୨୯

ବିକ୍ଷେପଣର ମାପନ

କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତାର ବିଭିନ୍ନପ୍ରକାର ମାପ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେ ଜାଣିଛ । କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତାର ମାପ ହିଁ ସମଗ୍ର ତଥ୍ୟକୁ ଆମକୁ ସମଗ୍ର ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟକରେ ।

କେନ୍ଦ୍ରୀୟ ପ୍ରବଣତା କ'ଣ ସମଗ୍ର ତଥ୍ୟର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବର୍ଣ୍ଣନା ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବ କି ?

ଏହି କଥା ବୁଝିବାପାଇଁ ଆସ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ବିଚାର କରିବା ।

ଦୁଇଟି କାରଖାନାର କର୍ମଚାରୀମାନଙ୍କର ଦୈନିକ ଆୟ ହେଉଛି :

କାରଖାନା A :	35	45	50	65	70	90	100
କାରଖାନା B :	60	65	65	65	65	65	70

ଏଠାରେ ଦୁଇଟିଯାକ ଗୋଷ୍ଠୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନ ସମାନ ଓ ଏହା ହେଉଛି 65 ।

(i) ଗୋଷ୍ଠୀ Aରେ, ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣଗୁଡ଼ିକ ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ଅଧିକ ବିକ୍ଷିପ୍ତ ହୋଇରହିଛି ।

(ii) ଗୋଷ୍ଠୀ Bରେ, ସମସ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ମାଧ୍ୟମାନର ପାଖାପାଖି ରହିଛି ।

ଦୁଇଟି ଗୋଷ୍ଠୀର ମାଧ୍ୟମାନ ସମାନ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ ଗୋଷ୍ଠୀ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଠାରୁ ଭିନ୍ନ । ଏଣୁ ବିଭିନ୍ନ ଗୋଷ୍ଠୀ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରଭେଦ ଚିହ୍ନଟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡିଥାଏ । ଏଣୁ ଗୋଷ୍ଠୀ ବା ସମୂହ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣଗୁଡ଼ିକ କେତେ ବିକ୍ଷିପ୍ତ ତା'ହା ମାପ କରିବା ଲାଗି ଏକ ପଦ୍ଧତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ଉପୁଜେ । ଏହା କରିବା ପାଇଁ **ବିକ୍ଷେପଣର ମାପନ** (measures of dispersion)ପାଠଟି ପଢ଼ିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବାପରେ, ତୁମେ

- ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ବିକ୍ଷେପଣ (Dispersion)ର ଅର୍ଥ ବୁଝାଇ ଦେଇପାରିବ;
- ବିକ୍ଷେପଣର ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ମାପ - ବିସ୍ତାର (range), ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି (mean deviation), ପ୍ରସରଣ (variance), ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି (standard deviaton), ଆଦିର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- କୌଣସି ଅଶୋଧିତ (raw) ଏବଂ ବର୍ଗୀକୃତ (grouped) ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଅଶୋଧିତ (raw) ଏବଂ ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତିର ଧର୍ମକୁ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନ
- ଅବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମଧ୍ୟମା

29.1 ବିକ୍ଷେପଣର ଅର୍ଥ

ବିକ୍ଷେପଣର ଅର୍ଥକୁ ବୁଝାଇବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କରିଯାଉ ।

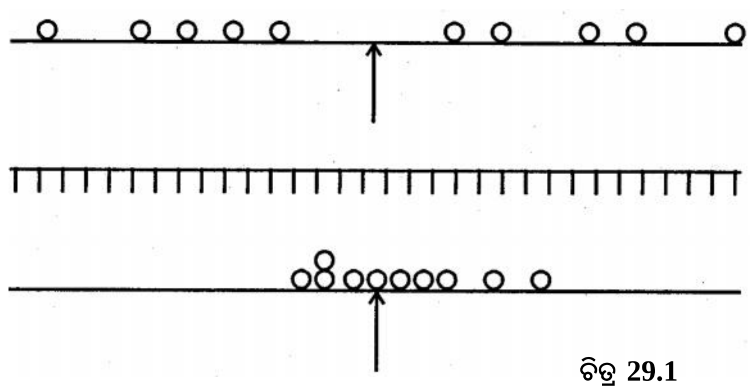
ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଦୁଇଟି ଦଳ ଛାତ୍ରଙ୍କୁ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ପରୀକ୍ଷା ଦିଆଯାଇଥିଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦଳରେ 10 ଜଣ ଲେଖାଏଁ ଛାତ୍ର ଥିଲେ ଏବଂ ପରୀକ୍ଷାର ମୋଟ ନମ୍ବର ଥିଲା 40 । ପିଲାଏ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଦଳ A	6	9	11	13	15	21	23	28	29	35
ଦଳ B	15	16	16	17	18	19	20	21	23	25

A-ଦଳର ହାରାହାରି ନମ୍ବର 19;

B-ଦଳର ହାରାହାରି ନମ୍ବର 19 ।

ଆସ ଉଭୟ ତଥ୍ୟ ଲାଗି ସମାନ ସ୍କେଲ୍ ନେଇ ବିନ୍ଦୁଚିତ୍ର (ଚିତ୍ର 29.1) ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା । ବିନ୍ଦୁଚିତ୍ରରେ ମାଧ୍ୟମାନର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ତୀରଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 29.1

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିକ୍ଷେପଣ ବା ବିଚ୍ଛୁରଣର ବ୍ୟାପ୍ତି ଦଳ A ଓ ଦଳ B ଲାଗି ଭିନ୍ନ । ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ କେତେ ବିକ୍ଷିପ୍ତ ହୋଇ ରହିଛନ୍ତି ତାକୁ ମାଧ୍ୟମାନକୁ ବିକ୍ଷେପଣ ବା ବିଚ୍ଛୁରଣ (Dispersion) ମାପ କୁହାଯାଏ ।

ଏହି ପାଠରେ ତୁମେ ବିକ୍ଷେପଣର ନିମ୍ନଲିଖିତ ମାପଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିବ ।

(a) ବିସ୍ତାର (range)

(b) ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି (mean deviation from mean)

(c) ପ୍ରସରଣ (variance)

(d) ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି (standard deviation)

29.2 ବିକ୍ଷେପଣର ବିଭିନ୍ନ ମାପର ସଂଜ୍ଞା

(a) ବିସ୍ତାର : ଉପରିସ୍ଥ ଉଦାହରଣରେ, ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ

(i) ଦଳ A ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପିଲାମାନଙ୍କର ନମ୍ବରଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି 6ରୁ 35 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ;

(ii) ଦଳ B ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପିଲାମାନଙ୍କର ନମ୍ବରଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି 15ରୁ 25 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ ।

A-ଦଳର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଓ ବୃହତ୍ତମ ନମ୍ବର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ହେଉଛି $(35 - 6) = 29$ ।

