୨୮

ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ଅବକଳନ ଓ ସମାକଳନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଷୟବସ୍ତୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରିସାରିବା ପରେ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ କେଉଁଠି ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯିବ ?

ବାସ୍ତବରେ ଏଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି ସାଧନୀ ଯାହା ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ମହାକାଶ ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭ କରିବାର ବେଗ, ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭରେ ଭୂପୃଷ୍ଠ ସହ ପ୍ରକ୍ଷେପଣ କୋଣ, ଭୂପୃଷ୍ଠ ପ୍ରତି ସୃଷ୍ଟ ସଂଘାତର ପରିମାଣ ଏବଂ ମହାକାଶ ଯାତ୍ରା ସମ୍ବନ୍ଧିତ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥାଉ ।

ଖାଲି ସେତିକି ନୁହେଁ, ଭୌତିକ ବିଜ୍ଞାନ, ଜୀବ-ବିଜ୍ଞାନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ କେତେକ ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କଲାବେଳେ ଆମେ କେତେକ ସମ୍ବନ୍ଧ ପାଇଥାଉ ଯେଉଁଥିରେ ଅବକଳଜର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡିଥାଏ ।

ଏହିପରି ଗୋଟିଏ ସମ୍ବନ୍ଧ ହେଲା $\frac{ds}{dt} = 4\cdot 9t^2$, ଯେଉଁଠି s ଦ୍ୱାରା ଦୂରତା ଓ t ଦ୍ୱାରା ସମୟ ସୂଚିତ ହୁଏ । ଏଣୁ $\frac{ds}{dt}$ ଦ୍ୱାରା t ସମୟ ବେଳେ ବେଗ (ଦୂରତା ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର) ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ଯେଉଁ ସମୀକରଣରେ ଅବକଳଜରୁ ସମୀକରଣର ପଦ ରୂପେ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ ତାକୁ ଅବକଳ-ସମୀକରଣ (Differenal Equation) କୁହାଯାଏ । ଏହି ପାଠରେ, ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଓ ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଶିକ୍ଷା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢି ସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ଅବକଳ ସମୀକରଣ, ଏହାର କୋଟି ଓ ଘାତର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଏକ ଦତ୍ତ ପରିସ୍ଥିତିରୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରିପାରିବ;
- ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର 'ସାଧାରଣ ସମାଧାନ' ଓ 'ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ'ର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବା;
- ନିମ୍ନ ପ୍ରକାର ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିପାରିବ :

  (i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ (ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$

  (iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$ (iv) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ (v) $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$
- ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ ଏକ ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା

ମଡ୍ୟୁଲ-V

ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ବୀଜୀୟ ଫଳନ, ପରିମେୟ ଫଳନ ଓ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସମାକଳନ

28.1 ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ସୂଚନାରେ କୁହାଯାଇଥିଲା ଯେ ଭୌତିକ ବିଜ୍ଞାନ, ଜୀବ-ବିଜ୍ଞାନ ଓ ସାମାଜିକ ଶିକ୍ଷା ଆଦିର ବିଭିନ୍ନ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସମସ୍ୟାକୁ ଗାଣିତିକ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କଲାବେଳେ, ଅବକଳଜର ଉପଯୋଗ କରାଯାଇଥାଏ । ଯେଉଁ ସମୀକରଣରେ ଏକ ବା ଏକାଧିକ ଅବକଳଜ ସହଗ, ଯଥା $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ (ବା ଅବକଳ) ଆଦି ସହ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଚଳ ଓ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଥାଏ, ତାକୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । **ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :**

(i) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (iii) $x\,dx + y\,dy = 0$

(iv) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0$ (v) $y = \frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

28.2 ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ଓ ଘାତ

କୋଟି : ଏହା ହେଉଛି ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ବୃହତ୍ତମ ଅବକଳଜର କୋଟି ।

ଘାତ : ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣରୁ ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଭଗ୍ନାଂଶ ଘାତକୁ ଅପସାରଣ କଲାପରେ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ବୃହତ୍ତମ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳଜର ଘାତ ହେଉଛି ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଘାତ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ :

	ଅବକଳ ସମୀକରଣ	କୋଟି	ଘାତ
(i)	$\frac{dy}{dx} = \sin x$	ଏକ	ଏକ
(ii)	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3y^2 = 5x$	ଏକ	ଦୁଇ
(iii)	$\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + t^2\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 = 0$	ଦୁଇ	ଦୁଇ
(iv)	$\frac{d^3v}{dr^3} + \frac{2}{r}\frac{dv}{dr} = 0$	ତିନି	ଏକ
(v)	$\left(\frac{d^3y}{dx^4}\right)^2 + x^3\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5 = \sin x$	ଚାରି	ଦୁଇ

ଉଦାହରଣ 28.1

ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = 0$$

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}=0 \text{ ବା } \frac{d^2y}{dx^2}=-\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}$ ପଦରେ ଥିବା ଘାତ ଭଗ୍ନାଂଶ ଅଟେ । ଏହି ଭଗ୍ନାଂଶ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତକୁ ଅପସାରିତ କରିବା ନିମନ୍ତେ, ଆମେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେବା । ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଇ ପାଇବା

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି 2 ଓ ଘାତ ମଧ୍ୟ 2 ।

ଟୀକା : ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ତଥା ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ସମୀକରଣକୁ କରଣୀ ଓ ଭଗ୍ନାଂଶ ଘାତ ମୁକ୍ତ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

28.3 ରୈଖିକ ଓ ଅଣରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ଯେଉଁ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ସାପେକ୍ଷଚଳ ଓ ଏହାର ସମସ୍ତ ଅବକଳଜ ଏକ-ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ, ଏବଂ ଏଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣନ ସମୀକରଣରେ ନ ଥାଏ, ତାକୁ **ରୈଖିକ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ** । ଯେଉଁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ନୁହେଁ, ତାକୁ **ଅଣରୈଖିକ ଅବକଳଜ ସମୀକରଣ** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ :

$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ ଏବଂ $\cos^2 x\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}+y=0$ ଅବକଳ-ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ ରୈଖିକ ଅବକଳଜ ସମୀକରଣ ଅଟନ୍ତି ।

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{y}{x}=\log x$ ଏକ ଅଣରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ, କାରଣ $\frac{dy}{dx}$ ର ଘାତ ହେଉଛି ଦୁଇ ।

ପୁନଶ୍ଚ, $y\frac{d^2y}{dx^2}-4=x$ ଅଣରୈଖିକ, କାରଣ ଏହି ସମୀକରଣରେ ସାପେକ୍ଷଚଳ y ସହିତ ଏହାର ଅବକଳଜ $\frac{d^2y}{dx^2}$ କୁ ଗୁଣନ କରାଯାଇଛି ।

28.4 ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ

ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାମାନଙ୍କର କୁଳ (family)କୁ ବିଚାର କର (ଚିତ୍ର 28.1 ଦେଖ) ।

