମାଟ୍ରିସେସ୍
Matrices

ଊନବିଂଶ ଶତାବ୍ଦୀର ମଧ୍ୟଭାଗରେ ଜଣେ ଇଂରେଜ ଗଣିତଜ୍ଞ ଆର୍ଥର କେଲେ (1821 – 1895) ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ନୂତନ ଅଧ୍ୟାୟ ସୃଷ୍ଟି କରେ । ତାହାକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍ କୁହାଗଲା । ସେ ସହସମୀକରଣର ଉପସ୍ଥାପନା ପାଇଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର କଲେ । ଆଜି ମାଟ୍ରିକ୍ସ-ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତର ଏକ ମହତ୍ତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଂଗରେ ପରିଣତ ହୋଇଛି । କ୍ରୀଡ଼ା-ତତ୍ତ୍ୱ, ବ୍ୟୟ-ବରାଦ, ଉପ-ଉତ୍ପାଦନର ବଜେଟ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବ୍ୟବହାର ହେଉଛି । ଅର୍ଥନୈତିକମାନେ ଏହାକୁ ସାମାଜିକ ଲେଖାବିଧି, ନିବେଶ-ନିର୍ଗମ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତି ତଥା ଅନ୍ତଃ-ଉଦ୍ୟୋଗ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ରରେ ଉପଯୋଗ କରୁଛନ୍ତି । ସହ ସମୀକରଣ ସମାଧାନରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ବହୁଳ ଭାବରେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଉଅଛି । ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଙ୍ଗ୍‌ର ଆଧାର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ବୀଜଗଣିତରେ ହିଁ ରହିଛି । ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରୟୋଗ କେବଳ ଗଣିତ ନୁହେଁ, ବରଂ ପଦାର୍ଥବିଜ୍ଞାନ, ରସାୟନ ବିଜ୍ଞାନ, ଇଂଜିନିୟରିଂ ଲିନିୟର୍ ପ୍ରୋଗ୍ରାମିଂ ଭଳି ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଦେଖାଯାଉଅଛି ।

ଏଇ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ବିସ୍ତୃତ ଭାବରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଓ ମାଟ୍ରିକ୍ସରେ ବୀଜଗଣିତୀୟ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହ ଅଧ୍ୟାୟର ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ ତୁମେ :

- ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଓ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂଜ୍ଞାପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ଅର୍ଡରର ଏହାର କ୍ରମ ପ୍ରସ୍ତୁତି ଓ ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯଥା ବର୍ଗ (Square), ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ (rectangular), ଏକକ (Unit), ଶୂନ୍ୟ (Zero), କର୍ଣ୍ଣ (diagonal), ଧାଡ଼ି (row), ସ୍ତମ୍ଭ (column) ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂଜ୍ଞାପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ଓ ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମାନତାର ସର୍ତ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ;
- ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପକ୍ଷାନ୍ତରଣ (transpose)ର ସଂଜ୍ଞାକରଣ ତଥା ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ପ୍ରତିସମ (Symmetric) ଓ ବିପ୍ରତିସମ (Skew Mtrix) ର ସଂଜ୍ଞାପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ଓ ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ସମାନ କୋଟି (Order) ଥିବା ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମଷ୍ଟି ଓ ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବ ।
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଅଦିଶ ରାଶି ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନର ସର୍ତ୍ତ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ଯେତେବେଳେ ସମ୍ଭବ ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣନ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିର ଜ୍ଞାନ
- ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପଦ୍ଧତି ।

3.1 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଉପସ୍ଥାପନ (Matrices and their representation)

ମନେକର ଆମେ ଅନିଲର 6 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ ଅଛି, ଏହାକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିବା ପାଇଁ ଚାହିଁବା । ଆମେ ଏହାକୁ [6] କିମ୍ବା (6) ଲେଖି ବୁଝିବା ଯେ, [ ] କିମ୍ବା () ମଧ୍ୟରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଟି ଅନିଲ ପାଖରେ ଥିବା ପେନ୍‌ସିଲ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦର୍ଶାଉଛି । ପରେ ମନେକର ଅନିଲର 2 ଟି ବହି ଓ 5 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ ଅଛି, ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ବ୍ୟକ୍ତ କରିବାକୁ ଚାହିଁବା । ଆମେ ଏହାକୁ [2, 5] ଲେଖି ବୁଝିବା ଯେ, [ ] ଭିତରେ ପ୍ରଥମେ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ବହି ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ, ଯେତେବେଳେ କି ଦ୍ୱିତୀୟରେ ଲେଖା ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଅନୀଲର ପେନ୍‌ସିଲ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚାଏ ।

ଆସ ଏବେ ଦୁଇବନ୍ଧୁ ଶ୍ୟାମ ଓ ଇରଫାନଙ୍କ ବିଷୟରେ ବିଚାର କରିବା । ଶ୍ୟାମର ଦୁଇଟି ବହି, 4 ଟି ଖାତା ଓ 2 ଟି ପେନ୍ ଅଛି ଏବଂ ଇରଫାନର 3 ଟି ବହି, 5ଟି ଖାତା ଓ 3ଟି ପେନ୍ ଅଛି ।

ଏହି ସୂଚନାର ସୁବିଧାଜନକ ଉପସ୍ଥାପନାର ଉପାୟ ତଳେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସାରଣୀରେ ଦେଖାଯାଏ ।

	ବହି	ଖାତା	ପେନ୍
ଶ୍ୟାମ	2	4	2
ଇରଫାନ୍	3	5	3

ଆମେ ସଂକ୍ଷେପରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା

	ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭ ↓	ଦ୍ୱିତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ↓	ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭ ↓
ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି	2	4	2
ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ି	3	5	3

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ଏହି ପରିପ୍ରକାଶ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟ ପ୍ରଦାନ କରେ :

1. ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିରେ ଲେଖାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ ଶ୍ୟାମ ଓ ଇରଫାନଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ବସ୍ତୁ (ବହି, ଖାତା, ପେନ)ଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଏ ।
2. ପ୍ରଥମ, ୨ୟ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ ବହି, ଖାତା ଓ ପେନର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦର୍ଶାଏ ।

ଏହିପରି ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ ଓ ତୃତୀୟ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟା ଶ୍ୟାମ ପାଖରେ ଥିବା କଲମ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦର୍ଶାଏ । ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଦର୍ଶନର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏହି ପ୍ରକାରରେ ବାଖ୍ୟା କରାଯାଇପାରେ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନାକୁ ମଧ୍ୟ ଏଇ ପ୍ରକାରରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରେ :

	ଶ୍ୟାମ	ଇରଫାନ
ବହି	2	3
ଖାତା	4	5
କଲମ	2	3

ଏହାକୁ 3 ଗୋଟି ଧାଡ଼ି ଓ 2 ଗୋଟି ସ୍ତମ୍ଭରେ ନିମ୍ନଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ଏଇ ସଜ୍ଜୀକରଣକୁ ମାଟ୍ରିକସ୍ କୁହାଯାଏ । ଆମେ ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକୁ ସାଧାରଣତଃ ଇଂରାଜୀ Capital letter ଯଥା (A, B, X) ଦ୍ୱାରା ନାମିତ କରୁ । ଏହିପରି ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନାକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ପରିପକ୍ରାଶ ପାଇଁ ଆମେ ଲେଖିବା ।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ କିମ୍ବା } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ଟୀକା : Matrix ବହୁବଚନ Matrices

3.1.1 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅର୍ଡର (Order)

ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଦେଖ (ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସଜ୍ଜୀକରଣ) :

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1+i \\ 1+i & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

ମାଟ୍ରିକ୍ସ (a) ରେ ଦୁଇଟି ଧାଡ଼ି ଓ ଦୁଇଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି । ଏହାକୁ 2 – 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଥବା 2×2 ଅର୍ଡର ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ 2×2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ମାଟ୍ରିକ୍ସ (b) ରେ 3 ଟି ଧାଡ଼ି ଓ 2 ଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି । ଏହାକୁ 3 – 2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଥବା 3×2 ଅର୍ଡର ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । (c) ରେ ଥିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ 3×4 ଅର୍ଡର ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍‌ରେ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ଧାଡ଼ି ଏବଂ ଯେତେ ସଂଖ୍ୟକ ସ୍ତମ୍ଭ ରହିପାରେ । ଯଦି ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍ A ରେ m ଟି ଧାଡ଼ି ଓ n ଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଥାଏ, ଏହାର ଅର୍ଡର (କୋଟି) $m \times n$ ହେବ ଏବଂ ଏହାକୁ $m \times n$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପଢ଼ାଯାଏ । ....

ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉପାଦାନର ସ୍ଥାନ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ଦୁଇଟି ସଂକେତ i ଓ j ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ଉପରୋକ୍ତ $m \times n$ ଅର୍ଡର ବା କୋଟିଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସରେ ଏକ ଉପାଦାନ a_{ij} ଟି i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥାଏ ।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots a_{3j} & \ldots & a_{3n} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

m ଠ୍n କ୍ରମ ଯୁକ୍ତ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁ ମଧ୍ୟ ନିମ୍ନ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

$A = [a_{ij}]$, $i = 1, 2, \ldots m$;ଏବଂ $j = 1, 2, \ldots n$

ଉଦାହରଣ 3.1 **ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ମାନଙ୍କର ଅର୍ଡର (କୋଟି) ଲେଖ :**

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ (iii) $[2 \ 3 \ 7]$ (iv) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କ ଅର୍ଡର ବା କୋଟି

(i) 2×2 ଅଟେ

(ii) 3×1 ଅଟେ

(iii) 1×3 ଅଟେ

(iv) 2×3 ଅଟେ

ଉଦାହରଣ 3.2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ ପାଇଁ}$$

(i) A ର କୋଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) A ରେ ଥିବା ମୋଟ ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ।

(iii) A ର a_{23}, a_{32}, a_{14} ଏବଂ a_{34} ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(iv) A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ 3 କୁ a_{ij} ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ :

(i) ଯେହେତୁ A ର 3 ଟି ଧାଡ଼ି ଓ 4 ଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି, ତେଣୁ A ର କୋଟି 3×4

(ii) A ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା $3 \times 4 = 12$

(iii) $a_{23} = 2$; $a_{32} = 2$; $a_{14} = 4$ ଏବଂ $a_{34} = 6$

(iv) a_{22}, a_{31} ଏବଂ a_{33}

ଉଦାହରଣ 3.3 ଯଦି 2×3 କୋଟୀ ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଉପାଦାନଟି $\frac{i+2j}{2}$ ହୁଏ,

ତେବେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଲେଖ :

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a_{ij} = \frac{i+2j}{2}$ (ଦତ୍ତ)

$$a_{11} = \frac{1+2\times1}{2} = \frac{3}{2};\ a_{12} = \frac{1+2\times2}{2} = \frac{5}{2};\ a_{13} = \frac{1+2\times3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$a_{21} = \frac{2+2\times1}{2} = 2;\ a_{22} = \frac{2+2\times2}{2} = 3;\ a_{23} = \frac{2+2\times3}{2} = 4$$

ଏହିପରି $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.4 ଦୁଇଟି ଭଣ୍ଡାର A ଓ B ଅଛି । ଭଣ୍ଡାର A ରେ, 120 ଟି ସାର୍ଟ, 100 ଟି ଟ୍ରାଉଜର ଓ 50 ଟି କାର୍ଡ଼ିଗନ ଅଛି ଏବଂ ଭଣ୍ଡର B ରେ, 200 ଟି ସାର୍ଟ, 150 ଟି ଟ୍ରାଉଜର ଓ 100 ଟି କାର୍ଡ଼ିଗନ୍ ଅଛି । ଏହାକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ଏବଂ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ମଧ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ :

ସାରଣୀ ରୂପ 1

	ସାର୍ଟ	ଟ୍ରାଉଜରସ୍	କାର୍ଡ଼ିଗନ
ଭଣ୍ଡାର A	120	100	50
ଭଣ୍ଡାର B	200	150	100

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ $\begin{bmatrix} 120 & 100 & 50 \\ 200 & 150 & 100 \end{bmatrix}$

ସାରଣୀ ରୂପ

	ଭଣ୍ଡାର A	ଭଣ୍ଡାର B
ସାର୍ଟ	120	200
ଟ୍ରାଉଜର	100	150
କାର୍ଡ଼ିଗନ	50	100

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପ $\begin{bmatrix} 120 & 200 \\ 100 & 150 \\ 50 & 100 \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.1

1. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦୁଇଜଣ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ A ଓ B ତିନିଟି ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ସୂଚନାକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଲେଖ ।

	ଟେଷ୍ଟ-1	ଟେଷ୍ଟ-2	ଟେଷ୍ଟ-3
A	56	65	71
B	29	37	57

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ବୀଜଗଣିତ

ଟିପ୍ପଣୀ

2. ତିନିଗୋଟି ଫାର୍ମ X, Y, Z ଏକ ଠିକାଦାରକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 40, 35 ଓ 25 ଟ୍ରକ ପଥର ଏବଂ 10, 5 ଏବଂ 8 ଟ୍ରକ ବାଲି ଯୋଗାଇଲେ । ଏହି ସୂଚନାକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ଉପାୟରେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ପରିପ୍ରକାଶ କର ।

3. ଏକ ପରିବାର P ରେ 4 ଜଣ ପୁରୁଷ, 6 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଓ 3 ଜଣ ଶିଶୁ ଅଛନ୍ତି ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିବାର Q ରେ 4 ଜଣ ପୁରୁଷ, 3 ଜଣ ସ୍ତ୍ରୀ ଲୋକ ଏବଂ 5 ଜଣ ଶିଶୁ ଅଛନ୍ତି । ଏହି ସୂଚନାକୁ 2×3 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

4. କେଉଁଟିରେ କେତୋଟି ଉପାଦାନ ଅଛି ?

(a) 2×3 ମାଟ୍ରିକ୍ସ (b) 3×4 ମାଟ୍ରିକ୍ସ (c) 4×2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ

(d) 6×2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ (e) $a \times b$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (f) $m \times n$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

5. ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମ୍ଭାବ୍ୟ କୋଟୀ କ'ଣ ହୋଇପାରେ ଯଦି ଏହାର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ

(a) 8 (b) 5 (c) 12 (d) 16

6. ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ରେ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 8 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & 7 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 3 & -3 & 9 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା;

(b) ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା;

(c) ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର କୋଟି;

(d) ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ମୋଟ ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା;

(e) ଉପାଦାନ a_{14}, a_{23}, a_{34}, a_{45}, a_{33}

7. 3×3 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର ଯାହାର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ହୁଏ :

(a) $i - j$ (b) $\frac{i^2}{j}$ (c) $\frac{(i+2j)^2}{2}$ (e) $3j - 2i$

8. 3×2 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର ଯାହାର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ହେଲା :

(a) $i + 3j$ (b) $5 \cdot i \cdot j$ (c) i^j (d) $i + j - 2$

3.2 ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରକାର ଭେଦ (Types of Matrix)

ଧାଡ଼ି ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯଦି ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଧାଡ଼ି ଥାଏ, ତାହାକୁ ଧାଡ଼ି ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ଏହାର ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ସ୍ତମ୍ଭ ରହିପାରେ । ଯଥା [1, 6, 0, 12] ଗୋଟିଏ ଧାଡ଼ି ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍ (Row Matrix) ।

ଧାଡ଼ି ମାଟ୍ରିକ୍ସର କୋଟି $(1 \times n)$ ଅଟେ ।

ସ୍ତମ୍ଭ ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯଦି ଗୋଟିଏ ମାଟ୍ରିକ୍ସର କେବଳ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭ ଥାଏ, ମାତ୍ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକିଛି ହୋଇପାରେ ତାହାକୁ **ସ୍ତମ୍ଭ ମାଟ୍ରିକ୍ସ** କୁହାଯାଏ । ଯଥା $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Column Matrix) ।

ସ୍ତମ୍ଭ ମାଟ୍ରିକ୍ସର କୋଟି $m \times 1$ ଅଟେ ।

ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ, ତାକୁ **ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ** କୁହାଯାଏ । ଯଥା, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ ମାଟ୍ରିକ୍ସଟି 3 ଟି ଧାଡ଼ି ଓ 3 ଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଯୁକ୍ତ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ । ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର କୋଟି $n \times n$ ଅଟେ, ଅଥବା, କେବଳ n ଅଟେ । ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସବୁଠାରୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱର ଉପର ଉପାଦାନ ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ ହୋଇ ସବୁଠାରୁ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱର ତଳ ଉପାଦାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ କର୍ଣ୍ଣକୁ ଉକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ କହନ୍ତି ।

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଉପାଦାନ 2, 1 ଓ 9 ଅଟେ ।

ଟୀକା : ଯେକୌଣସି ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]$ ର କୋଟି $m \times n$ ରେ, ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ହେବେ $a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}$ ।

ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ନୁହେଁ, ତାକୁ ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Rectangular Matrix) କୁହାଯାଏ । ଯଥା

$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ମାଟ୍ରିକ୍ସରେ 3 ଟି ଧାଡ଼ି ଓ 4 ଟି ସ୍ତମ୍ଭ ଅଛି । ଏହା ଏକ ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ଏକ ଧାଡ଼ି-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଅର୍ଡର ହେଉଛି $1 \times n$ $(n \neq 1)$ ଏବଂ ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ଯାହାର ଅର୍ଡର ହେଉଛି $m \times 1$ $(m \neq 1)$ ।

ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଶୂନ, ତାହାକୁ ଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Zero ବା Null Matrix) କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Zero ବା Null Matrix) ।

$$[0,0], \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ଶୂନମାଟ୍ରିକ୍‌କୁ 0 ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଟୀକା : ଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ଯେକୌଣସି କୋଟି $m \times n$ ବିଶିଷ୍ଟର ହୋଇପାରେ ।

କର୍ଣ୍ଣ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ : ଯେଉଁ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣ ଉପରିସ୍ଥ ଉପାଦାନ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ ଅଟେ, ତାହାକୁ କର୍ଣ୍ଣ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍, ଯଦି $A = [a_{ij}]$ $n \times n$ କୋଟିଯୁକ୍ତ ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାକୁ କର୍ଣ୍ଣ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ (Diagonal Matrix) କୁହାଯିବ ଯଦି ସମସ୍ତ $i \neq j$ ପାଇଁ $a_{ij} = 0$ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ କର୍ଣ୍ଣ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ।

ଟୀକା : ଏକ କର୍ଣ୍ଣ-ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ କୁ $A =$ କର୍ଣ୍ଣ $[a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots a_{nn}]$ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

ଅଦିଶ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ : ଏକ କର୍ଣ୍ଣ-ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ କୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଧ୍ରୁବକ k ସହ ସମାନ ହେଲେ, ଏହାକୁ ଅଦିଶ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ (Scalar Matrix) କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା, $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ ଗୋଟିଏ ଅଦିଶ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ (Scalar Matrix) ।

ଟୀକା : ଏକ ବର୍ଗ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ଅଦିଶ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ନୁହଁ ।

ଏକକ ବା ଅଭେଦ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ : ଏକ ଅଦିଶ-ମାଟ୍ରିକ୍‌ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ 'ଏକ' ହେଲେ, ଏହାକୁ ଏକକ ବା ଅଭେଦ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ (Unit ବା Identity Matrix) କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ I_n ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ଯଦି ଏହାର କୋଟି n ଅଟେ । ଯଥା –

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ଗୋଟିଏ 3 କୋଟିଯୁକ୍ତ ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍‌ସ ।

ଟୀକା : ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]$ ଏକ ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

ଯଦି, $= a_{ij} \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$

ସମାନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ : ଯଦି ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର କୋଟି ସମାନ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନମାନ ସମାନ, ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସମାନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Equal Matrix) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି A, $m \times n$ କୋଟି ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଏବଂ B, $p \times r$ କୋଟି ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, ତେବେ $A = B$ ହେବ ଯଦି

(1) $m = p; n = r$ ଏବଂ

(2) $a_{ij} = b_{ij}$, ସମସ୍ତ $i = 1, 2, 3 \ldots m$ ଏବଂ $j = 1, 2, 3, \ldots n$ ପାଇଁ ।

ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ X ଓ Y ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି, ଯେହେତୁ ସେଗୁଡ଼ିକ ଅସମାନ କୋଟି ଯୁକ୍ତ, ପ୍ରଥମର କୋଟି 2×3 ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟର 3×2 ଅଟେ ।

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ନିମ୍ନସ୍ଥ ମାଟ୍ରିକ୍ସ P ଓ Q ମଧ୍ୟ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି, ଯେହେତୁ P ଓ Q ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ ନୁହେଁ ।

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ଉଦାହରଣ 3.5 ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସଦ୍ୱୟ ସମାନ ସମାନ କି ସମାନ ନୁହେଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(iii) $X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}, y = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : (i) A ଓ B ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ କୋଟି 2×2 ଯୁକ୍ତ କିନ୍ତୁ କେତେକ ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ ନୁହଁନ୍ତି । ତେଣୁ $A \neq B$

(ii) P ଓ Q ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍ ଦ୍ୱୟ ଭିନ୍ନ କୋଟି ଯୁକ୍ତ, ତେଣୁ $P \neq Q$ ।

(iii) X ଓ Y ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ କ୍ରମ 3×3 ଯୁକ୍ତ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ । ତେଣୁ $X = Y$ ।

ଉଦାହରଣ 3.6 x ଓ y ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର, ଯଦି

(i) $[x, 5] = [2, 5]$ (ii) $\begin{bmatrix} x \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ y \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 3 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ, ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ ହେବା ଉଚିତ୍ ।

(i) $x = 2$

(ii) $x = 4, \ y = 3$

(iii) $x = 1, y = -5$

ଉଦାହରଣ 3.7 a, b, c ଓ d ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ?

(i) $A = \begin{bmatrix} a & -2 & 2b \\ 6 & 3 & d \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 5c & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $P = \begin{bmatrix} a & b-2d \\ -3 & 2b \\ a+c & 7 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : (i) A ଓ B ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବେ କେବଳ ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି । ଯଥା, ଯଦି

$a = 1, 2b = 4, 3 = 5c$ ଏବଂ $d = 2$

$\Rightarrow a = 1, b = 2, c = \frac{3}{5}$ ଏବଂ $d = 2$

ଏହିପରି $a = 1, b = 2, c = \frac{3}{5}$ ଏବଂ $d = 2$ ପାଇଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ସମାନ ।

(ii) ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ P ଓ Q ସମାନ ହେବ, ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ଯଥା ଯଦି

$a = 5, b - 2d = 1, 2b = 6$ ଏବଂ $a + c = 4$

$\Rightarrow a = 5, b = 3, c = -1$ ଏବଂ $d = 1$

ଏହିପରି, $a = 5, b = 3, c = -1$ ଏବଂ $d = 1$ ପାଇଁ P ଓ Q ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ କେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସଗୁଡ଼ିକ

(a) ଧାଡ଼ି-ମାଟ୍ରିକ୍ସ (b) ସ୍ତମ୍ଭ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ (c) ବର୍ଗ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ

(d) କର୍ଣ୍ଣ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ (e) ଅଦିଶ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ (f) ଅଭେଦ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ

(g) ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & 8 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. a, b, c ଓ d ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $\begin{bmatrix} b & 2c \\ b+d & c-2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 12 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a+2 & 4 \\ b+3 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2c \\ 6 & 5d \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2a & b \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ d & 3c \end{bmatrix}$

3. $\times 2$ କୋଟି ଯୁକ୍ତ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, 2×1 କୋଟି ଯୁକ୍ତ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ସମାନ ହୋଇପାରିବ କି ?

4. 2×3 କୋଟି ଯୁକ୍ତ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ, 3×3 କୋଟି ଯୁକ୍ତ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ସମାନ ହୋଇପାରିବ କି ?

3.3 ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍ (Transpose of a Matrix)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅନ୍ୟ ଏକ ସହଯୋଗୀ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଛି ଯାହାକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନସପୋଜ୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ପରସ୍ପର ମଧ୍ୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ, ଯେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ମିଳେ, ତାହାକୁ A ର ଟ୍ରାନସ୍ପୋଜ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ A' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଯଥା :

$$\text{ଯଦି } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}, \text{ ତେବେ } A' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଯଦି $A = [a_{ij}]$ ଏକ $m \times n$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଏ, ତେବେ A ର ଟ୍ରାନସପୋଜ୍ A', $n \times m$ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହେବ ଏବଂ A ର (a_{ij}) ତମ ଉପାଦାନ = A' ର (a_{ji}) ତମ ଉପାଦାନ ।

3.3.1 ପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Symmetric Matrix)

ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଏକ ପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯିବ ଯଦି $A' = A$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$$\text{ଯଦି } A = \begin{bmatrix} 2 & 3i & 1-i \\ 3i & 4 & 2i \\ 1-i & 2i & 5 \end{bmatrix}, \text{ ତେବେ } A' = \begin{bmatrix} 2 & 3i & 1-i \\ 3i & 4 & 2i \\ 1-i & 2i & 5 \end{bmatrix}$$

$\because A' = A$ ତେଣୁ A ଏକ ପ୍ରତିସମ ମାଟିକ୍ରସ୍ ।

ଟୀକା : (1) ଏକ ପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ i ଓ j ପାଇଁ $a_{ij} = a_{ji}$