B-ଦଳର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଓ ବୃହତ୍ତମ ନମ୍ବର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ହେଉଛି (25 – 15) = 10 । ଏହିପରି କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟକୁ ଆବଣ୍ଟନର ବିସ୍ତାର Range କୁହାଯାଏ ।

(b) **ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି :** (Mean Deviation) ଚିତ୍ର 29.1ରେ ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ t-ଦଳର ନମ୍ବରଗୁଡ଼ିକ ସେମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନର ପାଖାପାଖି ରହିଥିବା ବେଳେ, A-ଦଳର ନମ୍ବରଗୁଡ଼ିକ ସେମାନଙ୍କର ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ଅଧିକ ବିକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବରେ ରହିଛନ୍ତି । ଆସ ଆମେ ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣର ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଯଦି ସମଷ୍ଟିଟି 'ବଡ' ହୁଏ, ତେବେ ବିକ୍ଷେପଣ ମଧ୍ୟ 'ବଡ' ହେବ । ଯଦି ସମଷ୍ଟିଟି 'ସାନ' ହୁଏ, ତେବେ ବିକ୍ଷେପଣ ମଧ୍ୟ 'ସାନ' ହେବ ।

ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ A-ଦଳର ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ 19ରୁ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (x_i)	ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତି $(x_i - \bar{x})$
6	–13
9	–10
11	–8
13	–6
15	–4
21	+2
23	+4
28	+9
29	+10
35	+16
190	0

ଏଠାରେ ସମଷ୍ଟି 0 ଶୂନ । ଏହା 'ବଡ' ନୁହେଁ କିମ୍ବା 'ସାନ' ନୁହେଁ । ଏହା ଦୈବାତ୍ ଘଟିଲା ବୋଲି କୁହାଯାଇପାରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ B-ଦଳର ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନ 19 ଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (x_i)	ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତି $(x_i - \bar{x})$
15	–4
16	–3
16	–3
17	–2
18	–1
19	0
20	1
21	2
23	4
25	6
190	0

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ହେଲା । ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ ଏହା ଦୈବାତ୍ ଘଟିଲା ବୋଲି କୁହାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । ବାସ୍ତବରେ, ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣ କରିଛୁ, **ଯେକୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା ଶୂନ ହୁଏ** । ଏହି ସମଷ୍ଟି କାହିଁକି ସର୍ବଦା ଶୂନ ହୁଏ ?

ଭଲ ଭାବରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଦେଖିବା ଯେ କେତେକ ବିଚ୍ୟୁତିର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକ ଓ ଅନ୍ୟକେତେକ ବିଚ୍ୟୁତିର ଚିହ୍ନ ରଣାତ୍ମକ । ବୋଧହୁଏ ଏହି କାରଣରୁ ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା ଶୂନ ହୁଏ । ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ହେଲା । ଏଣୁ ବିଚ୍ୟୁତିମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟିରୁ ଆମେ କୌଣସି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିପାରିବା ନାହିଁ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିକୁ ଏଡେଇ ଦିଆଯାଇପାରେ ଯଦି ଆମେ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ପରମମାନ ନେଇ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ।

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କଲେ, ଆମେ ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ଲାଗି ଏକ ମାପ ପାଇପାରିବା ।

କୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିମାନଙ୍କର ପରମମାନର ସମଷ୍ଟିକୁ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣର ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଯେଉଁ ଭାଗଫଳ ମିଳେ, ତାହା ହେଉଛି ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି (Mean Deviation) (ଏଠାରେ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣର ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି ବାରମ୍ବାରମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି)

(c) **ପ୍ରସରଣ (variance) :** ଉପରିସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଆମେ ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ପରମମାନ ନେଇ ସେଗୁଡ଼ିକର ରଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନକୁ ଏଡେଇ ଦେଇଥିଲେ । ରଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନକୁ ଏଡେଇବାର ଅନ୍ୟ ଏକ ପଦ୍ଧତି ହେଉଛି ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଏଣୁ ଆମେ ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କରିବା । ସେହି ସମଷ୍ଟିକୁ, ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟା (ଅର୍ଥାତ୍ ବାରମ୍ବାରତାମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଆମେ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ହାରାହାରି ପାଇବା । ଏହାକୁ ପ୍ରସରଣ କୁହାଯାଏ । ପ୍ରସରଣକୁ ସାଧାରଣତଃ ¢² ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(d) **ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି (Standard deviation) :** ଆମେ ପ୍ରସରଣର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ଆମେ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗର ମାଧ୍ୟମାନର ବର୍ଗମୂଳ ଅଥବା ସଂକ୍ଷେପରେ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ପାଇଥାଉ । ଏହାକୁ σ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

29.3 ଅଶୋଧିତ ତଥା ବର୍ଗୀକୃତି ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି

ଅଶୋଧିତ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}{N}$

ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left|x_i - \bar{x}\right|\right]}{N}$

ଯେଉଁଠି $N = \sum_{i=1}^{n} f_i,\ \bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i\, x_i)$

ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନପାଦଗୁଡ଼ିକ ଦର୍ଶାଯାଏ ।

ପାଦ 1 : ମାଧ୍ୟମାନରୁ ବିଚ୍ୟୁତି $x_i - \bar{x}$ ମାନଙ୍କୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖ (ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ମାଧ୍ୟମାନ (mid-value) କୁ x_i ରୂପେ ସୂଚିତ କର ।)

ପାଦ 2 : ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିଚ୍ୟୁତିର ପରମମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖ ଓ ସେହି ସ୍ତମ୍ଭର ନାମ ଦିଅ $\left|x_i - \bar{x}\right|$ । ଅଶୋଧିତ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କର ।

ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|}{N}$

ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟକ୍ଷେତ୍ରରେ ପାଦ - 3କୁ ଯାଅ ।

ପାଦ 3 : ପାଦ - 2ରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଫଳ $\left(x_i - \bar{x}\right)$ ସହ ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ଗୁଣନ କର । ଆମେ ପାଇବା $f_i\left(x_i - \bar{x}\right)$ ଏବଂ

ପ୍ରାପ୍ତଫଳଗୁଡ଼ିକୁ $f_i\left(x_i - \bar{x}\right)$ ଭାବେ ନାମିତ ହୋଇଥିବା ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖ ।

ପାଦ - 4 :ସ୍ତମ୍ଭରେ3- ଥିବା ଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମେ ପାଇବା $\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left|x_i - \bar{x}_i\right|\right]$

ପାଦ - 5 : ପାଦ - 4ରେ ପାଇଥିବା ସମଷ୍ଟିକୁ N ଦ୍ୱାରା ଭାଗକର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପୂର୍ବପାଦଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିବା ପାଇଁ କେତେକ ଉଦାହରଣ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 29.1

ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଆକାର x_i	4	6	8	10	12	14	16
ବାରମ୍ବାରତା f_i	2	5	5	3	2	1	4