ଏହି ସରଳରେଖାକୁଳର ସୂଚକ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

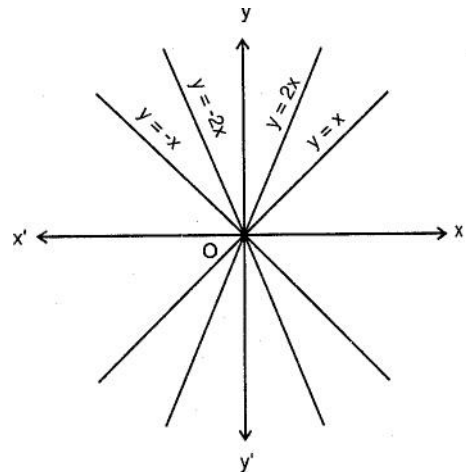
$y = mx$ ... (1)

ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$\frac{dy}{dx} = m$ ... (2)

(1) ଓ (2)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$y = x\frac{dy}{dx}$ ... (3)



ଚିତ୍ର 28.1

ଏଣୁ $y = mx$ ଏବଂ $y = x\frac{dy}{dx}$ ଅଭିନ୍ନ ରେଖାକୁଳକୁ ସୂଚାନ୍ତି ।

ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ, ସମୀକରଣ (3) ହେଉଛି ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ : ଦୁଇଟି ଚଳ, ମନେକର x ଓ y, ଏବଂ ଏକ ବା ଏକାଧିକ ଯେକୌଣସି ଧ୍ରୁବକ ଯଥା a, b, c ସମ୍ବଳିତ ଏକ ସମୀକରଣରୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରିବା ପାଇଁ

(i) ସମୀକରଣରେ ଯେତେ ଗୋଟି ଧ୍ରୁବକ ଥିବ ସମୀକରଣକୁ ସେତେଥର ଅବକଳନ କର ।

(ii) ଏହି ସମୀକରଣମାନଙ୍କରୁ ଧ୍ରୁବକ ଗୁଡ଼ିକୁ ଅପସାରଣ କର ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି ଏକ ସମୀକରଣରେ 3 ଗୋଟି ଧ୍ରୁବକ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ 3 କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 28.2

ନିମ୍ନ ବକ୍ରକୁଳକୁ r ସୂଚାଇବା ପାଇଁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ ବକ୍ରକୁଳ ହେଉଛି $y = ax^2 + bx$ ... (1)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ ... (2)

ପୁନଶ୍ଚ ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$ ... (3)

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$ ... (4)

(ସମୀକରଣ (1)ରେ ଦୁଇଟି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ଅଛି । ଏଣୁ, a ଓ bକୁ ଅପସାରଣ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ଏହି ସମୀକରଣକୁ ଦୁଇଥର ଅବକଳନ କରିବା ।)

aର ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{d^2y}{dx^2} + b$$

$$\Rightarrow b = \frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2} \quad ... (5)$$

(4) ଓ (5)ରେ ପାଇଥିବା a ଓ bର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (1) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$y = x^2\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\right) + x\left(\frac{dy}{dx} - x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

ବା, $y = \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - x^2\frac{d^2y}{dx^2}$

ବା, $y = x\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}$

ବା, $\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 0$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

ଉଦାହରଣ 28.3 ନିମ୍ନ ବକ୍ରକୁଳକୁ ସୂଚାଉଥିବା ଅବକଳ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ ବକ୍ରକୁଳ ହେଉଛି $y = a\cos(x + b)$

ସମାଧାନ : $y = a\cos(x + b)$ ... (1)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବକଳନ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin(x+b) \quad ...(2)$$

ପୁନଶ୍ଚ ଅବକଳନ କଲେ ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos(x+b) \quad ...(3)$$

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \text{ ବା } \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

ଉଦାହରଣ 28.4 କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ, କେନ୍ଦ୍ରର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ (a, 0) । ଯେହେତୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରଦେଇ ଯାଏ, ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ a । ଫଳରେ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଯେଉଁସବୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଆନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$(x-a)^2 + y^2 = a^2$ ... (1)

ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ପାଇବା ପାଇଁ, ଆମେ ସମୀକରଣ (1)ର ଅବକଳନ କରି ପାଉ

$$2(x-a)+2y\frac{dy}{dx}=0$$

ବା, $x-a+y\frac{dy}{dx}=0$

ବା, $a=y\frac{dy}{dx}+x$

aର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (1)ରେ ବସାଇବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଉ

$$\left(x-y\frac{dy}{dx}-x\right)^2+y^2=\left(y\frac{dy}{dx}+x\right)^2$$

ବା, $\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=x^2+\left(y\frac{dy}{dx}\right)^2+2xy\frac{dy}{dx}$

ବା, $y^2=x^2+2xy\frac{dy}{dx}$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି ଗୋଟିଏ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ସମୀକରଣ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣଟି ପ୍ରଥମ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଏ ଏବଂ ଯଦି ଦୁଇଟି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ଗୋଟିଏ ସମୀକରଣର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 28.5

ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଏକ ଗୋଲକ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ବୃଷ୍ଟିଜଳର ବୁନ୍ଦାର ବାଷ୍ପିଭବନର ହାର, ଏହାର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନୁପାତୀ । ତେବେ ଜଳବୁନ୍ଦାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହାର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମକୀରଣ ଗଠନ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ ଯେ t ମିନିଟ୍ ସମୟ ପରେ ଜଳ ବୁନ୍ଦାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $r_{(t)}$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ । ଯେହେତୁ ସମୟ t ବଢ଼ିବା ସହ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କମେ, ତେଣୁ rର ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର ନିଶ୍ଚିତ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।

ଯଦି ଜଳବୁନ୍ଦାର ଆୟତନ S ଓ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ V ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ ପାଇବା –

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ... (1)

ଏବଂ $S=4\pi r^2$ ... (2)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଦତ୍ତ ଅଛି

$$\frac{dV}{dt}\propto S$$

ବା, $\frac{dV}{dt}=-kS$

ବା, $\frac{dV}{dr}\cdot\frac{d\tau}{dt}=-kS$ ... (3)

(1), (2) ଓ (3)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପାଇବା

$$\pi r^2 \frac{dr}{dt} = -4K\pi r^2$$

ବା, $\frac{dr}{dt} = k$

ଏବଂ ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.1

1. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ଓ ଘାତ ଲେଖ :

(a) $\left(\frac{ds}{dt}\right)^4 + 3S\frac{d^2s}{dt^2} = 0$

(b) $2x\frac{dy}{dx} + x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

(c) $\sqrt{1-x^2}\,dx + \sqrt{1-y^2}\,dy = 0$

(d) $\left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2 + 3\left(\frac{ds}{dt}\right)^3 + 4 = 0$

3. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ରୈଖିକ ବା ଅଣରୈଖିକ ଲେଖ :

(a) $(xy^2 - x)dx + (y - x^2y)dy = 0$ (b) $dx + dy = 0$

(c) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (d) $\frac{dy}{dx} + \sin^2 y = 0$