(2) ଏକ ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କେବେ ବି ପ୍ରତିସମ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

3.3.2 ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ (Skew-symmetric Matrix)

ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ ଏକ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ୍ କୁହାଯିବ ଯଦି $A' = -A$, ଅର୍ଥାତ୍ ସମସ୍ତ i ଓ j ପାଇଁ $a_{ij} = -a_{ji}$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

$$\text{ଯଦି } A = \begin{bmatrix} 0 & c & d \\ -c & 0 & f \\ -d & -f & 0 \end{bmatrix}, \text{ ତେବେ } A' = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$$

କିନ୍ତୁ $-A = \begin{bmatrix} 0 & -c & -d \\ c & 0 & -f \\ d & f & 0 \end{bmatrix}$, ଯାହା A' ସହ ସମାନ ।

$A' = -A$

ତେଣୁ, A ଏକ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

ଟୀକା : ଏକ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ରେ $i = j$ ପାଇଁ $a_{ij} = 0$ ଅର୍ଥାତ୍ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣର ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ ଅଟେ ।

3.4 ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅଦିଶ ଗୁଣନ (Scalar Multiplication of a Matrix)

ଆସ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିସ୍ଥିତି ଉପରେ ବିଚାର କରିବା :

ତିନିଜଣ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ, ଇଂରାଜୀ, ହିନ୍ଦୀ ଓ ଗଣିତରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

	ଇଂରାଜୀ	**ହିନ୍ଦୀ**	**ଗଣିତ**
ଏଲିଜାବେଥ	20	10	15
ଉଶା	22	25	27
ସବ୍‌ନମ୍	17	25	21

ଏହା ମଧ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହି ନମ୍ବର ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା 30 ରୁ ମିଳିଛି । ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନା ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ।

$\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix}$ (ଏହା ବୁଝାଯାଇପାରେ ଯେ, ଧାଡ଼ି ଗୁଡ଼ିକ ନାମ ସହ ଓ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ।)

ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଗୁଣିତ ହୁଏ, ତେବେ ବାଳିକା ମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରାପ୍ତାଙ୍କ ମଧ ଦୁଇଗୁଣ ହୋଇଯିବ । ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ଏହି ନୂତନ ନମ୍ବର ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

$\begin{bmatrix} 2\times 20 & 2\times 10 & 2\times 15 \\ 2\times 22 & 2\times 25 & 2\times 27 \\ 2\times 17 & 2\times 25 & 2\times 21 \end{bmatrix}$ ଯାହା $\begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix}$ ସହ ସମାନ ।

ତେଣୁ ଆମେ ଲେଖିବା

$$2\times\begin{bmatrix} 20 & 10 & 15 \\ 22 & 25 & 27 \\ 17 & 25 & 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 20 & 2\times 10 & 2\times 15 \\ 2\times 22 & 2\times 25 & 2\times 27 \\ 2\times 17 & 2\times 25 & 2\times 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 44 & 50 & 54 \\ 34 & 50 & 42 \end{bmatrix}$$

ଏବେ ଅନ୍ୟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

ଆସ ଦେଖିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସ A କୁ 5 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନକଲେ କ'ଣ ହୁଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $$5 \times A = 5A = 5 \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times3 & 5\times2 \\ 5\times(-2) & 5\times0 \\ 5\times1 & 5\times6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ -10 & 0 \\ 5 & 30 \end{bmatrix}$$

ଯେତେବେଳେ ଗୋଟିଏ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଏକ ଅଦିଶ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବାକୁ ପଡ଼େ, ସେତେବେଳେ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ସେହି ଅଦିଶ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ,

ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ତେବେ $kA = \begin{bmatrix} k\times2 & k\times(-1) \\ k\times6 & k\times3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2k & -k \\ 6k & 3k \end{bmatrix}$$

ଯେତେବେଳେ $k = -1, kA = (-1)\,A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$

ତେଣୁ $(-1)\,A = -A$

ଏହିପରି, ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ ହୁଏ, ତେବେ $-A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$,

ଉଦାହରଣ 3.8 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ତେବେ

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) 2A (ii) $\frac{1}{2}A$ (iii) –A (iv) $\frac{2}{3}A$

ସମାଧାନ :

(i) ଏଠାରେ $2A = 2 \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times(-2) & 2\times3 & 2\times4 \\ 2\times(-1) & 2\times0 & 2\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times(-2) & \frac{1}{2}\times 3 & \frac{1}{2}\times 4 \\ \frac{1}{2}\times(-1) & \frac{1}{2}\times 0 & \frac{1}{2}\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(iii) $-A = (-1) \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\frac{2}{3}A = \frac{2}{3} \times \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 & \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.3

1. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $4A$ (b) $-A$ (c) $\frac{1}{2}A$ (d) $-\frac{3}{2}A$

2. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $5A$ (b) $-3A$ (c) $\frac{1}{3}A$ (d) $-\frac{1}{2}A$

3. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,$(-7)A$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଯଦି $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $5X$ (b) $-4X$ (c) $\frac{1}{3}X$ (d) $-\frac{1}{2}X$

5. A' (A ର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ୍) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 9 \\ 6 & 8 & 7 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ -6 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. ଯେକୌଣସି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ $(A')' = A$, ପ୍ରମାଣ କର ।

7. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ :

(a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

(a) $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & i & 4 \\ -i & 0 & 2-i \\ -4 & -2+i & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ -7 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

3.5 ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ଯୋଗ (Addition of Matrices)

ଦୁଇ ଜଣ ଛାତ୍ର A ଓ B ଦୁଇଟି ପରୀକ୍ଷାରେ ଗଣିତ, ଭୌତିକ ବିଜ୍ଞାନ ଓ ଇଂରାଜୀରେ ପାଇଥିବା ନମ୍ବରକୁ ତୁଳନା କଲେ । ପ୍ରତି ପରୀକ୍ଷାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିଷୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ 50 । ସେମାନେ ପାଇଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରଥମ ପରୀକ୍ଷା

ଗଣିତ ଭୌ:ବି ଇଂରାଜୀ

$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{bmatrix} 50 & 38 & 33 \\ 47 & 40 & 36 \end{bmatrix}$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରୀକ୍ଷା

ଗଣିତ ଭୌ:ବି ଇଂରାଜୀ

$\begin{matrix} A \\ B \end{matrix} \begin{bmatrix} 45 & 32 & 30 \\ 42 & 30 & 39 \end{bmatrix}$

ସେମାନେ ଏହି ଦୁଇ ପରୀକ୍ଷାରେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିଷୟରେ ମୋଟରେ କେତେ ନମ୍ବର ପାଇଛନ୍ତି ଆମେ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ?

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, କିଭଳି ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସଂଯୁକ୍ତ ସୂଚନା ନୂତନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପ୍ରଦାନ କରୁଅଛି ।

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ଗଣିତ} & \text{ଭୌ:ବି} & \text{ଇଂରାଜୀ}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 50+45 & 38+32 & 33+30 \\ 47+42 & 40+30 & 36+39 \end{bmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ A \\ B \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\text{ଗଣିତ} & \text{ଭୌ:ବି} & \text{ଇଂରାଜୀ}\end{array} \\ \begin{bmatrix} 95 & 70 & 63 \\ 89 & 70 & 75 \end{bmatrix}\end{array}$$

ନୂତନ ମାଟ୍ରିକ୍ସଟି ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ।

ଯଦି ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ଦିଆଯାଇଥାଏ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଯୋଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ C ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ଯଦି C ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ଆମେ ଏହିସ୍ଥଳେ $C = A + B$ ରୂପେ ଲେଖୁ ।

ଟୀକା :

1. ମାଟିକ୍ରସ୍ C ର କୋଟୀ A ଓ B ର କୋଟୀ ସହ ସମାନ ।
2. ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ କୋଟୀ ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 3.9 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ତେବେ A + B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ ଦିଆଯାଇଥିବା ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ସମାନ କୋଟି ଯୁକ୍ତ, ଅର୍ଥାତ୍ 2×2, ଆମେ ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରିପାରିବା । ତେଣୁ, $A + B = \begin{bmatrix} 1+5 & 3+2 \\ 4+1 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.10 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ତେବେ A + B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ସମାନ କୋଟିଯୁକ୍ତ ଅର୍ଥାତ୍ ସେ ଦ୍ୱୟର କୋଟି 2×3, ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗ କରିପାରିବା, ତେଣୁ

$$A + B = \begin{bmatrix} 0+3 & 1+0 & -1+4 \\ 2+1 & 3+2 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5.1 ଯୋଗର ଧର୍ମ