ମାଧ୍ୟମାନ ହେଉଛି 9.7

ସମାଧାନ :

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\left\|x_i - \bar{x}\right\|$	$f_i\left\|x_i - \bar{x}\right\|$
4	2	–5.7	5.7	11.4
6	4	–3.7	3.7	14.8
8	5	–1.7	1.7	8.5
10	3	0.3	0.3	0.9
12	2	2.3	2.3	4.6
14	1	4.3	4.3	4.3
16	4	6.3	6.3	25.2
	21			69.7

ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି $= \frac{\sum\left[f_i\left|x_i - \bar{x}\right|\right]}{21} = \frac{69.7}{21} = 3.319$

ଉଦାହରଣ 29.12

ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ନମ୍ବର	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	5	8	15	16	6

ମାଧ୍ୟମାନ ହେଉଛି 27 ନମ୍ବର

ସମାଧାନ :

ନମ୍ବର	ଶ୍ରେଣୀନମ୍ବର x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0-10	5	5	–22	22	110
10-20	15	8	–22	12	96
20-30	25	15	–2	2	30
30-40	35	16	8	8	128
40-50	45	6	18	18	108
ମୋଟ		50			472

ମାଧ୍ୟମାନରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି $= \dfrac{\sum\left[f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert\right]}{N} = \dfrac{472}{50}$ ନମ୍ବର = 9.44 ନମ୍ବର

$= \dfrac{472}{50}$ ନମ୍ବର = 9.44 ନମ୍ବର

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.1

1. 10ଜଣ ବାଳିକାଙ୍କର ବୟସ ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ :

3 5 7 8 9 10 12 14 17 18

ଏହାର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

2. ଦ୍ୱାଦଶ ଶ୍ରେଣୀର 10 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଓଜନ (କେ.ଜି.ରେ) ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

45 49 55 43 52 40 62 47 61 58

ସେମାନଙ୍କର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

3. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀର ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

45 55 63 76 67 84 75 48 62 65

ଦତ୍ତ ଅଛି : ମାଧ୍ୟମାନ = 64

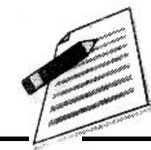
4. ନିମ୍ନ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣର ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ବେତନ (ଟଙ୍କାରେ)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	4	6	8	12	7	6	4	3

ଦତ୍ତ ଅଛି : ମାଧ୍ୟମାନ = ଟ. 57.20

5. 40 ଜଣ ଛାତ୍ର ଏକ ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବରର ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ପାଇଥିବା ନମ୍ବର	20	30	40	50	60	70	80	90	100
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	2	4	8	10	8	4	2	1	1



6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ତଥ୍ୟ, ଗୋଟିଏ କାରଖାନାରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ 50 ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ମାସିକ ଆୟକୁ ସୂଚାଏ ।

ଆୟ (ଟଙ୍କାରେ)	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	4	6	15	12	7	4	2

ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. 100 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କର ଓଜନର ବିତରଣ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

ଓଜନ (କି.ଗ୍ରାରେ)	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	5	13	35	25	17	5

ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପରୀକ୍ଷାରେ 50 ଜଣ ଛାତ୍ର ପାଇଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

ନମ୍ବର	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା	4	6	9	12	8	6	4	1

ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

29.4 ଅଶୋଧିତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିରୂପଣ

ଯଦି n ସଂଖ୍ୟକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ଦତ୍ତଥାଏ, ତେବେ

$$\text{ପ୍ରସରଣ } (\sigma^2) = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$$

ବା, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}\bar{x}$; ଯେଉଁଠି $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତ (σ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ) ହେଉଛି ±²ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ । ଏଣୁ

$$\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{n}}$$

ପ୍ରସରଣ (ଏଣୁ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ନିମ୍ନ ପାଦଗୁଡ଼ିକ ଅନୁସରଣ କରାଯାଏ । ଏଠାରେ ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇସାରିଛି ।

ପାଦ - 1 : ମାଧ୍ୟମାନରୁ ବିଚ୍ୟୁତି ଅର୍ଥାତ୍ $x_i - \bar{x}$ ଗୁଡ଼ିକର ଏକ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

ପାଦ - 2 : (ନିରୀକ୍ଷଣ) : ମାଧ୍ୟମାନରୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବିଚ୍ୟୁତି ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)$ ନିଶ୍ଚିତ ଶୂନ (0) ହେବ ।

ପାଦ - 3 : ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିଚ୍ୟୁତିର ବର୍ଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକୁ $\left(x_i-\bar{x}\right)^2$ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖ ।

ପାଦ -4 : ପାଦ 3ରେ ପାଇଥିବା ସ୍ତମ୍ଭ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକର ।

ପାଦ - 5 : ପାଦ 4ରେ ପ୍ରାପ୍ତ ସମଷ୍ଟିକୁ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଭାଗକର । ତହିଁରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ହେବ δ^2 ।

ପାଦ - 6 : ±² ର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମେ ± (ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି) ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 29.13

ଗୋଟିଏ ତେଜରାତି ଦୋକାନରେ ପ୍ରତ୍ୟହ ବିକ୍ରି କରାଯାଉଥିବା ଚିନି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସୋମବାର	ମଙ୍ଗଳବାର	ବୁଧବାର	ଗୁରୁବାର	ଶୁକ୍ରବାର	ଶନିବାର
75କି.ଗ୍ରା.	120 କି.ଗ୍ରା.	12 କି.ଗ୍ରା.	50 କି.ଗ୍ରା.	70.5 କି.ଗ୍ରା	140.5 କି.ଗ୍ରା.

ଦିନ ପ୍ରତି ହାରାହାରି ଚିନିବିକ୍ରି ପରିମାଣ ହେଉଛି 78 କି.ଗ୍ରା । ଉପରିସ୍ଥ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\bar{x} = 78$ କି.ଗ୍ରା. (ଦତ୍ତ)

x_i	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$
75	–3	9
120	42	1764
12	–66	4356
50	–28	784
70.5	–7.5	56.25
140.5	62.5	3906.25
	0	10875.50

ଏଣୁ, $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1} (x_1 - \bar{x})^2}{n} = \frac{10875.50}{6} = 1812.58$ (ପ୍ରାୟ)

ଏବଂ $\sigma = 42.57$ (ପ୍ରାୟ)

ଉଦାହରଣ 29.14

A-ସେକ୍ସନ୍‌ର 10 ଜଣ ଛାତ୍ର ଇଂରାଜି ପରୀକ୍ଷାରେ ରଖିଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

7 10 12 13 15 20 21 28 29 35

ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{190}{10} = 19$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
7	–12	144
10	–9	81
12	–7	49
13	–6	36
15	–4	16
20	+1	1
21	+2	4
28	+9	81
29	+10	100
35	+16	256
	0	768

ଏଣୁ $\sigma^2 = \frac{768}{10} = 76.8$

ଏବଂ $\sigma = +\sqrt{768} = 8.76$ (ପ୍ରାୟ)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.2