4. a ଓ bର ଅପସାରଣ କରି $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

5. (a) $y^2 = m(a^2 - x^2)$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(b) $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ଯେଉଁଠି a ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

(c) ବକ୍ରକୁଳ $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$ର ଅବକଳ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି A ଓ B ହେଉଛନ୍ତି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

(d) (3, 2) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିବା ସମସ୍ତ ସରଳରେଖାର ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଲେଖ ।

(e) ଯେଉଁ ବୃତ୍ତମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ର y-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁଦେଇ ଗତି କରନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କର ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଲେଖ ।

28.5 ସାଧାରଣ ଓ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ

ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଏକ ପ୍ରତିଲୋମ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅଟେ । ଏଠାରେ ଆମେ ଏକ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହୁଁ ଯାହାର ଅବକଳନ କରିବାଦ୍ୱାରା ଓ ତହିଁରେ ଥିବା ଧ୍ରୁବକଗୁଡ଼ିକର ଅପସାରଣ କରିବାଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ମିଳିଥାଏ । ପ୍ରାପ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ଆଦ୍ୟ ସମୀକରଣ ବା ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ :

(1) ଆମେ ଆଦ୍ୟ ସମୀକରଣର ଅବକଳନ କଲେ, ଅବକଳ ସମୀକରଣ ପାଉ ଏବଂ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାକଳନ କଲେ, ଆଦ୍ୟ ସମୀକରଣ ପାଉ ।

(2) ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହେଉଛି ତାହା, ଯାହା ଅବକଳ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ଉଦାହରଣ 28.6 ଦର୍ଶାଅ ଯେ C_1 ଓ C_2 ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ହେଲେ, $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ ହେଉଛି ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ର ଏକ ସମାଧାନ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \cos x - C_2 \sin x$$

ପୁନଶ୍ଚ ଅବକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ଓ yର ମାନକୁ ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + (-C_1 \sin x - C_2 \cos x)$$

ବା, $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

ସମାକଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକମାନଙ୍କ ସ୍ଥିତି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ । ଧ୍ରୁବକଗୁଡ଼ିକର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମାନ ପାଇଁ ଆମେ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଲାଗି ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସମାଧାନ ପାଇବା ।

ଯେଉଁ ସମାଧାନରେ ଥିବା ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ସଂଖ୍ୟା ସମାନ, ସେପରି ସମାଧାନକୁ **ସାଧାରଣ ସମାଧାନ** ବା ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଆଦ୍ୟ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଆମେ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ଥିବା ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସମାଧାନ ଲାଗି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ନେଲେ, ଯେଉଁ ସମାଧାନ ମିଳେ, ତାକୁ **ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ** କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଯେତେ, ଏହାର ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ସେତେ ।

ଉଦାହରଣ 28.7 ଦର୍ଶାଅ ଯେ $y = cx + \frac{a}{c}$ (ଯେଉଁଠି c ଏବଂ ଧ୍ରୁବକ) ହେଉଛି ଅବକଳ ସମୀକରଣ $y = x\frac{dy}{dx} + a\frac{dx}{dy}$ ର ଏକ ସମାଧାନ ।

ସମାଧାନ : ଆମ ପାଖରେ ଅଛି $y = cx + \frac{a}{c}$ ... (1)

(1)ର ଅବକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଉ

$$\frac{dy}{dx} = c \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{c}$$

ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଡାହାଣ ପାଖରେ $\frac{dy}{dx}$ ଓ $\frac{dx}{dy}$ ର ମାନ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$$x(c) + a\left(\frac{1}{c}\right) = cx + \frac{a}{c} = y$$

$\Rightarrow$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଡାହାଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $y = cx + \frac{a}{c}$ ହେଉଛି ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଏକ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.8 ଯଦି ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{dy}{dx} - 6x = 0$ ର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ହୁଏ $y = 3x^2 + C$, ତେବେ $y = 3$, $x = 2$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ହେଉଛି

$y = 3x^2 + C$ ... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମୀକରଣରେ $y = 3$ ଓ $x = 2$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$3 = 12 + C$ ବା $C = -9$

ସାଧାରଣ ସମାଧାନ (1)ରେ Cର ମାନ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y = 3x^2 - 9$

ଏବଂ ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ।

28.6 ଗୋଟିଏ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବାର କୌଶଳ

28.6.1 ଯେତେବେଳେ ଚଳଗୁଡ଼ିକୁ ପୃଥକ କରିବା ସମ୍ଭବ

(i) $\frac{dy}{dx} = f(x)$ **ଭଳି ଅବକଳ ସମୀକରଣ**

$\frac{dy}{dx} = f(x)$ ଅଥବା $dy = f(x)\,dx$ ଭଳି ଅବକଳ ସମୀକରଣ କଥା ବିଚାରକର । ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

$$y = \int (x)\,dx + C$$

ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ । ଏହା ହେଉଛି ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ।

ଟୀକା : ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ଲେଖିବା ବେଳେ c ଲେଖିବା ଆବଶ୍ୟକ, ନଚେତ୍ ସମାଧାନଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ହୋଇଯିବ ।

ଉଦାହରଣ 28.9 ସମାଧାନ କର : $(x+2)\frac{dy}{dx}=x^2+4x-5$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି, $(x+2)\frac{dy}{dx}=x^2+4x-5$

ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+4x-5}{x+2}$ ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+4x+4-4-5}{x+2}$

ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+2)^2}{x+2}-\frac{9}{x+2}$ ବା, $\frac{dy}{dx}=x+2-\frac{9}{x+2}$

ବା, $dy=\left(x+2-\frac{9}{x+2}\right)dx$ ... (1)

(1) ର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$\int dy=\int\left(x+2-\frac{9}{x+2}\right)dx$ ବା, $y=\frac{x^2}{2}+2x-9\log|x+2|+c,$

ହେଉଛି ଏକ ସାଧାରଣ ସମାଧାନ, ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ଉଦାହରଣ 28.10

ସମାଧାନ କର $\frac{dy}{dx}=2x^3-x$:

ଦତ୍ତ ଅଛି, $y = 1$ ଯେତେବେଳେ $x = 0$,

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{dy}{dx}=2x^3-x$

ବା, $dy=(2x^3-x)dx$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$\int dy=\int(2x^3-x)\,dx$ ବା, $y=2\cdot\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+c$

ବା, $y=\frac{x^4}{2}-\frac{x^2}{2}+c$ ... (2)

ଯେଉଁଠି c ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ଯେହେତୁ ଯେତେବେଳେ $x = 0, y = 1$, ଏହାକୁ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$1=0-0+c \Rightarrow c=1$

ବର୍ତ୍ତମାନ Cର ମାନକୁ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y=\frac{1}{2}(x^4-x^2)+1$ ବା, $y=\frac{1}{2}x^2(x^2-1)+1$ ଯାହାକି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ।

(ii) $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$ ପ୍ରକାରର ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ବର୍ତ୍ତମାନ ସେହିପ୍ରକାର ଅବକଳ ସମୀକରଣ କଥା ବିଚାର କର, ଯାହାକି $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$