ସ୍ମରଣ କର, ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ଜାଣିଥିଲେ

(i) $x + y = y + x$, ଅର୍ଥାତ୍, ଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅଟେ ।

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$, ଅର୍ଥାତ୍, ଯୋଗ ସହଯୋଗୀ ।

(iii) $x + 0 = x$, ଅର୍ଥାତ୍, ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦର ସ୍ଥିତି ଅଛି ।

(iv) $x + (-x) = 0$, ଅର୍ଥାତ୍, ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀର ସ୍ଥିତି ଅଛି ।

ଆସ ଦେଖିବା, ଏହି ଧର୍ମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ ବା ନୁହଁ :

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, ତେବେ

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & 2-2 \\ -1+1 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $B + A = \begin{bmatrix} 0+1 & -2+2 \\ 1+(-1) & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

ଆମେ ଦେଖିଲେ, $A + B$ ଓ $B + A$ ସମାନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି ।

ଏହିପରି, ସାଧାରଣତଃ ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ପାଇଁ $A + B = B + A$, ଅର୍ଥାତ୍ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ।

ମନେକର $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ତେବେ $A + (B + C) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1+1 & -4+0 \\ 0+2 & 2+3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0+2 & 3+(-4) \\ -2+2 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $(A+B)+C=\begin{bmatrix} 0+1 & 3+(-4) \\ -2+0 & 1+2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1+1 & -1+0 \\ -2+2 & 3+3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ଆମେ ଦେଖିଲେ, A + (B + C) ଏବଂ (A + B) + C ସମାନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟନ୍ତି ।

ଏହିପରି, ସାଧାରଣତଃ ସମାନକୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ତିନିଗୋଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A, B ଓ C ପାଇଁ A + (B + C) = (A + B) + C, ଅର୍ଥାତ୍, ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ସହଯୋଗୀ ନୀୟମ ପାଳନ କରେ ।

ମନେପକାଅ, ଆମେ ଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିଥିଲେ । ଯାହାର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ ତାହାକୁ ଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ଏହା ଯେକୌଣସି କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇପାରେ ।

ମନେକର $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ ଓ ତେବେ $O=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A+O=\begin{bmatrix} 2+0 & -2+0 \\ 4+0 & 5+0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=A$$

ଏବଂ $O+A=\begin{bmatrix} 0+2 & 0-2 \\ 0+4 & 0+5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=A$

ଆମେ ଦେଖିଲେ, A + O ମାଟ୍ରିକ୍ସ ପ୍ରତ୍ୟେକ A ସହ ସମାନ ।

ଏହିପରି, ଆମେ ପାଇବା A + O = A = O + A, ଯେଉଁଠି O ଏକ ଶୂନ୍ୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅଟେ ।

ଏକ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ O କୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।

ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ଏକ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାକୁ ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଯୋଗ କଲେ ସେହି ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ମିଳେ, ଅର୍ଥାତ୍ A + O = A = O + A

ଉଦାହରଣ 3.11 ଯଦି $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $A + B$ (b) $B + C$ (c) $(A + B) + C$ (d) $A + (B + C)$

ସମାଧାନ :

(a) $A+B=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2+(-3) & 0+1\\1+1 & 3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 5\end{bmatrix}$

(b) $B+C=\begin{bmatrix}-3 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}(-3)+(-1) & 1+0\\1+0 & 2+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}$

(c) $(A+B)+C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}$... [(a) ରୁ]

$=\begin{bmatrix}(-1)+(-1) & 1+0\\2+0 & 5+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 8\end{bmatrix}$

(d) $A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 0\\1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & 1\\1 & 5\end{bmatrix}$ ...[(b) ରୁ]

$=\begin{bmatrix}2+(-4) & 0+1\\1+1 & 3+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\2 & 8\end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.12 ଯଦି $A=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ ଏବଂ $O=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

ତେବେ (a) A + O (b) O + A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ତୁମେ କ'ଣ ଦେଖୁଛ ?

ସମାଧାନ : (a) $A+O=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-2+0 & 3+0 & 5+0\\ 1+0 & -1+0 & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(b) $$O+A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0+(-2) & 0+3 & 0+5\\ 0+1 & 0+(-1) & 0+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 3 & 5\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

(a) ଏବଂ (b) ରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ,

A + O = O + A = A

3.6 ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ବିୟୋଗ (Subtraction of Matrices)

ମନେକର, ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B । A ରୁ B କୁ ବିୟୋଗ କରିବାକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A – B ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ । A ର ଉପାଦାନ ମାନଙ୍କ ଠାରୁ B ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନକୁ ବିୟୋଗ କଲେ, A – B ମିଳେ ।

ଆମେ ଲେଖିପାରିବା A – B = A + (–B)

ଟୀକା : A – B ଓ B – A ସମାନ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ସୂଚାଏ ନାହିଁ, ଯେତେବେଳ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ A = B ନ ହୋଇଛି ।

ଉଦାହରଣ 3.13 ଯଦି $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) A – B (b) B – A

ସମାଧାନ : (a) ଆମେ ଜାଣୁ A – B = A + (–B) ...(i)

ଯେହେତୁ $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$, ଆମେ ପାଇବା $-B=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{bmatrix}$

ଏହାକୁ (i) ରେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & -4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+(-3) & 0+(-2)\\ 2+(-1) & (-1)+(-4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & -5\end{bmatrix}$$

(b) ସେହି ପ୍ରକାରେ,

B – A = B + (–A)

$$B-A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+(-1) & 2+0\\ 1+(-2) & 4+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ : A – B ପାଇବା ପାଇଁ, ଆମେ A ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କରୁ Bର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ସିଧା ସଳଖ ବିୟୋଗ କରି ପାରିବା ।

ଏହିପରି $A-B=\begin{bmatrix}1-3 & 0-2\\ 2-1 & -1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 1 & -5\end{bmatrix}$

ଏବଂ $B-A=\begin{bmatrix}3-2 & 2-0\\ 1-2 & 4-(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}$

ଉଦାହରଣ 3.14 A ଓ B କୁ ନିମ୍ନ ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (a) A – B (b) B – A

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$$

ସମାଧାନ : (a) $A-B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2-0 & 4-3\\ 5-5 & 7-(-2)\\ -1-3 & 4-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 9\\ -4 & 3\end{bmatrix}$$

(b) $B-A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & 4\\ 5 & 7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0-2 & 3-4\\ 5-5 & -2-7\\ 3-(-1) & 1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 0 & -9\\ 4 & -3\end{bmatrix}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ଆମେ ଏ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ଯେ, ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 3.15 ଯଦି $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ଏବଂ A + B = O ହୁଏ, B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ଅଛି A + B = O

$$\therefore \begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}2+a & 3+b\\ -1+c & 4+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2 + a = 0; \quad 3 + b = 0$$

$$-1 + c = 0; \quad 4 + d = 0$$

$\Rightarrow a = -2; b = -3; c = 1$ ଏବଂ $d = -4$

$$\therefore B=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉଦାହରଣ 3.15 ରେ, B ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ A ର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ । ଆମେ ତେଣୁ B କୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ବୋଲି କହିବା ।

$$B=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=(-1)\times\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=(-1)A=-A$$

ପୁନଶ୍ଚ

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଏକ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ପାଇଁ ଅନ୍ୟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B = (–1) A ଅଛି, ଯେପରିକି A + B = O, ତେବେ ଏହି ମାଟ୍ରିକ୍ସ B କୁ A ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (Additive inverse) କୁହାଯାଏ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.4

1. ଯଦି $A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) A + B (b) 2A + B (c) A+ 3B (d) 2A + 3B

2. ଯଦି $P=\begin{bmatrix}2 & 5 & 3\\ -1 & 4 & 0\end{bmatrix}$ ଏବଂ $Q=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 1 & -5\end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) P – Q (b) Q – P (c) P – 2Q (d) 2Q – 3P

3. ଯଦି $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 4 & -1 & 2\\ 4 & 5 & 0\end{bmatrix}$ ଓ $B=\begin{bmatrix}-1 & -4 & 0\\ 1 & 6 & 1\\ 2 & 0 & 7\end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) A + B (b) A – B (c) –A + B (d) 3A + 2B

4. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, ତେବେ ଶୂନ୍ୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ O ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $A + O = A$ ହେବ ।

5. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $-A$ (b) $A + (-A)$ (c) $(-A) + A$

6. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $2A$ (b) $3B$ (c) $2A + 3B$ (d) ଯଦି $2A + 3B + 5X = O$ ତେବେ X କ'ଣ ହେବ ?

7. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) A' (b) B' (c) $A + B$ (d) $(A + B)'$ (e) $A' + B'$

8. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $A - B$ (b) $B - C$ (c) $A - C$ (d) $3B - 2C$

(e) $A - B - C$ (f) $2A - B - 3C$

3.7 ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ଗୁଣନ (Multiplication of Matrices)

ଶାଲୀନା ଓ ରାକ୍ଷୀ ଦୁଇ ବାନ୍ଧବୀ । ଶାଲୀନା 17 କି.ଗ୍ରା. ଗହମ, 3 କି.ଗ୍ରା. ଡାଲି ଏବଂ 250 କି.ଗ୍ରା. ଘିଅ କିଣିବାକୁ ଚାହେଁ ଏବଂ ରାକ୍ଷୀ 15 କି.ଗ୍ରା. ଗହମ, 2 କି.ଗ୍ରା. ଡାଲି ଏବଂ 500 ଗ୍ରାମ୍ ଘିଅ କିଣିବାକୁ ଚାହେଁ । ଗହମ, ଡାଲି ଓ ଘିଅର କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ପ୍ରତି ଦାମ୍ ଯଥାକ୍ରମେ ଟ 8.00, ଟ 27.00 ଏବଂ ଟ 90.00 ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ କେତେ ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ ଖର୍ଚ୍ଚ କରିବେ ? ସ୍ପଷ୍ଟଭାବରେ ଶାଲୀନା ଓ ରାକ୍ଷୀ ଖର୍ଚ୍ଚ କରିବା ଟଙ୍କା ହେବ :

ଶାଲୀନା : 17 କିଗ୍ରା ଗହମର ମୂଲ୍ୟ = 17 × ଟ 8 = ଟ 136.00

3 କିଗ୍ରା ଡାଲିର ମୂଲ୍ୟ = 3 × ଟ 27 = ଟ 81.00

250 ଗ୍ରାମ୍ ଘିଅର ମୂଲ୍ୟ = $\frac{1}{4}$ × ଟ 90 = ଟ 22.50

ମୋଟ ଦାମ୍ = 239. 50

ରାକ୍ଷୀ: 15 କିଗ୍ରା ଗହମର ଦାମ୍ = 15 × ଟ 8 = ଟ 120.00

2 କିଗ୍ରା ଡାଲିର ଦାମ୍ = 2 × ଟ 27 = ଟ 54.00

500 ଗ୍ରାମ୍ ଘିଅର ଦାମ୍ = $\frac{1}{2}$ × ଟ 90 = ଟ 45.00

ମୋଟ୍ ଦାମ୍ = ଟ 219.00

ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ, ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଉପସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରେ ।

ଆବଶ୍ୟକତା ମୂଲ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ ଅର୍ଥ

$$\begin{bmatrix} \text{ଗହମ} & \text{ଡାଲି} & \text{ଘିଅ} \\ 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 27 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \times 8 + 3 \times 27 + 0.250 \times 90 \\ 15 \times 8 + 2 \times 27 + 0.500 \times 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.50 \\ 219.00 \end{bmatrix}$$

ସେହି ଅଞ୍ଚଳରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଦୋକାନରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟ ଲେଖାଯାଇଛି :

ଗହମ : ଟ 9 ପ୍ରତି କି.ଗ୍ରା, ଡାଲି ଟ 26 ପ୍ରତି କି.ଗ୍ରା, ଘିଅ ଟ 100 ପ୍ରତି କି.ଗ୍ରା । ଶାଲିନା ଓ ରାକ୍ଷୀଙ୍କୁ ଏହି ଦୋକାନରୁ ତାଙ୍କର ଆବଶ୍ୟକ ପରିମାଣର ବସ୍ତୁ କିଣିବା ପାଇଁ, ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅର୍ଥର ଆବଶ୍ୟକତା ହେବ ।

ଶାଲିନା : 17 କିଗ୍ରା ଗହମର ମୂଲ୍ୟ = 17 × ଟ 9 = ଟ 153.00

3 କିଗ୍ରା ଡାଲିର ମୂଲ୍ୟ = 3 × ଟ 26 = ଟ 78.00

250 କିଗ୍ରା ଘିଅର ମୂଲ୍ୟ = $\frac{1}{4}$ × ଟ 100 = ଟ 25.00

ମୋଟ ଦାମ୍ = ଟ 256.00

ରାକ୍ଷୀ : 15 କିଗ୍ରା ଗହମର ଦାମ୍ = 15 × ଟ 9 = ଟ 135.00

2 କିଗ୍ରା ଡାଲିର ଦାମ୍ = 2 × ଟ 26 = ଟ 52.00

500 ଗ୍ରାମ୍ ଘିଅର ଦାମ୍ = $\frac{1}{2}$ × ଟ 100 = ଟ 50.00

ମୋଟ୍ ଦାମ୍ = ଟ 237.00

ଉପରୋକ୍ତ ସୂଚନାଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ରୂପରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

ଆବଶ୍ୟକତା ମୂଲ୍ୟ ଆବଶ୍ୟକ ଅର୍ଥ

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9.00 \\ 26.00 \\ 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \times 9.00 + 3 \times 26.00 + 0 \cdot 250 \times 100 \\ 15 \times 9.00 + 2 \times 26.00 + 0.500 \times 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 256.00 \\ 237.00 \end{bmatrix}$$

ଏକ ତୁଳନାତ୍ମକ ଅଧ୍ୟୟନ ପାଇଁ, ଦୁଇଟି ଯାକ ସୂଚନାକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବରେ ଏକତ୍ରିତ କରାଯାଇପାରେ ।

$$\begin{bmatrix} 17 & 3 & 0.250 \\ 15 & 2 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8.00 & 9.00 \\ 27.00 & 26.00 \\ 90.00 & 100.00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 239.00 & 256.00 \\ 219.00 & 237.00 \end{bmatrix}$$

ଆସ ଦେଖିବା କେତେବେଳେ ଏବଂ କିଭଳି ଏଇ ଗୁଣଫଳକୁ ଆମେ ଲେଖିବା :

(i) ପ୍ରଥମ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ିର ତିନି ଉପାଦାନକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳକୁ, ଗୁଣଫଳ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରଥମ ଧାଡ଼ି ଓ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି ପ୍ରଥମ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଦ୍ୱିତୀୟ ଧାଡ଼ିର ଉପାଦାନକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସହ ଗୁଣନ କରି ଯୋଗ କରାଯାଏ । ଏହି ଯୋଗଫଳକୁ ଗୁଣଫଳ ମାଟ୍ରିକ୍ସର 2 ୟ ଧାଡ଼ି ତଥା ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଏହିଭଳି ଗୁଣଫଳ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅନ୍ୟ ଉପାଦାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

(ii) ପ୍ରଥମ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ପଂକ୍ତି ସଂଖ୍ୟା ସମାନ । ଫଳରେ ପ୍ରଥମ ମାଟ୍ରିକ୍ସକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସହ ଗୁଣନ ସୁସଙ୍ଗତ ହୁଏ ।

ଏହିପରି ଯଦି $A=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$, ତେବେ

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1\alpha_1+b_1\alpha_2+c_1\alpha_3 & a_1\beta_1+b_1\beta_2+c_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\alpha_2+c_2\alpha_3 & a_2\beta_1+b_2\beta_2+c_2\beta_3 \end{bmatrix}$$

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଯଥାକ୍ରମେ $m\times p$ ଓ $p\times n$ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $m\times n$ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ C ହେବ; ଏବଂ ଯଦି a_{ij}, b_{ij} ଓ c_{ij} ଯଥାକ୍ରମେ A, B ଓ C ର i ତମ ଧାଡ଼ି ଓ j ତମ ସ୍ତମ୍ଭର ଉପାଦାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

ଉଦାହରଣ 3.16 ଯଦି $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) AB (b) BA

AB = BA କି ?