1. ଗୋଟିଏ କାରଖାନାର ଦଶଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ଦୈନିକ ବେତନ (ଟଙ୍କାରେ) ଦିଆଯାଇଛି

50 60 65 70 80 45 75 90 95 100

ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର 10 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଇଂରାଜୀ ପରୀକ୍ଷାର ନମ୍ବର ହେଉଛି :

9 10 15 16 18 20 25 30 32 35

ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ ମାସର ପ୍ରଥମଦଶ ଦିନରେ ଏକ ସହରରେ ଥିବା ଆପେକ୍ଷିକ ସାନ୍ଦ୍ରତା (% ରେ)ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

90 97 92 95 93 95 85 83 85 75

ଉପରିସ୍ଥ ତଥ୍ୟ ଲାଗି ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

4 6 8 10 12 14 16

5. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

4 7 9 10 11 13 16

6. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

40 40 40 60 65 65 70 70 75 75 75 80 85 90 90 100

29.5 ଅଶୋଧିତ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ଓ ପ୍ରସରଣ - ଏକ ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି

ଯଦି $\bar{x}$ ଏକ ଦଶମିକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ, $\bar{x}$ ରୁ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି $\bar{x}$ ତା'ର ବର୍ଗ ନେଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଫଳରେ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଦଶମିକ ଅଙ୍କ ସ୍ଥାନ ପାଇବ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ହିସାବ କାର୍ଯ୍ୟ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଜଟିଳ ହେବ । ନିମ୍ନରେ σ^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଏକ ବିକଳ୍ପ ସୂତ୍ର ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ସୂତ୍ରରେ $\bar{x}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନ ଥାଏ ।

ଆମେ ଜାଣୁ $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_n - \bar{x}\right)^2}{n}$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \qquad \left[\because \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}\right]$$

ଅର୍ଥାତ୍, $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n}$

ଏବଂ $\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$

ଏଣୁ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ σ^2 ତଥା σ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ନିମ୍ନ ପାଦ ମାନ ଦର୍ଶାଯାଏ ।

ପାଦ - 1 : ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ ନିରୂପଣ, ଅର୍ଥାତ୍ x_i^2 ଲାଗି ସ୍ତମ୍ଭଟିଏ ଦର୍ଶାଅ ।

ପାଦ - 2 : ପାଦ 1ରେ ଥିବା ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମେ ପାଇବା $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ ।

ପାଦ - 3 : ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସୂତ୍ରରେ $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, n ଓ $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ର ମାନ ବସାଅ । ଆମେ σ^2 ପାଇଲେ ।

ଉଦାହରଣ 29.5

ଆମେ ଏହି ପାଠ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଉଦାହରଣ 29.4ରେ ଥିବା ତଥ୍ୟ ନେଇ ପୂର୍ବୋକ୍ତି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

x_i	x_i^2
7	49
10	100
12	144
13	169
15	225
20	400
21	441
28	784
29	841
35	1225
190	4378

$$\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n}$$

$$= \dfrac{4378 - \dfrac{(190)^2}{10}}{10}$$

$$= \frac{4378-3610}{10}$$

$$= \frac{768}{10} = 76 \cdot 8$$

ଏବଂ $\sigma = +\sqrt{76 \cdot 8} = 8 \cdot 76$ (ପ୍ରାୟ)

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଉଭୟ ପ୍ରଣାଳୀରେ σ^2 ଓ σ ଲାଗି ଏକା ଫଳ ମିଳିଲା ।

29.6 ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ଓ ପ୍ରସରଣ ନିରୂପଣ : ପ୍ରଥମ ପଦ୍ଧତି

ଆମକୁ 'k' ସଂଖ୍ୟକ ଶ୍ରେଣୀ ଓ ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ଦିଆଯାଇଛି । ଆମେ ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 2 σ_g^2 ଏବଂ σ_2 ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇବା । ନିମ୍ନରେ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ଦତ୍ତ :

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]}{N}, N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

ଏବଂ $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

σ_g^2 ଓ σ_g ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ନିମ୍ନଲିଖିତ ପାଦମାନ ଅନୁସରଣ କରିବା : (ପୂର୍ବରୁ ମାଧ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇଛି ବୋଲି ଧରିନେବା) ।

ପାଦ - 1 : ଦତ୍ତ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି ଶ୍ରେଣୀ-ଚିହ୍ନ (class mark) ନିରୂପଣ ଲାଗି ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭ ଦର୍ଶାଅ । ଏହାକୁ x_i ନାମ ଦିଅ ।

ପାଦ - 2 : ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟାର ବିଚ୍ୟୁତି $x_i - \bar{x}$ ନିରୂପଣ ଲାଗି ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭ ନିଅ । ଅବଶ୍ୟ ଏହି ସ୍ତମ୍ଭର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ (0) ନ ହୋଇପାରେ, କାରଣ ଏଠାରେ x_i ଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ନୁହନ୍ତି ।

ପାଦ - 3 : ପାଦ-2ରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ବିଚ୍ୟୁତିଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ $\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଓ ଏହାର ନାମ ଦିଅ $\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ।

ପାଦ - 4 : ସ୍ତମ୍ଭ $\bar{x}$ 3 ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳାଫଳକୁ ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସହ ଗୁଣନ କର । ଆମେ ପାଇବା $f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$ ।

ପାଦ - 5 : ସ୍ତମ୍ଭ-4ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମେ ପାଇବା $\sum_{i=1}^{k}\left[fi\left(x_i - \bar{x}\right)^2\right]$

ପାଦ - 6 : ପାଦ-5ରେ ପାଇଥିବା ସମଷ୍ଟିକୁ N (ବାରମ୍ବାରତାମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି) ଦ୍ୱାରା ଭାଗକର । ଅମେ ପାଇବା σ_g^2 ।

ପାଦ - 7 : $\delta_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

ଉଦାହରଣ 29.6

ଏକ ନୂଆ ପ୍ରକାର ଗହମର ଉତ୍ପାଦନକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ଲାଗି 50 ଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ପରୀକ୍ଷା କରାଯାଇଥିଲା । ମିଳିଥିବା ଫଳାଫଳ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

ହେକ୍ଟର ପ୍ରତି ଉତ୍ପାଦନ (କ୍ୱିଣ୍ଟାଲ୍‌ରେ)	କ୍ଷେତ୍ର ସଂଖ୍ୟା
31-35	2
36-40	3
41-45	8
46-50	12
51-55	16
56-60	5
61-65	2
66-70	2

ହେକ୍ଟର ପ୍ରତି ଉତ୍ପାଦନର ମାଧ୍ୟମାନ ହେଉଛି 50 କ୍ୱିଣ୍ଟାଲ୍ । ଉପରିସ୍ଥ ବିତରଣ ସାରଣୀର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ହେକ୍ଟର ପ୍ରତି ଉତ୍ପାଦକ (କ୍ୱିଣ୍ଟାଲରେ)	କ୍ଷେତ୍ରସଂଖ୍ୟା	ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟା	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
31-35	2	33	–17	289	578
36-40	3	38	–12	144	432
41-45	8	43	–7	49	392
46-50	12	48	–2	4	48
51-55	16	53	+3	9	144
56-60	5	58	+8	64	320
61-65	2	63	+13	169	338
66-70	2	68	+18	324	648
ମୋଟ	50				2900