ବା $\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \quad \ldots (1)$

ସମୀକରଣ (1)ରେ x ଓ yକୁ ପରସ୍ପରଠାରୁ ଅଲଗା କରାଯାଇଛି । ଏଣୁ ଏହି ସମୀକରଣକୁ, ଚଳ ଦ୍ୱୟକୁ ପୃଥକ କରିହେବା ଭଳି ଅବକଳ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଏପରି ଅବକଳ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରୁ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ପାଖରେ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ଯୋଗକରୁ ।

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଦର୍ଶାଇବା ପାଇଁ, ଆସ କେତୋଟି ଉଦାହରଣ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 28.11

ସମାଧାନ କର : $(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(1+x^2)dy = (1+y^2)dx$

ଏହାକୁ ଲେଖାଯାଇ ପାରେ $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots (1)$

(1)ର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$ ବା, $\tan^{-1}y = \tan^{-1}x + c$

ଯେଉଁଠି c ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ । ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.12

ସମାଧାନ କର : $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

$(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ କୁ

ଲେଖାଯାଇପାରେ, $x^2(1-y)\frac{dy}{dx} + y^2(1+x) = 0$

ବା, $\frac{1-y}{y^2}dy = \frac{-(1+x)}{x^2}dx \quad \ldots (1)$

(ଚଳ ଦ୍ୱୟକୁ ପୃଥକ କରାଗଲା) (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$\int\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = \int\left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)dx$$

ବା, $-\frac{1}{y}-\log|y|=\frac{1}{x}-\log|x|+c$ (ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ)

ବା, $\log\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+c$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.13

ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}$ ଯେତେବେଳେ $y(0) = 3$ (ଅର୍ଥାତ୍ ଯେତେବେଳେ $x = 0, y = 3$)

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+1}$ ବା $(3y^2+1)dy = 2x\,dx$ (ଚଳଦ୍ୱୟକୁ ପୃଥକ କରାଗଲା) ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କଲେ, ପାଇବା

$\int(3y^2+1)\,dy=\int 2x\,dx$ ବା, $y^3 + y = x^2 + c$ ... (2) (ଯେଉଁଠି c ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ)

ଦତ୍ତ ଅଛି, $y(0) = 3$

$\therefore$ (2)ରେ $y = 3$ ଓ $x = 0$ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$27 + 3 = c \therefore c = 30$

ଏଣୁ, ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ହେଉଛି $y^3 + y = x^2 + 30$

28.6.2 ସଜାତୀୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର :

(i) $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ (ii) $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

(iii) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+xy^2}{y^2x}$

ଉପରିସ୍ଥ ସମୀକରଣ (i)ରେ, $\frac{dy}{dx}$ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ଘାତ 2 ।

[$\because$ y^2 ର ଘାତ 2, x^2 ର ଘାତ 2 ଏବଂ xyର ଘାତ = 1 + 1 = 2]

ସମୀକରଣ (ii) ରେ $\frac{dy}{dx}$ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ଘାତ 3 ।

ସମୀକରଣ (iii) ରେ $\frac{dy}{dx}$ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ଘାତ 3, କାରଣ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ

$y^2x\frac{dy}{dx}=x^3+xy^2$

ଏଭଳି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ **ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ** କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣରେ ଧ୍ରୁବକ ପଦ ନ ଥାଏ ।

$(x^2 + 3yx)dx - (x^3+x)dy = 0$ ଏକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ ନୁହେଁ, କାରଣ $\frac{dy}{dx}$ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦର ଘାତ ସମାନ ନୁହେଁ । [x^2ର ଘାତ 2, 3xyର ଘାତ 2, x^3 ର ଘାତ 3 ଓ xର ଘାତ 1]

28.6.3 ସଜାତୀୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ

ଏପରି ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ, ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଅଗ୍ରସର ହେଉ :

(i) ଲେଖ, ଗୋଟିଏ ଚଳ = v. (ଅନ୍ୟ ଚଳ)
(ଅର୍ଥାତ୍ y = v.x ବା x = vy) ।

(ii) ସମୀକରଣକୁ ପୃଥକ ହେବାଭଳି ରୂପରେ ପରିଣତ କର ।

(iii) ସମୀକରଣକୁ ପୂର୍ବଭଳି ସମାଧାନ କର ।

ଉଦାହରଣ 28.14

ସମାଧାନ କର : $(x^2+3xy+y^2)dx - x^2dy = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(x^2+3xy+y^2)dx - x^2dy = 0$

ବା, $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{x^2}$ ... (1)

ଏହା 2 ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସଜାତୀୟ ସମୀକରଣ [କାହିଁକି ?]

ମନେକରାଯାଉ y = v.x

ତା' ହେଲେ $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ (1)ରୁ ପାଇବା

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{x^2 + 3x \cdot vx + (vx)^2}{x^2}$ ବା, $v + \frac{dv}{dx} = x^2\left[\frac{1+3v+v^2}{x^2}\right]$

ବା, $v + x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2$ ବା, $x\frac{dv}{dx} = 1 + 3v + v^2 - v$

ବା, $x\frac{dv}{dx} = v^2 + 2v + 1$ ବା, $\frac{dv}{v^2 + 2v + 1} = \frac{dx}{x}$

ବା, $\frac{dv}{(v+1)^2} = \frac{dx}{x}$ ... (2)

(2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$\frac{-1}{v+1} + C = \log|x|$, ଯେଉଁଠି C ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ଏଥିରେ v ର ମାନ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\frac{x}{y+x}+\log|x|=C$ । ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମୀକରଣ ।

28.6.4 $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ, ଯେଉଁଠି P ଓ Q ପ୍ରତ୍ୟେକ xର ଫଳନ

ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର, ଯେଉଁଠି P ଓ Q xର ଫଳନ ।

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \quad ... (1)$$

ଏହା ହେଉଛି ଏକ-କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ।

ସମୀକରଣ (1)କୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ $e^{\int P dx}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବା ($e^{\int P dx}$ କୁ ସମାକଳ ଗୁଣକ କୁହାଯାଏ,)

ଆମେ ପାଇବା, $e^{\int P dx}\frac{dy}{dx}+Pye^{\int P dx}=Qe^{\int P dx}$

ବା, $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)=Qe^{\int P dx} \quad ... (2)$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)=e^{\int P dx}\frac{dy}{dx}+Py\cdot e^{\int P dx}\right]$$

ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$ye^{\int P dx}=Qe^{\int P dx}+c \quad ... (3)$$

ଯେଉଁଠ C ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y=e^{-\int P dx}\left[\int Qe^{\int P dx}+c\right]$

ଟୀକା ୧

$e^{\int P dx}$ କୁ ସମୀକରଣର ସମାକଳ ଗୁଣକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ I.F. ଲେଖାଯାଏ ।

ଟୀକା

(i) ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣକୁ $e^{\int P dx}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରିବା ଯୋଗୁ, ପଦଟି ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସମୀକରଣ(1)ର ବାମ ପାଖ $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int P dx}\right)$ ହୋଇଯାଏ ।