ସମାଧାନ : Aର କୋଟି 1×3 B ର କୋଟୀ 3×1

$\therefore$ A ର ସ୍ତମ୍ଭସଂଖ୍ୟା = B ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

$\therefore$ AB ସମ୍ଭବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $AB=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= [1 \times (-2) + (-1) \times 0 + 2 \times 2]$

$= [-2 + 0 + 4] = [2]$

ଏହିପରି, AB = [2], ଯାହାକି 1 × 1 କ୍ରମ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

ପୁନଶ୍ଚ, B ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା = A ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

∴ BA ସମ୍ଭବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 \times 1 & (-2) \times (-1) & (-2) \times 2 \\ 0 \times 1 & 0 \times (-1) & 0 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times (-1) & 2 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

ଏହିପରି $BA = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, ଯାହାକି 3 × 3 କୋଟି ଯୁକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସ

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $AB \neq BA$

ଉଦାହରଣ 3.17 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ତେବେ AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ A ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା = B ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

∴ AB ସମ୍ଭବ

ବର୍ତ୍ତମାନ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}_{2\times1}$

ମନ୍ତବ୍ୟ : BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା କି ? ଏହାର ଉତ୍ତର ନାହିଁ ହେବ, କାରଣ Bର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ A ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ନୁହେଁ ।

ଏହିପରି, ଉଦାହରଣ 3.17 ରେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ AB ସମ୍ଭବ କିନ୍ତୁ BA ସମ୍ଭବ, ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 3.18 ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ପାଇଁ ଯଦି ସମ୍ଭବ, AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ A ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ≠ B ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

∴ AB ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ପୁଣି B ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା $\neq$ A ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

$\therefore$ BA ସମ୍ଭବ ନୁହଁ ।

ଉଦାହରଣ 3.19 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, ତେବେ AB ଏବଂ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

AB = BA କି ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ A ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା = B ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

$\therefore$ AB ସମ୍ଭବ ।

ପୁନଶ୍ଚ, B ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା = A ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା

$\therefore$BA ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times 2+2\times 2 & 1\times 1+2\times 2 \\ -1\times 2+0\times 2 & -1\times 1+0\times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+4 & 1+4 \\ -2+0 & -1+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ଏବଂ $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1+1\times(-1) & 2\times 2+1\times 0 \\ 2\times 1+2\times(-1) & 2\times 2+2\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 4+0 \\ 2-2 & 4+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ଏହିପରି $AB \neq BA$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଆମେ ଦେଖିଲେ AB ଓ BA ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ, ତଥାପି $AB \neq BA$ ।

ଉଦାହରଣ 3.20 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$,

AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, ଉଭୟ A ଓ B, 2×2 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ।

ତେଣୁ ଉଭୟ AB ଏବଂ BA ସମ୍ଭବ । ବର୍ତ୍ତମାନ

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

ଏବଂ $BA = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

ଏଠାରେ ଉଭୟ AB ଏବଂ BA ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ AB = BA ।

ତେଣୁ, ଯଦି ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B କୁ ଗୁଣନ କରାଯାଏ, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ପରିସ୍ଥିତି ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ :

(i) ଉଭୟ AB ଓ BA ସମ୍ଭବ, ମାତ୍ର ଭିନ୍ନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି ।

(ii) କେବଳ ଗୋଟିଏ ଗୁଣଫଳ AB କିମ୍ବା BA ସମ୍ଭବ ।

(iii) AB କିମ୍ବା BA କୌଣସିଟି ସମ୍ଭବ ନୁହଁ ।

(iv) ଉଭୟ AB ଏବଂ BA ସମ୍ଭବ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହେବେ, କିନ୍ତୁ $AB \neq BA$ ।

(v) ଉଭୟ AB ଏବଂ BA ସମ୍ଭବ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ AB = BA ।

ଉଦାହରଣ 3.21 ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A^2 - 2A - 3I = O$ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $A^2 = AA = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$2A = 2\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

ଏବଂ $3I = 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A^2 - 2A - 3I = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-9 & 0-0 \\ 0-0 & 9-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

ଅତଏବ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା ।

ଉଦାହରଣ 3.22 ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣଟି ସମାଧାନ କର :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ

$$\text{ବାମପାର୍ଶ୍ୱ} =\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x+y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2x-3y=1;\ x+y=3$$

ଏହିସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ସମାଧାନ କରି, ଆମେ ପାଇବା $x = 2$ ଏବଂ $y = 1$ ।

ଉଦାହରଣ 3.23 ଯଦି $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

ତେବେ AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ

$$AB=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \\ 1\times(-1)+1\times1 & 1\times1+1\times(-1) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -1+1 & 1-1 \\ -1+1 & 1-1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=O$$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉଦାହରଣ 3.23 ରୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇପାରେ । ଅର୍ଥାତ୍ $A \neq O$ ଏବଂ $B \neq O$ ହେଲେ ବି $AB = O$ ହୋଇପାରେ ।

ଅତଏବ, ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲେ ଯେ, ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇପାରେ, ଯେତେବେଳେ କି ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ସର୍ବଦା ଅଣଶୂନ ।

ଉଦାହରଣ 3.24 ଯଦି $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, ତେବେ A^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 1-1 \\ -1+1 & -1+1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଉଦାହରଣ 3.24 ରୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଏକ ଅଣଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସର ବର୍ଗ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହୋଇପାରେ । ଅର୍ଥାତ୍ $A \neq O$, $B \neq O$, ତେବେ ବି $A^2 = O$ ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ 3.25 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) (AB) C (b) A (BC); (AB) C = A (BC) କି ?

ସମାଧାନ : (a) $(AB)\,C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4+2 & 0-4 \\ 12-5 & 0+10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6+0 & 0-12 \\ -7+0 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$

$(A)\,(BC) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4+0 & 0+0 \\ 1+0 & 0+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -4-2 & 0-12 \\ -12+5 & 0+30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -7 & 30 \end{bmatrix}$

(a) ଓ (b) ରୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ (AB) C = A (BC), ଅର୍ଥାତ୍, ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗୁଣନ ସହଯୋଗୀ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.5

1. ଯଦି $A = [2 \;\; 3 \;\; 0]$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

2. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, AB ଏବଂ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

3. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = [x \;\; y \;\; z]$, AB ଓ BA ମଧ୍ୟରୁ ଯାହା ସମ୍ଭବ, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB କ'ଣ ସମ୍ଭବ ?

5. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

   (a) AB କ'ଣ ସମ୍ଭବ ? କାହିଁକି ? (b) BA କ'ଣ ସମ୍ଭବ କାହିଁକି ?

6. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, ତେବେ AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   AB = BA କି ?

7. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, AB ଏବଂ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

8. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ AB ଏବଂ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

9. x ଓ y ର ମାନନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି

   (a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ, AB = O । ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

11. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ, $A^2 - 5A + I = O$ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର, ଯେଉଁଠାରେ I ଏକ 2 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକକ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।

12. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) A (BC) (b) (AB) C (c) (A + B) C

(d) AC + BC (e) $A^2 - B^2$ (f) (A – B) (A + B)

13. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) AC (b) BC ।

AC = BC କି ? ତୁମେ କେଉଁ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିଲ ?

14. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $C = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) B + C (b) A (B + C) (c) AB (d) AC

(e) AB + AC; ତୁମେ କ'ଣ ଦେଖୁଛ ?

15. ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ପାଇଁ, $(AB)' = B'\,A'$ ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

16. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, X ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି AX = B ।

17. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ଏବଂ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A^2 - (a + d)\,A = (bc - ad)\,I$

18. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ହେଲେ, ଏହା ସତ୍ୟ କି

(a) $(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$?

(b) $(A - B)^2 = A^2 + B^2 - 2AB$?

(c) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ରୂପେ ସଜ୍ଜିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଏକ ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ୟାସକୁ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ । ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏହାର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ କୁହାଯାଏ ।
- m ସଂଖ୍ୟକ ଧାଡ଼ି ଓ n ସଂଖ୍ୟକ ସ୍ତମ୍ଭ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ର କୋଟି $m \times n$ ଅଟେ ।
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ଓ ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହେଲେ, ତାହାକୁ ଏକ ବର୍ଗ ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।
- ଯେଉଁ ବର୍ଗ-ମାଟ୍ରିକ୍ସର କର୍ଣ୍ଣରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ ଅଟେ, ତାହାକୁ କର୍ଣ୍ଣ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।
- ଯେକୌଣସି କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଏକକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ହେଉଛି, ସେହି କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ କର୍ଣ୍ଣ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ମୁଖ୍ୟ କର୍ଣ୍ଣରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତ୍ୟେକ 1 ।
- ଯେଉଁ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଶୂନ, ତାହାକୁ ଶୂନ-ମାଟ୍ରିକ୍ସ କୁହାଯାଏ ।
- ଯଦି ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବେ ।
- ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଧାଡ଼ି ଓ ସ୍ତମ୍ଭକୁ ପରସ୍ପର ଅଦଳ ବଦଳ କରି ଉକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଟ୍ରାନ୍ସପୋଜ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।
- ଯଦି $A' = A$ ହୁଏ, ତେବେ A ଏକ ପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଓ ଯଦି $A' = -A$ ହୁଏ, ତେବେ A ଏକ ବିପ୍ରତିସମ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ।
- କୌଣସି ଏକ ଅଦିଶ ଦ୍ୱାରା ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ ଗୁଣନ କଲେ, ଉକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଅଦିଶ ଗୁଣଫଳ ମିଳେ ।
- ସମାନ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଦତ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗ କଲେ, ଉକ୍ତ ମାଟ୍ରିକ୍ସମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ମିଳେ ।
- ଦୁଇଟି ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଓ B ରେ ଅନ୍ତର ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ସହ B ର ଋଣାତ୍ମକ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଯୋଗ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କିଛି ନୁହେଁ ।
- $m \times n$ କ୍ରମ ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A ଏବଂ $n \times p$ କ୍ରମ ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସ B ର ଗୁଣଫଳ $m \times p$ କ୍ରମ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ A ର ଧାଡ଼ିରେ ଥିବା ଉପାଦାନକୁ B ର ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ଅନୁରୂପ ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଗୁଣନ କରି ସେମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ମିଳେ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ମାଟ୍ରିକ୍ସର ଉପାଦନ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) 2×1 (b) 3×2 (c) 3×3 (d) 3×4