ଏଣୁ $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N} = \dfrac{2900}{58} = 58$ ଏବଂ $\sigma_g = +\sqrt{58} = 7\cdot 61$ (ପ୍ରାୟ)

29.7 ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ଓ ପ୍ରସରଣ : ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ୍ଧତି

ଯେତେବେଳେ $\bar{x}$ ଦତ୍ତ ନୁହେଁ ଅଥବା $\bar{x}$ ରେ ଦଶମିକ ଅଙ୍କ ରହିଥାଏ, ସେତେବେଳେ ହିସାବ କାର୍ଯ୍ୟ ଜଟିଳ ହୋଇଥାଏ, ସେକ୍ଷେତ୍ରରେ, କାର୍ଯ୍ୟ ଆମେ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣ କରି σ_g^2 ନିମ୍ନମତେ ନିରୂପଣ କରୁ :

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i x_i^2\right] - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}[f_i x_i]\right]^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

ଏବଂ $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

ଟିପ୍ପଣୀ

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ σ_g^2 ଏବଂ σ_g ନିରୂପଣ ଲାଗି ନିମ୍ନ ପାଦମାନ ଅନୁସୃତ ହେବ :

ପାଦ - 1 : ଦତ୍ତ ଶ୍ରେଣୀଗୁଡ଼ିକର ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟା ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ ସ୍ତମ୍ଭ (x_i) ଦର୍ଶାଅ ।

ପାଦ - 2 : ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟା ଓ ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତାର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକୁ $x_i f_i$ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଦର୍ଶାଅ ।

ପାଦ - 3 : ପାଦ - 2ରେ ପାଇଥିବା ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମକୁ $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i)$ ମିଳିଲା ।

ପାଦ - 4 : ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ବର୍ଗ x_1^2 ଲାଗି ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭ ଦର୍ଶାଅ ।

ପାଦ - 5 : ପାଦ - 4 ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳାଫଳକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସହ ଗୁଣନ କର । ଆମେ $f_i x_i^2$ ପାଇଲେ ।

ପାଦ - 6 : ପାଦ - 5ରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆମେ $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i^2)$ ପାଇଲେ ।

ପାଦ - 7 : $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i^2), N$ ଏବଂ $\left(\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i)\right)$ର ମାନକୁ ସୂତ୍ରରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ σ_g^2 ପାଇବା ।

ପାଦ - 8 : $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

ଉଦାହରଣ 29.7

ଉଦାହରଣ 29.6ରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ହେକ୍ଟର ପ୍ରତି ଉତ୍ପାଦନ (କ୍ୱିଣ୍ଟାଲରେ)	f_i	x_i	$f_i x_1$	x_i^2	$f_i x_2^2$
31-35	2	33	66	1089	2178
36-40	3	38	114	1444	4332
41-45	8	43	344	1849	14792
46-50	12	48	576	2304	27648
51-55	16	53	848	2809	44944
56-60	5	58	290	3364	16820
61-65	2	63	126	3969	7938
66-70	2	68	136	4624	9248
ମୋଟ	50		2500		127900

ମଡ୍ୟୁଲ-VI
ପରିସଂଖ୍ୟାନ

ଟିପ୍ପଣୀ

$\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i^2), N$ ଏବଂ $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i)$ ର ମାନସବୁକୁ ସୂତ୍ରରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\sigma_g^2 = \frac{12700 - \frac{(2500)^2}{50}}{50} = \frac{2900}{50} = 58$$

ଏବଂ $\sigma_g = +\sqrt{58} = 7 \cdot 61$ (ପ୍ରାୟ)

ପୁନଶ୍ଚ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେକୌଣସି ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କଲେ ମଧ୍ୟ σ_g^2ର ମାନ ସମାନ ମିଳିଲା ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.3

1. କେତେକ ରୋଗୀଙ୍କ ଉପରେ ଗୋଟିଏ ଔଷଧର ପ୍ରଭାବ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନ ଫଳାଫଳ ମିଳିଲା :

% ରୋଗମୁକ୍ତ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ରୋଗୀଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା	10	10	25	15	40

ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ ଗ୍ରାମରେ ପ୍ରଥମ ସନ୍ତାନ ଜନ୍ମ ସମୟରେ ମା'ଙ୍କର ବୟସର ଅଧ୍ୟୟନରୁ ନିମ୍ନ ଫଳାଫଳ ମିଳିଲା :

ପ୍ରଥମ ସନ୍ତାନ ଜନ୍ମ ବେଳେ ମା'ଙ୍କ ବୟସ (ବର୍ଷରେ)	18-20	20-22	22-24	24-26	26-28	28-30	30-32
ମା'ମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା	130	110	80	74	50	40	16

ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ତିରିଶ ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ଦୈନିକ ବେତନ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

ଦୈନିକ ବେତନ (ଟଙ୍କାରେ)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250	250-300
କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	3	4	5	7	8	3

ଉପରିସ୍ଥ ତଥ୍ୟ ଲାଗି ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

29.8 ସୋପାନ ବିଚ୍ୟୁତି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିରୂପଣ :

ଉଦାହରଣ 29.7ରେ ଆମେ ଦେଖିଥିଲେ ଯେ ହିସାବ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବଡ ଜଟିଳ । ହିସାବକୁ ସହଜ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ସୋପାନ ବିଚ୍ୟୁତି ମାନକ ଅନ୍ୟ ଏକ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଯେଉଁ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣକୁ ନେଇ ଆମେ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ସେଥିରୁ ଅଧିକାଂଶ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବାରମ୍ବାରତା ଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ହୋଇଥିବାର ଆମେ ଦେଖିବା । ଆମେ ସମ୍ଭାଗ ବିସ୍ତାର (class size) ଲାଗି h ସଙ୍କେତ ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଆମେ ଯେକୌଣସି ଚିହ୍ନ 'a' ଠାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶ୍ରେଣୀ-ସଂଖ୍ୟା (class mark)ର ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ତାକୁ h ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ।

ମନେକରାଯାଉ $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ ... (1)

ତେବେ $x_i = hu_i + a$ ... (2)

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\bar{x} = h\bar{u} + a$ ... (3)

(3) କୁ (2)ରୁ ବିୟୋଗ କରି, ପାଇବା

$$x_i - \bar{x} = h(u_i - \bar{u}) \quad \text{... (4)}$$

(4)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲାପରେ ଏହାକୁ f_i ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି k ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$$\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x - \bar{x})^2\right] = h^2\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \bar{u})^2\right] \quad \text{... (5)}$$