(ii) P ଓ Q ପ୍ରତ୍ୟେକ xର ଫଳନ ହେବାବେଳେ, ରୈଖିକ ଅବକଳନ ସମୀକରଣ $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ ର ସମାଧାନ ହୁଏ, $ye^{\int P dx}=\int Q\left(e^{\int P dx}\right)dx+c$ ।

(iii) ଯଦି $\frac{dy}{dx}$ ର ସହଗ 1 ହୋଇ ନ ଥାଏ, ତେବେ ସମଗ୍ର ସମୀକରଣକୁ ଏହାଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି, ସହଗକୁ 1 କରିଦେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(iv) କେତେକ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ଥିବା yକୁ ନିରପେକ୍ଷ ଚଳ ଓ xକୁ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ ରୂପେ ଧରି ନେବା ଦ୍ୱାରା, ଅବକଳ ସମୀକରଣଟି ରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ପରିଣତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, P ଓ Q ପ୍ରତ୍ୟେକ y ର ଫଳନ ହୋଇଥିବା ବେଳେ, $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ ମଧ୍ୟ ଏକ-କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ରୈଖିକ ସମୀକରଣ ହୁଏ । ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ $I.F. = e^{\int P dy}$ ଏବଂ ଏହି ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହୁଏ $x(I.F.) = \int Q(I.F.)\,dy + c$

ଉଦାହରଣ 28.15 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{-x}$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $P = \frac{1}{x}$, $Q = e^{-x}$ (ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ P ଓ Q ଉଭୟ xର ଫଳନ)

I.F. (ସମାକଳ ଗୁଣକ) $e^{\int P dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\log x} = x\,(x > 0)$ ।

ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ I.F.କୁ ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = x \cdot e^{-x}$ ବା $\frac{d}{dx}(y \cdot x) = xe^{-x}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କଲେ, ପାଇବା

$yx = \int x e^{-x}\,dx + c$

ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $xy = -xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx + c$

ବା, $xy = -xe^{-x} - e^{-x} + c$

ବା, $xy = -e^{-x}(x+1) + c$

ବା, $y = -\left(\frac{x+1}{x}\right)e^{-x} + \frac{c}{x}$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : ସମାଧାନରେ $x > 0$

ଉଦାହରଣ 28.16 ସମାଧାନ କର : $\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 2\sin^2 x \cos x$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\sin x \frac{dy}{dx} + y \cos x = 2\sin^2 x \cos x$$

ବା, $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \sin x \cos x$ ... (1)

ଏଠାରେ $P = \cot x$, $Q = 2 \sin x \cos x$

$I.F. = e^{\int P dx} = e^{\int \cot x\, dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ I.F. ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{d}{dx}(y\sin x) = 2\sin^2 x\cos x$$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$y\sin x = \int 2\sin^2 x\cos \ dx + c$$

ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y\sin x = \frac{2}{3}\sin^3 x + c$ ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.17

ସମାଧାନ କର : $(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$$

ବା, $\frac{dx}{dy} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2} - \frac{x}{1+y^2}$

ବା, $\frac{dx}{dy} + \frac{x}{1+y^2} = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}$

ଯାହା ହେଉଛି $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ, ଯେଉଁଠି P ଓ Q ପ୍ରତ୍ୟେକ ହେଉଛି y ର ଫଳନ ।

$$I.F. = e^{\int P dy} = e^{\int \frac{1}{1+y^2} dy} = e^{\tan^{-1} y}$$

ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ I.F. ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d}{dy}(x e^{\tan^{-1} y}) = \frac{\tan^{-1} y}{1+y^2}(e^{\tan^{-1} y})$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$(e^{\tan^{-1} y})x = \int e^t \cdot t\, dt + c$$

ଯେଉଁଠି c ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ଏବଂ $t = \tan^{-1}y$ ଏବଂ dt $\frac{1}{1+y^2}$ dy

ବା, $(e^{\tan^{-1} y})x = t e^t - \int e^t + c$

ବା, $(e^{\tan^{-1} y})x = t e^t - e^t + c$

ବା, $(e^{\tan^{-1}y})x = \tan^{-1} y\, e^{\tan^{-1}y} + c$ ($t = \tan^{-1}y$ ବସାଇବା ଦ୍ୱାରା)

ବା, $x = \tan^{-1} t - 1 + c\, e^{-\tan^{-1}y}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.2

1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ସମୀକରଣର $y = \sin x$ ଏକ ସମାଧାନ କି ?

(ii) $x\frac{dy}{dx} - 4y = 0$ ଅବକଳ ସମୀକରଣର $y = x^3$ ଏକ ସମାଧାନ କି ?

2. ନିମ୍ନରେ $\frac{dy}{dx} = 3x$ ସମୀକରଣର କେତେକ ସମାଧାନ ଦିଆଯାଇଛି । ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ଓ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) $2y = 3x^2$ (ii) $y = \frac{3}{2}x^2 + 2$

(iii) $2y = 3x^2 + c$ (iv) $y = \frac{3}{2}x^2 + 3$

3. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ସଜାତୀୟ ବା ନୁହେଁ କୁହ ।

(i) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1+y^2}$ (ii) $(3xy+y^2)dx + (x^2+xy)dy = 0$

(iii) $(x+2)\frac{dy}{dx} = x^2 + 4x - 9$ (iv) $(x^3-yx^2)dy + (y^3+x^3)dx = 0$

4. (a) ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ $y = a \sin 2x$ ହେଉଛି $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ ସମୀକରଣର ଏକ ସମାଧାନ ।

(b) ସମୀକରଣ $\frac{d^3y}{dx^3} = 6$ ର ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ହେଉଛି $y = x^3 + ax^2 + C$, ଏହି ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

5. ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$ ର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ହେଉଛି $y = \tan x + c$ ।

ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ

(a) $x = \frac{\pi}{4}, y = 1$ (b) $x = \frac{2\pi}{3}, y = 0$

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $\frac{dy}{dx} = x^5 \tan^{-1}(x^3)$ (b) $\frac{dy}{dx} = \sin^3 x \cos^2 x + x e^x$

(c) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = x$ (d) $\frac{dy}{dx} = x^2 + \sin 3x$

7. ସମୀକରଣ $e^x \frac{dy}{dx} = 4$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଦତ୍ତ ଅଛି, ଯେତେବେଳେ $x = 0, y = 3$ ।

8. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $(x^2 - yx^2)\frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$ (b) $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$

(c) $\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0$ (d) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + e^{-y}x^2$

9. ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\log \frac{dy}{dx} = 3x + 4y$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଦତ୍ତ ଅଛି $x = 0$ ବେଳେ $y = 0$ ।

10. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $(x^2+y^2)dx - 2xy\, dy = 0$ (b) $x\frac{dy}{dx} + \frac{y^2}{x} = y$

(c) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} + y}{x}$ (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right)$