2. 3×2 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ମାଟ୍ରିକ୍ସ ଗଠନ କର ଯାହାର a_{ij} ଉପାଦାନଟି ନିମ୍ନମତେ ଦିଆଯାଇଛି :

(a) $a_{ij} = i - 2j$ (b) $a_{ij} = 3i - j$ (c) $a_{ij} = i + \frac{3}{2}j$

3. ମାଟ୍ରିକ୍ସ ମାନଙ୍କର କୋଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ (b) $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

(c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

4. x, y ଓ z ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି

(a) $\begin{bmatrix} x & y \\ z & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} x+y & z \\ 6 & x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} x-2 & 3 \\ 0 & y+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z \\ y+z & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} x+y & y-z \\ z-2x & y-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

5. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) A + B (b) 2A (c) 2A – B

6. X ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

7. a ଓ b ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a-b & 2 & -2 \\ 4 & a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 2a+b & 5 \end{bmatrix}$$

8. ନିମ୍ନ ମାଟ୍ରିକ୍ସ A, B ଓ C ପାଇଁ, ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର : $A + (B + C) = (A + B) + C$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ ଏବଂ } C = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

9. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$,

AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

10. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

AB ଓ BA ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । AB = BA କି ?

11. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, A^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. A (B + C) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ଏବଂ } C = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

13. ଯଦି $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ଏବଂ $B = \begin{bmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{bmatrix}$

ଏବଂ $(A + B)^2 = A^2 + B^2$, ତେବେ x ଓ y ର ମାନନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ମାଟ୍ରିକ୍ସ $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, ମାଟ୍ରିକ୍ସ ସମୀକରଣ $A^2 + 4A - 2I$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.1

1. $\begin{bmatrix} 56 & 65 & 71 \\ 29 & 37 & 57 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 56 & 29 \\ 65 & 37 \\ 71 & 57 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 40 & 35 & 25 \\ 10 & 5 & 8 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 40 & 10 \\ 35 & 5 \\ 25 & 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

4. (a) 6 (b) 12 (c) 8 (d) 12 (e) ab (f) mn

5. (a) $1 \times 8;\ 2 \times 4;\ 4 \times 2;\ 8 \times 1;$
   (b) $1 \times 5; 5 \times 1$
   (c) $1 \times 12; 2 \times 6; 3 \times 4; 4 \times 3; 6 \times 2; 12 \times 1$
   (d) $1 \times 16; 2 \times 8; 4 \times 4; 8 \times 2; 16 \times 1$

6. (a) 4 (b) 5, (c) 4×5 (d) 20
   (e) $a_{14} = 0; a_{34} = -3; a_{45} = 1$ ଏବଂ $a_{33} = 3$

7. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 4 & 2 & \frac{4}{3} \\ 9 & \frac{9}{2} & 3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \frac{25}{2} & \frac{49}{2} \\ 8 & 18 & 32 \\ \frac{25}{2} & \frac{49}{2} & \frac{81}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ -1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

8. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \\ 15 & 30 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.2

1. (a) G (b) B (c) A, D, E ଏବଂ F (d) A, D ଏବଂ F
   (e) D ଏବଂ F (f) F (g) C

2. (a) $a = 2, b = 10, c = 6, d = -2$
   (b) $a = 2, b = 3, c = 2, d = 5$
   (c) $a = \frac{3}{2}, b = -2, c = 2, d = -4$

3. ନାଁ 4. ନାଁ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.3

1. (a) $\begin{bmatrix} 28 & 8 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} \frac{7}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-21}{2} & -3 \\ -3 & \frac{-9}{2} \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 20 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 9 & -3 & -12 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -28 & -14 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 15 & 0 & 5 \\ 20 & -10 & 0 \\ -5 & 0 & 25 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -12 & 0 & -4 \\ -16 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & -20 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{-2}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.4

1. (a) $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 13 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 14 & 8 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 19 & 10 \end{bmatrix}$

2. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -5 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & -3 & -6 \\ 5 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 9 \\ -9 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} -4 & -11 & -15 \\ 11 & -10 & -10 \end{bmatrix}$

3. (a) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 3 \\ 5 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & -7 & 1 \\ 2 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ -3 & 7 & -1 \\ -2 & -5 & 7 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -14 & 9 \\ 14 & 9 & 8 \\ 16 & 15 & 14 \end{bmatrix}$

4. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 18 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 21 & 27 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 27 & 31 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} \frac{-17}{5} & \frac{-21}{5} \\ \frac{-27}{5} & \frac{-31}{5} \end{bmatrix}$

7. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, $(A + B)' = B' + A'$

8. (a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 5 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} -5 & 9 \\ -16 & -3 \end{bmatrix}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 3.5

1. $AB = [-6]$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ $AB \neq BA$

2. (a) $AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -3 & 13 & -4 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ $AB \neq BA$

3. (a) $AB = \begin{bmatrix} ax & ay & az \\ bx & by & bz \end{bmatrix}$; BA ଅସମ୍ଭବ ।

4. $BA = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$; AB ଅସମ୍ଭବ ।

5. ଉଭୟ AB ଏବଂ BA ଅସମ୍ଭବ । AB ସମ୍ଭବ ନୁହଁ, ଯେହେତୁ A ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା, B ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । BA ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ, ଯେହେତୁ B ର ସ୍ତମ୍ଭ ସଂଖ୍ୟା, A ର ଧାଡ଼ି ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ।

6. $AB = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 17 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$

7. $AB = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 7 \\ 3 & 17 & 24 \\ 14 & -13 & 17 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 16 & -8 & -11 \\ 16 & 11 & 3 \\ 10 & 21 & 11 \end{bmatrix}$; $AB \neq BA$

8. $AB = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $AB = BA$

9. (a) $x = 3, y = -1$ (b) $x = -1, y = 2$

12. (a) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -14 & 18 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

13. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$; $AC = BC$

ଏଠାରେ, $A \neq B$ ଏବଂ $C \neq O$ ତଥାପି $AC = BC$, ଅର୍ଥାତ୍, ମାଟ୍ରିକ୍ସ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଲୋପନ ନିୟମ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ହୁଏ ନାହିଁ ।

14. (a) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ -11 & 10 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -4 & -7 \\ -14 & 9 \end{bmatrix}$

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, $A(B + C) = AB + AC$

16. $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ 18. (a) ନାଁ (b) ନାଁ (c) ନାଁ

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ :

1. (a) 2
   (b) 6
   (c) 9
   (d) 12

2. (a) $\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 4 \\ \frac{7}{2} & 5 \\ \frac{9}{2} & 6 \end{bmatrix}$

3. (a) 3×1
   (b) 1×3
   (c) 3×2
   (d) 2×3

4. (a) $x = 1, y = 2, z = 3$

   (b) $x = 5, y = 1, z = 5$

   (c) $x = 3, y = -3, z = 3$

   (d) $x = 2, y = 1, z = 5$

5. (a) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

6. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

7. (a) $a = \frac{3}{2} \quad b = \frac{-3}{2}$

9. (a) $AB = \begin{bmatrix} 13 & 11 \\ 38 & 43 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 6 & 14 & 24 \\ 4 & 21 & 37 \end{bmatrix}; AB \neq BA$

10. (a) $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; AB = BA$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

13. $x = 1, y = -4$