(5)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ N ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N} = \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \bar{u})^2\right]$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2$ ... (6)

ଯେଉଁଠି σ_x^2 ହେଉଛି ମୂଳ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଏବଂ σ_u^2 ହେଉଛି ସୂଚିତ ତଥ୍ୟ (coded data)ର ପ୍ରସରଣ ବା ସୂଚିତ ପ୍ରସରଣ (coded variance) । ମାଧ୍ୟମାନ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ σ_u^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ଏହି ସୂତ୍ର ହେଉଛି -

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \bar{u})^2\right], \; N = \sum_{i=1}^{k} f_i \quad \text{... (7)}$$

ଅଥବା, ମାଧ୍ୟମାନ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୋଇନଥିବା ସୂତ୍ର, ଯାହାକି ହେଉଛି -

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i u_i^2\right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i]\right)^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

ଉଦାହରଣ 29.8

ଆମେ ଉଦାହରଣ 29.6ରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ସୂଚିତ ପ୍ରସରଣର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ h = 5 ଏବଂ a = 48

ହେକ୍ଟର ପ୍ରତି ଉତ୍ପାଦନ (କ୍ୱିଣ୍ଟାଲରେ)	କ୍ଷେତ୍ରସଂଖ୍ୟା f_i	ଶ୍ରେଣୀ-ଚିହ୍ନ x_i	$u_i = \frac{x_i - 48}{5}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
31-35	2	33	–3	–6	9	18
36-40	3	38	–2	–6	4	12
41-45	8	43	–1	–8	1	8
46-50	12	48	0	0	0	0
51-55	16	53	+1	16	1	16
56-60	5	58	+2	10	4	20
61-65	2	63	+3	6	9	18
66-70	2	68	+4	8	16	32
ମୋଟ	50			20		124

ଏଣୁ $\sigma_u^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i^2 - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)^2}{N}}{N}$

$$= \frac{124 - \frac{(20)^2}{50}}{50} = \frac{124-8}{50}$$

$$\sigma_u^2 = \frac{58}{2}$$

ମୂଳ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ହେବ

$$\sigma_x^2 = h^2 \sigma_u^2 = 25 \times \frac{58}{25} = 58$$

ଏବଂ $\sigma_x = +\sqrt{58} = 7 \cdot 61$ (ପ୍ରାୟ)

ଆମେ ଅବଶ୍ୟ, ପ୍ରସରଣ ଲାଗି ସେହି ଫଳ ପାଇଲେ । ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ଲାଗି ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବଫଳ ପାଇଲେ ।

ଉଦାହରଣ 29.9

230 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ମଜୁରି ନିମ୍ନ ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରଦତ୍ତ । ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ମଜୁରି (ଟଙ୍କାରେ)	ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା	ମଜୁରି (ଟଙ୍କାରେ)	ଲୋକସଂଖ୍ୟା
70-80	12	110-120	50
80-90	18	120-130	45
90-100	35	130-140	20
100-110	42	140-150	8

ସମାଧାନ :

ମଜୁରି (ଟଙ୍କାରେ)	ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା f_i	ଶ୍ରେଣୀ-ଚିହ୍ନ x_i	$u_i = \frac{x_i - 105}{10}$	u_i^2	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
70-80	12	75	–3	9	–36	108
80-90	18	85	–2	4	–36	72
90-100	35	95	–1	1	–35	35
100-110	42	105	0	0	0	0
110-120	50	115	+1	1	50	50
120-130	45	125	+2	4	90	180
130-140	20	135	+3	9	60	180
140-150	8	145	+4	16	32	128
ମୋଟ	230				125	753

$$\sigma^2 = h^2\left[\frac{1}{N}\sum[f_i u_i^2] - \left(\frac{1}{N}\sum[f_i u_i]\right)^2\right]$$

$$= 100\left[\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2\right]$$

$$= 100(3{\cdot}27 - 0{\cdot}29) = 298$$

$$\sigma = +\sqrt{298} = 17 \cdot 3 \quad \text{(ପ୍ରାୟ)}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.4

1. ଗୋଟିଏ ଅଟାକଳରେ ଥିବା 400କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ସାପ୍ତାହିକ ଆୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

ସାପ୍ତାହିକ ଆୟ (ଟଙ୍କାରେ)	କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା
80-100	16
100-120	20
120-140	25
140-160	40
160-180	80
180-200	65
200-220	60
220-240	35
240-260	30
260-280	20
280-300	9

ସୋପାନ ବିଚ୍ୟୁତି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ ସହରର ଏକ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଥିବା ଶିକ୍ଷକମାନଙ୍କର ବୟସର ବିବରଣୀ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

ବୟସ (ବର୍ଷରେ)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
ଶିକ୍ଷକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା	25	110	75	120	100	90	50	30

ସୋପାନ ବିଚ୍ୟୁତି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟ ଲାଗି ସୋପାନ-ବିଚ୍ୟୁତି ପଦ୍ଧତିରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ବୟସ (ବର୍ଷରେ)	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55
ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା	70	51	47	31	29	22

29.9 ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତିର ଧର୍ମ

ଧର୍ମ I : ମୂଳବିନ୍ଦୁର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଉପରେ ପ୍ରସରଣ ନିର୍ଭର କରେ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 29.10

କୌଣସି ଏକ ପରୀକ୍ଷାରେ 10 ଜଣ ଛାତ୍ର ରଖିଥିବା ନମ୍ବର :

10 12 15 12 16 20 13 17 15 10

ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ସ୍ଥିର ହେଲା ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଛାତ୍ରକୁ ଅତିରିକ୍ତ 5 ନମ୍ବର ଦିଆଯିବ । ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇଟି କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର ।

ସମାଧାନ : ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ର

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
10	2	20	–4	16	32
12	2	24	–2	4	8
13	1	13	–1	1	1
15	2	30	1	1	2
16	1	16	2	4	4
17	1	17	3	9	9
20	1	20	6	36	36
ମୋଟ	10	140			92

ଏଠାରେ $\bar{x} = \frac{140}{10} = 14$

ପ୍ରସରଣ $= \frac{\sum\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{10}$

$= \frac{92}{10} = 9 \cdot 2$

ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି $= +\sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot 03$

ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ର (ପ୍ରତ୍ୟେକ ନମ୍ବର x_i ସହ 5 ନମ୍ବର ଯୋଗକରି)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_1(x_i - \bar{x})^2$
15	2	20	–4	16	32
17	2	34	–2	4	8
18	1	18	–1	1	1
20	2	40	1	1	2
21	1	21	2	4	4
22	1	22	3	9	9
25	1	25	6	36	36
ମୋଟ	10	190			92

$$\bar{x} = \frac{190}{10} = 19$$

ପ୍ରସରଣ $= \frac{92}{10} = 9 \cdot 2$

ମାନକବିଚ୍ୟୁତି $= +\sqrt{9 \cdot 2} = 3 \cdot 03$

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିଲେ ଯେ ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଅର୍ଥାତ୍ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣଗୁଡ଼ିକ ସହ – ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଯୋଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସରଣ ଏବଂ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତିରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଉନାହିଁ ।