11. ସମାଧାନ କର : $\frac{dy}{dx} + y \sec x = \tan x$

12. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର ।

(a) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} + y = \tan - x$ (b) $\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$

(c) $x \log x \frac{dy}{dx} + y = 2 \log x, x > 1$

13. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $(x + y + 1)\frac{dy}{dx} = 1$

[ସୂଚନା : $\frac{dy}{dx} = x + y + 1$ ବା $\frac{dx}{dy} - x = y + 1$ ଯାହାକି $\frac{dx}{dy} + Px = Q$ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ]

(b) $(x + 2y^2)\frac{dy}{dx} = y, y > 0$ [ସୂଚନା : $y\frac{dx}{dy} = x + 2y^2$ ବା, $\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y} = 2y$]

28.7 ଉଚ୍ଚତର କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

ଏପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ ପ୍ରଥମ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଚର୍ଚ୍ଚା କରୁଥିଲୁ । ଏହି ପାଠରେ ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଟି ଓ ତୃତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

28.7.1 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ ଅବକଳ ସମୀକରଣକୁ ବିଚାର କର ।

ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ଉକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣଟି ଏକ ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ । ଏଣୁ ଏହାର ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ଦୁଇଟି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ରହିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମ ପାଖରେ ଅଛି $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$

ବା, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(x)$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$\frac{dy}{dx}=\int f(x)\,dx+c_1$ ଯେଉଁଠି c_1 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ । ମନେକରାଯାଉ $\int f(x)\,dx=\phi(x)$

ତତ୍ପରେ, $\frac{dy}{dx}=\phi(x)+c_1$ ... (2)

ପୁନଶ୍ଚ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$y=\int \phi(x)\,dx+c_1x+c_2$

ଯେଉଁଠି c_2 ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ । ଏଣୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଦୁଇଟି ସର୍ତ୍ତର ଆବଶ୍ୟକତା ପଡେ । [ଉଦାହରଣ 28.19ଦେଖ]

ଉଦାହରଣ 28.18

ସମାଧାନ କର : $\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x$

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{d^2y}{dx^2}=xe^x$ ... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$\frac{dy}{dx}=\int x\,e^x dx+c_1$

ଯେଉଁଠି c_1 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\frac{dy}{dx}=xe^x-\int e^x dx+c_1$

ବା, $\frac{dy}{dx}=xe^x-e^x+c_1$ ... (2)

ପୁନଶ୍ଚ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$y = \int (xe^x - e^x + c_1)\,dx + c_2$ ଯେଉଁଠି c_2 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y = xe^x - \int e^x\,dx - e^x + c_1x + c_2$

ବା, $y = xe^x - 2e^x + c_1x + c_2$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସାଧାରଣ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.19

ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 + \sin 3x$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

ଯେଉଁଥିପାଇଁ $y(0) = 0$ ଏବଂ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ଯେତେବେଳେ $x = 0$ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 + \sin 3x$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$\dfrac{dy}{dx} = \int (x^2 + \sin 3x)\,dx + C_1$

ଯେଉଁଠି c_1 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{\cos 3x}{3} + C_1$ ... (2)

ବା, $dy = \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{\cos 3x}{3} + C_1\right)dx$

ପୁନଶ୍ଚ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$y = \int \left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{\cos 3x}{3} + C_1\right)dx + C_2$

ଯେଉଁଠି C_2 ହେଉଛି ଅନ୍ୟ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{1}{9}\sin 3x + C_1x + C_2$ ... (3)

ବର୍ତ୍ତମାନ (3)ରେ $x = 0, y = 0$ ବସାଇଲେ, ପାଇବା $0 = C_2$

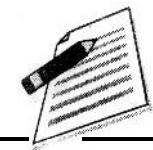
ପୁନଶ୍ଚ (2)ରେ $x = 0, \dfrac{dy}{dx} = 0$ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$0 = -\dfrac{1}{3} + C_1$ ବା $C_1 = \dfrac{1}{3}$

C_1 ଓ C_2ର ମାନକୁ (3)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y = \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{1}{9}\sin 3x + \dfrac{x}{3}$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ।



28.7.2 $\frac{d^3y}{dx^3} = f(x)$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ

$\frac{d^3y}{dx^3} = f(x)$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

ଏହା ହେଉଛି ତୃତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ । ଏହାର ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ତିନୋଟି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ରହିବ । ଏହାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ପାଇବା ପାଇଁ, ତିନୋଟି ସର୍ତ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ । [ଉଦାହରଣ 28.21 ଦେଖ]

$\frac{d^3y}{dx^3} = f(x)$ ରୂପକ ତୃତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ, ସମୀକରଣକୁ ତିନିଥର ସମାକଳନ କର ।

ଉଦାହରଣ 28.20 ସମାଧାନ କର : $\frac{d^3y}{dx^3} = x^4$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{d^3y}{dx^3} = x^4$

ବା, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = x^4 \quad \ldots (1)$

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^5}{5} + C_1$$

ଯେଉଁଠି C_1 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x^5}{5} + C_1 \quad \ldots (2)$

ପୁନଶ୍ଚ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^6}{30} + C_1x + C_2 \quad \ldots (3)$$

ଯେଉଁଠି C_2 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

(3)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$y = \frac{x^7}{7(30)} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

ଯେଉଁଠି C_3 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y = \frac{x^7}{210} + \frac{C_1x^2}{2} + C_2x + C_3$

ଉଦାହରଣ 28.21 ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଥିପାଇଁ $x = 0$ ବେଳେ, $y = 1, \frac{dy}{dx} = 2$ ।

ସମାଧାନ : $x = 1$ ବେଳେ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$\frac{d^3y}{dx^3} = xe^x \quad ... (1)$$

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int xe^x dx + C_1$$

ଯେଉଁଠି C_1 ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - \int e^x dx + C_2$

ବା, $\frac{d^2y}{dx^2} = xe^x - e^x + C_1 \quad ... (2)$

ପୁନଶ୍ଚ (2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \int (xe^x - e^x + C_1) dx + C_2$$

ଯେଉଁଠି C_2 ହେଉଛି ଅନ୍ୟ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\frac{dy}{dx} = xe^x - \int e^x dx - e^x + C_1x + C_2$

ବା, $\frac{dy}{dx} = xe^x - 2e^x + C_1x + C_2 \quad ... (3)$

ପୁନଶ୍ଚ (3)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରିବା ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$y = xe^x - e^x - 2e^x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

ଯେଉଁଠି C_3 ମଧ୍ୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y = xe^x - 3e^x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3 \quad ... (4)$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମ ପାଖରେ ଅଛି $x = 0$ ହେବାବେଳେ $y = 1, \frac{dy}{dx} = 2$

ଏବଂ $x = 1$ ହେବାବେଳେ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

ସମୀକରଣ (2)ରେ $\frac{d^2y}{dx^2} = 0, x = 1$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$0 = e^1 - e^1 + C_1$

$\therefore C_1 = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (3)ରେ $x = 0, \frac{dy}{dx} = 2$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$2 = 0 - 2e^0 + C_1 \cdot 0 + C_2$

$\Rightarrow 2 = -2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 4$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (4)ରେ $x = 0, y = 1$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$1 = 0 - 3\cdot e^0 + C_1\cdot 0 + C_2\cdot 0 + C_3$

$\therefore C_3 = 4$

ପୁନଶ୍ଚ C_1, C_2 ଓ C_3ର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (4)ରେ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$y = xe^x - 3e^x + 4x + 4$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.3

1. ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଦତ୍ତ ଅଛି $x = \frac{\pi}{2}$ ହେଲେ $\frac{dy}{dx} = 0$, $x = 0$ ହେଲେ, $y = 0$ ।

2. ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{d^3y}{dx^3} = x + \sin x$ ର ସମାଧାନ କର, ଦତ୍ତ ଅଛି $x = 0$ ହେଲେ, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = -1, \frac{d^2y}{dx^2} = 2$ ।

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} = x\sin x$ (b) $(1-\cos 2x)\frac{d^2y}{dx^2} = 1+\cos 2x$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin^2 x$ (d) $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x - \sin x$

4. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $x\frac{d^2y}{dx^2} = 1$, ଦତ୍ତ ଅଛି $x = 1$ ବେଳେ $y = 1, \frac{dy}{dx} = 0$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 1 + \sin x$, ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$, $y = 3$ ବେଳେ $x = 1$ ଏବଂ $y = 1$ ବେଳେ $x = -1$

5. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $\frac{d^3y}{dx^3} = x^2 + e^x$ (b) $\frac{d^3y}{dx^3} = e^x + \cos x$ (c) $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$

28.8 ଅବକଳ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ

ଏଠାରେ, ଭୌତିକ ବିଜ୍ଞାନ, ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ର, ଜୀବବିଜ୍ଞାନ ଓ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ।

28.8.1 ବେଗ ଓ ତ୍ୱରଣ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମସ୍ୟା

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେକୌଣସି ସମୟରେ ଏକ ବସ୍ତୁର ବେଗ 'V' ଓ ତ୍ୱରଣ 'a'କୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ବେଗ = ବିସ୍ଥାପନ ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର

$\therefore v = \frac{d}{dt}(s)$ ଯେଉଁଠି s ହେଉଛି ବିସ୍ଥାପନ ।

ଏବଂ ତ୍ୱରଣ = ବେଗର ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର

$\therefore a = \frac{d}{dt}(v)$

$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(s)\right)$

$= \frac{d^2}{dt^2}(s)$

ଉଦାହରଣ 28.12

44.1 ମି. ଉଚ୍ଚ ଏକ ଦୁର୍ଗ ଉପରୁ ପଥର ଖଣ୍ଡେ ପକାଇ ଦିଆଗଲା । ଯେକୌଣସି ସମୟରେ ବେଗ $v = 9.8\,t$ ମି./ସେକେଣ୍ଡ v, ଯଦି ଦତ୍ତ ଥାଏ ଯେ ଏକ ସେକେଣ୍ଡ ପରେ ଦୂରତା ହେବ 4.9 ମି. ତେବେ

(i) $t = 2$ ସେକେଣ୍ଡ ବେଳେ ପଥର ଖଣ୍ଡିକର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର;

(ii) ପଥର ଖଣ୍ଡିକ କେତେ ସମୟ ପରେ ଭୂପୃଷ୍ଠ ଉପରେ ପଡିବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $v = 9.8t$

$\therefore \frac{d}{dt}(s) = 9.8\,t$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$\int ds = \int 9.8t\,dt$

ବା, $s = 4.9\,t^2 + C$ ... (1)

ଯେଉଁଠି C ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ଯେତେବେଳେ $t = 1$, $s = 4.9$ । ଏହି ସର୍ତ୍ତ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା

$C = 0$

Cର ଏହି ମାନକୁ (1)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$s = 4.9\,t^2$... (2)

(2)ରେ $t = 2$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$s = 4.9 \times 2^2$ ବା $\Sigma = 19.6$ m

ଏଣୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ 2 ସେକେଣ୍ଡରେ ପଥର ଖଣ୍ଡର ଦୂରତା 19.6ମି. ।

(ii) ଯେତେବେଳେ ପଥର ଖଣ୍ଡିକ ଭୂପୃଷ୍ଠରେ ପଡ଼ିବ, ସେତେବେଳେ ଦୂରତା ହେବ 44.1 ମି. । ଅର୍ଥାତ୍ $s = 44.1$,

(2)ରେ $s = 44.1$ ବସାଇଲେ, ଫଳାଫଳ ହେବ $44.1 = 4.9t^2$

ବା, $t^2 = \frac{44.1}{4.9}$ ବା, $t^2 = 9$ ବା, $t = S$

ଏଣୁ 3 ସେକେଣ୍ଡ ପରେ ପଥର ଖଣ୍ଡକ ଭୂପୃଷ୍ଠ ଉପରେ ପଡିବ ।

28.8.2 ଜନସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧି ସମସ୍ୟା

ଜନସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧିର ହାର, ଜନସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନୁପାତୀ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ବାକ୍‌ଟେରିଆମାନଙ୍କର ବୃଦ୍ଧି ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନୁପାତୀ, ଅର୍ଥାତ୍ ବୃଦ୍ଧିହାର $\frac{dx}{dt}$ x ସର୍ବଦା ସହ ସମାନୁପାତରେ ହୋଇଥାଏ । ଯେଉଁଠି $x = x(t)$ ଦ୍ୱାରା t ସମୟରେ ବାକ୍‌ଟେରିଆମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସୂଚିତ ହୁଏ । ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{dx}{dt} = kx$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ଯେଉଁଠି k ହେଉଛି ସମାନୁପାତର ଧ୍ରୁବକ ଓ ଏହା ଧନାତ୍ମକ ।

ଉଦାହରଣ 28.23

ଏକ ପରୀକ୍ଷାରୁ ଜଣାଗଲା ଯେ ବାକ୍‌ଟେରିଆମାନଙ୍କର ବୃଦ୍ଧିର ହାର, ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନୁପାତୀ ।

(a) ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା 4 ଘଣ୍ଟାରେ ଦୁଇଗୁଣ ହେଉଥାଏ, ତେବେ 12 ଘଣ୍ଟା ପରେ ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ଗୁଣ ହେବ ବୋଲି ଆଶା କରାଯାଏ ?

(b) ଯଦି 3 ଘଣ୍ଟାପରେ ତାଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ 10^4 ଓ 5 ଘଣ୍ଟାପରେ ତାଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ 4×10^4, ତେବେ ଆରମ୍ଭରେ ତାଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ଥିଲା ?