ସହ ଧର୍ମ - II ସ୍କେଲର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଉପରେ ପ୍ରସରଣ ନିର୍ଭରଶୀଳ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 29.11

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣରେ, ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ସହ 2 ଗୁଣି ଦିଆଯାଏ, ତେବେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତିର ହେଉଥିବା ପରିବର୍ତ୍ତନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ସମାଧାନ :

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣର ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରସରଣ = 9·2 ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 3·03 ମିଳିଥିଲା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ ସହ 2 ଗୁଣନ କରି ଆସ ଆମେ ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_1(x_i - \bar{x})^2$
20	2	40	–8	64	128
24	2	48	–4	16	32
26	1	26	–2	4	4
30	2	60	2	4	8
32	1	32	4	16	16
34	1	34	6	36	36
40	1	40	12	144	144
	10	280			368

$$\bar{x} = \frac{280}{10} = 28$$

ପ୍ରସରଣ $= \frac{368}{10} = 36 \cdot 8$

ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି $= +\sqrt{36 \cdot 8} = 6 \cdot 06$

ଏଠାରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ, ନୂତନ ପ୍ରସରଣ ହେଉଛି ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରରସଣର 4 ଗୁଣ ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ଦୁଇଗୁଣ ହେଲା ପୂର୍ବପରି ଆମେ ମଧ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିପାରିବା ଯେ ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଏ, ତେବେ ମୂଳ ପ୍ରସରଣକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଧ୍ରୁବକର ବର୍ଗଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ନୂତନ ପ୍ରସାରଣ ମିଳିବ ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ, ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତିକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଧ୍ରୁବକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ନୂତନ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ମିଳିବ ।

ଧର୍ମ III : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ହେଉଛି ନ୍ୟୂନତମ ସମ୍ଭବ ମାଧ ବର୍ଗ ବିଚ୍ୟୁତିର ବର୍ଗମୂଳ ଅଟେ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ $\bar{x} - a = d$

ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ, ଆମେ ପାଇବା

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum\left[f_i(x_i - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum\left[f_i\left(x_i - \bar{x} + \bar{x} - a\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\left[\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + 2\left(x_i - \bar{x}\right)\left(\bar{x} - a\right) + \left(\bar{x} - a\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + \frac{2}{N}\left(\bar{x} - a\right)\sum f_i\left(x_i - \bar{x}\right) + \frac{\left(\bar{x} - a\right)^2}{N}\sum f_i$$

$= \sigma^2 + 0 + d^2$

$\therefore$ ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତିର ବୀଜଗଣିତୀୟ ଯୋଗଫଳ ଶୂନ ହେଉଛି ।

ବା, $s^2 = \sigma^2 + d^2$

ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ, ଯେତେବେଳେ $d = 0$, ଅର୍ଥାତ୍ ଯେତେବେଳେ $a = \bar{x}$, ସେତେବେଳେ s^2 ନ୍ୟୂନତମ ହେବ । ଏଣୁ ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତି ନିଆଗଲେ, ମାଧ୍-ବର୍ଗ ବିଚ୍ୟୁତିର ବର୍ଗମୂଳ (root mean square deviation) ନ୍ୟୂନତମ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି, ନ୍ୟୂନତମ ସମ୍ଭବ ମାଧ୍ୟବର୍ଗବିଚ୍ୟୁତିର ବର୍ଗମୂଳ ଅଟେ ।

ଧର୍ମ IV : n_1 ଓ n_2 ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ମାଧ୍ୟମାନ m_1 ଓ m_2 ଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତି ନେଇ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ଯଥାକ୍ରମେ σ_1 ଓ σ_2 । ଦୁଇଟି ଯାକ ସେଟ୍‌କୁ ଏକତ୍ରକରି ପ୍ରାପ୍ତ ହେଉଥିବା $(n_1 + n_2)$ ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥିବା ସେଟ୍‌ର ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ବିଚ୍ୟୁତି ନେଇ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି σ ହେବ

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

ଉଦାହରଣ 29.12

ଦୁଇଟି ସ୍ୟାମ୍ପଲ୍ ଆମାପ (sample sizes) 50 ଓ 100ର ମାଧ୍ୟମାନ ଯଥାକ୍ରମେ 54.1 ଓ 50.3; ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି 8 ଓ 7 । ଉଭୟ ସ୍ୟାମ୍ପଲ୍‌କୁ ଯୋଗକରି ସ୍ୟାମ୍ପଲ୍ ଆମାପ 150ର ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ଅଛି

$n_1 = 50, n_2 = 100, m_1 = 54{\cdot}1, m_2 = 50{\cdot}3, \sigma_1 = 8$ ଏବଂ $\sigma_2 = 7$

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{(n_1+n_2)} + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

$$= \frac{(50\times 64)+(100\times 49)}{150} + \frac{50\times 100}{150^2}(54{\cdot}1 - 50{\cdot}3)^2$$

$$= \frac{3200+4900}{150} + \frac{2}{9}(3{\cdot}8)^2 = 57{\cdot}21$$

$\therefore \sigma = 7.56$ (ପ୍ରାୟ)

ଉଦାହରଣ 29.13

ଦତ୍ତ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମ (A.P.) a, a+d, a+2d, ... a+2n.dର ମଧ୍ୟମା ଠାରୁ ମାଧ୍ୟ-ବିଚ୍ୟୁତି (M.D.) ଏବଂ ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି (S.D.) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଦ୍ୱିତୀୟଟି (S.D.) ପ୍ରଥମ (M.D.) ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମ (A.P.)ରେ ପଦ ସଂଖ୍ୟା ହେଉଛି (2n+1)

$$\therefore \bar{x} = a + nd$$

ମଧ୍ୟମା π ଠାରୁ ମାଧ୍ୟକବିଚ୍ୟୁତି $= \dfrac{1}{(2n+1)}\sum_{r=0}^{2n} |(a+rd)-(a+nd)|$

$$= \frac{1}{2n+1}\cdot 2[nd + (n-1)d + \ldots + d]$$

$$= \frac{2}{2n+1}[1+2+\ldots(n-1)+n]d$$

$$= \frac{2n(n+1)}{(2n+1)2}\cdot d = \frac{n(n+1)d}{2n+1} \qquad \ldots (1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\sigma^2 = \dfrac{1}{(2n+1)}\sum_{r=0}^{2n}[(a+rd)-(a+nd)]^2$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)}[n^2 + (n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2]$$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)d^2}{3}$$

$$\therefore \sigma = d\cdot\sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)} \qquad \ldots (2)$$

ଆମେ ପାଇବା (2) > (1)

ଯଦି $d\sqrt{\left(\frac{n(n+1)}{3}\right)} > \frac{n(n+1)}{(2n+1)}d$ ହୁଏ ।

ଅଥବା ଯଦି $(2n+1)^2 > 3n(n+1)$ ହେବ

ଅଥବା ଯଦି $n^2 + n + 1 > 0$ ହେବ । $n > 0$ ହେତୁ ଏହା ସତ୍ୟ ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପରିଣାମ ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣିତ ।

ଉଦାହରଣ 29.14

ପ୍ରମାଣ କର ଯେକୌଣସି ଏକ ବିବିକ୍ତ (discrete) ବଣ୍ଟନ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ଅପେକ୍ଷା ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି କ୍ଷୁଦ୍ରତର ନୁହେଁ ।

ସମାଧାନ :

ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ

ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି (S.D) ≥ ମାଧ୍ୟମାନ ଠାରୁ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି (M.D. from mean)

ଅଥବା, (ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି)^2 ≥ (ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି)^2

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1}{N}\sum\left[f_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i\left|x_i-\bar{x}\right|\right]\right]^2$

ଅଥବା, $\frac{1}{N}\sum\left[f_i d_i^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum[f_i|d_i|]\right]^2$, ଯେଉଁଠି $d_i = x_i - \bar{x}$

ଅଥବା, $N\sum\left(f_i d_i^2\right) \geq \left[\sum\{f_i|d_i|\}\right]^2$

ଅଥବା, $(f_1+f_2+\ldots)\left(f_1d_1^2+f_2d_2^2+\ldots\right) \geq [f_1|d_1|+f_2|d_2|+\ldots]^2$

ଅଥବା, $f_1f_2\left(d_1^2+d_2^2+\ldots \geq 2f_1f_2d_1d_2+\ldots\right)$

ଅଥବା, $f_1f_2\,(d_1-d_2)^2 + \ldots \geq 0$

ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ହେତୁ ସତ୍ୟ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ବିସ୍ତାର : ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟର ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ।
- ମାଧ୍ୟମାନଠାରୁ ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି : $\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\left|x_i-\bar{x}\right|\right)}{N}$

ଯେଉଁଠି $N = \sum_{i=1}^{n} f_i,\ \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$

- ପ୍ରସରଣ : $(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}$ [ଅଶୋଧିତ ତଥ୍ୟ ଲାଗି]

- ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି $(\sigma) = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}}$

- ବର୍ଗୀକୃତ (ସମ୍ଭାଗୀକୃତ) ତଥ୍ୟ ଲାଗି ପ୍ରସରଣ $\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i\left(x - \bar{x}\right)^2\right]}{N}$, ସମ୍ଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ x_i ଆହୁରି

ମଧ୍ୟ, $\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2$ ଏବଂ $\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\left(u_i - \bar{u}\right)^2\right]$ $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

ଅଥବା, $\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}(f_i u_i^2) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}(f_i u_i^2)\right]^2}{N}}{N}$ ଯେଉଁଠି $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

- ବର୍ଗୀକୃତ ତଥ୍ୟର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷାରେ 10 ଜଣ ଛାତ୍ର ପାଇଥିବା ନମ୍ବର (ମୋଟ ନମ୍ବର 100ରୁ) ହେଉଛି

   55 45 63 76 67 84 75 48 62 65

   ଏହି ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଗୋଟିଏ କାରଖାନାର 50 ଜଣ ଶ୍ରମିକଙ୍କର ଆୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

ଆୟ (ଟଙ୍କାରେ)	1200	1300	1400	1500	1600	1800
ଶ୍ରମିକ ସଂଖ୍ୟା	4	7	15	12	7	5

   ଏହି ତଥ୍ୟର ମାଧ୍ୟ-ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ କାରଖାନାର 50 ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ଦୈନିକ ବେତନ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

ବେତନ (ଟଙ୍କାରେ)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	4	6	8	12	7	6	4	3

   ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଗୋଟିଏ କ୍ରିକେଟ ଖେଳାଳିର 50ଟି ଇନିଂସ୍‌ର ସ୍କୋର୍ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ । ଏହି ତଥ୍ୟରୁ ବ୍ୟାଟିଂ ହାରାହାରି ଓ ମାଧ୍ୟ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ରନ୍ ସଂଖ୍ୟା	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100	100-120
ଇନିଂସ୍ ସଂଖ୍ୟା	6	10	12	18	3	1

5. ଗୋଟିଏ ଗଣିତ ପରୀକ୍ଷାରେ 10 ଜଣ ଛାତ୍ର ପାଇଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

   6 10 12 13 15 20 24 28 30 32

   ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6 . ନିମ୍ନରେ ଏକ ନମୁନା ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ 10 ଟି ଅଣ୍ଡାର ଏକ ନମୁନା ବସ୍ତୁତ୍ୱ (ନିକଟତମ ଗ୍ରାମ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) ଦିଆଯାଇଛି ।

   40 51 48 62 54 56 58 60 71 75

   ନମୁନାରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ବସ୍ତୁତ୍ୱଗୁଡ଼ିକର ମାନକ-ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ନିମ୍ନରେ ଗୋଟିଏ କାରଖାନାର 50 ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କର ସାପ୍ତାହିକ ଆୟ (ଟଙ୍କାରେ) ପ୍ରଦତ୍ତ :

ଆୟ (ଟଙ୍କାରେ)	400	425	450	500	550	600	650
କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	5	7	9	12	7	6	4

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟର ପ୍ରସରଣ ଓ ମାନ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମ୍ଭାଗ	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
ବାରମ୍ବାରତା	7	8	25	15	45

9. ଏକ ବଣ୍ଟନ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ xର ମାନକ ହେଉଛି 1, 2, 3, ... N, ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣର ବାରମ୍ବାରତା ହେଉଛି 1 । ଏହି ବଣ୍ଟନର ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.1

1. 15.	2. 22	3. 9.4	4. 15. 44
5. 13.7	6.136	7. 5.01	8. 14.4

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.2

1. ପ୍ରସରଣ = 311, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 17.63
2. ପ୍ରସରଣ = 72.9, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 8.5 3. ପ୍ରସରଣ = 42.6, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 6.53
4. ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 4
5. ପ୍ରସରଣ = 13.14, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 3.62 6. ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 17.6

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.3

1. ପ୍ରସରଣ = 734.96, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 27.1
2. ପ୍ରସରଣ = 12.16, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 3.49
3. ପ୍ରସରଣ = 5489, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 74.09

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 29.4

1. ପ୍ରସରଣ = 2194, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 46.84
2. ପ୍ରସରଣ = 86.5, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 9.3
3. ପ୍ରସରଣ = 67.08, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 8.19

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. 9.4
2. 124.48
3. 15.44
4. 52, 19.8
5. ପ୍ରସରଣ = 74.8, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 8.6
6. 8.8
7. ପ୍ରସରଣ = 5581.25, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 74.7
8. ପ୍ରସରଣ = 840, ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି = 28.9
9. ମାନକ ବିଚ୍ୟୁତି $=\sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$