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ t ଘଣ୍ଟା ସମୟରେ ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ହେଉ x । ତେବେ $\frac{dx}{dt} = kx$ ଯେଉଁଠି k ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\frac{dx}{x} = k\,dt$ ... (1)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ପାଇବା

$\int \frac{dx}{x} = \int k\,dt + \log C$ ଯେଉଁଠି C ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\log x = kt + \log C$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ x ଧନାତ୍ମକ

ବା $\log\frac{x}{C} = kt$ ବା $\frac{x}{C} = e^{kt}$ ବା $x = C\,e^{kt}$... (2)

ଧରିନିଆଯାଉ $x_0 = C$ $t = 0$ ବେଳେ $x = x_0$, ତେବେ ପାଇବା

ଏହି ମାନକୁ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$x = x_0\,e^{kt}$... (3)

(a) ଏହା ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $t = 4$ ବେଳେ $x = 2x_0$ । ଏହାକୁ (3) ରେ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$2x_0 = x_0 e^{4k}$ ବା $e^{4k} = 2$

ଯେତେବେଳେ $t = 12$

$x = x_0 e^{12k}$ ବା, $x = x_0(e^{4k})^3$

ବା, $x = x_0(2)^3$ ବା, $x = 8x_0$

ଏଣୁ 12 ଘଣ୍ଟାପରେ, ବାକ୍‌ଟେରିଆ ସଂଖ୍ୟା ସେମାନଙ୍କର ମୂଳ ସଂଖ୍ୟାର 8 ଗୁଣ ହେବ ।

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $t = 3$ ବେଳେ $x = 10^4$, $t = 5$ ବେଳେ $x = 4 \times 10^4$

ଏହି ମାନକୁ (2) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$10^4 = Ce^{3k}$ ... (4)

ଏବଂ $4 \times 10^4 = Ce^{5k}$ ... (5)

(4) ଓ (5)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$4 \times Ce^{3k} = Ce^{5K}$ ବା, $4 = e^{2k}$

ବା, $\log 4 = 2k$ ବା, $k = \frac{1}{2}\log 4$ ବା, $k = \log\sqrt{4} = \log 2$

ସମୀକରଣ (4)ରେ kର ମାନ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$10^4 = Ce^{3\log 2}$ ବା $10^4 = Ce^{\log 2^3}$

ବା, $10^4 = Ce^{\log 8}$ ବା, $10^4 = 8C$ ବା, $\frac{10^4}{8} = C$

C ଓ kର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$x = \frac{10^4}{8} e^{t(\log 2)}$ ... (6)

ସମୀକରଣ (6)ରେ $t = 0$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ଆରମ୍ଭରେ ଥିବା ବାକ୍‌ଟେରିଆ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବା ।

$\therefore x = \frac{10^4}{8} \times e^0$ ବା, $x = \frac{10^4 \times 1}{8}$

ବା, $x = \frac{25 \times 10^2}{2}$ ବା, $x = 25 \times 50 = 1250$

28.8.3 ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ ଶୀତଳ ହେବାର ନିୟମ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ସମସ୍ୟା

ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ ଶୀତଳ ହେବାର ନିୟମ ହେଉଛି, ଯେଉଁ ହାରରେ ଏକ ଶୀତଳ ହେଉଥିବା ବସ୍ତୁର ତାପମାତ୍ରା $T = T(t)$ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ, ତାହା ବସ୍ତୁର ସେହି ମୁହୂର୍ତ୍ତର ତାପମାତ୍ରା T ଏବଂ ପରିବେଶରେ ସ୍ଥିର ଥିବା ତାପମାତ୍ରା T_0ର ଅନ୍ତର ସହ ସମାନୁପାତୀ । ଅର୍ଥାତ୍

$\frac{dT}{dt}=-k\,(T-T_0)$ ଯେଉଁଠି $k>0$ । ରଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ସୂଚାଏ ଯେ ଯଦି $T>T_0, \frac{dT}{dt}$ ରଣାତ୍ମକ, ତେବେ ସମୟ ଆଗେଇବା ସହ ତାପମାତ୍ରା ହ୍ରାସ ପାଏ ।

ଉଦାହରଣ 28.24

ବାୟୁମଣ୍ଡଳର ତାପମାତ୍ରା 20^0C ରେ ସ୍ଥିର ଥିବା ବେଳେ ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ତାପମାତ୍ରା 100^0C ଥିବା ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁ ଶୀତଳ ହେବାକୁ ଛାଡି ଦିଆଗଲା । ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ 10 ମିନିଟ ପରେ ବସ୍ତୁଟିର ତାପମାତ୍ରା 40^0C ହେଲା । ତେବେ ଅଧଘଣ୍ଟା ସମୟ ପରେ ବସ୍ତୁର ତାପମାତ୍ରା କେତେ ହେବ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ ସମୟ t ବେଳେ ଏକ ବସ୍ତୁର ତାପମାତ୍ରା T । ନ୍ୟୁଟନ୍‌ଙ୍କ ଶୀତଳ ହେବାର ନିୟମ ଅନୁଯାୟୀ

$\frac{dT}{dt}=-k(T-20)$, ଯେଉଁଠି $k>0$ ଏବଂ ଏହା ଏକ ଧ୍ରୁବକ ।

$$\frac{dT}{T-20}=-k\,dt \quad \ldots (1)$$

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ପାଇବା $\int\frac{dT}{T-20}\ k-\int K\,dt$

ବା, $\log(T-20)=-kt+\log C$ ଯେଉଁଠି C ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $T-20=Ce^{-kt}$ ବା, $T=20+Ce^{-kt}$ ... (2)

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ (2)ରେ $t=0, T=100$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$100=20+C$

ବା, $C=80$

Cର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$T=20+80e^{-kt}$ ... (3)

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $t=10$ ବେଳେ, $T=40$ । ଏହି ମାନଗୁଡ଼ିକୁ (3)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$40=20+80\,e^{-10k}$ ବା $80\,e^{-10k}=20$

ବା, $e^{-10k}=\frac{1}{4}$ ବା, $e^{-k}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{10}}$

ଏହିପରି, $T=20+80\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{t}{20}}$

ଅଧଘଣ୍ଟାଏ ପରେ, ଅର୍ଥାତ୍ ଯେତେବେଳେ $t=30$, ସେତେବେଳେ ଆମେ ପାଇବା

$$T=20+80\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

ବା, $T = 20 + 80 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$

ବା, $T = 20 + 1.25$ ବା, $T = 21.25^0C$

1. କୌଣସି ଏକ ଦେଶର ଜନସଂଖ୍ୟା ବାର୍ଷିକ 10% ହାରରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ । ଜନ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଗୁଣ ହେବାପାଇଁ କେତେ ବର୍ଷ ଲାଗିବ ?

2. 80^0F ତାପମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବସ୍ତୁକୁ $t = 0$ ସମୟରେ ଏପରି ଏକ ପରିବେଶ ମଧ୍ୟରେ ରଖାଗଲା ଯେପରିକି ଉକ୍ତ ପରିବେଶର ତାପମାତ୍ରା 50^0Fରେ ସ୍ଥିର ଥାଏ । 5ମିନିଟ ସମୟ ପରେ ବସ୍ତୁଟିର ତାପମାତ୍ରା 70^0Fକୁ କମିଯାଇଥିଲା । କେତେବେଳେ ବସ୍ତୁଟିର ତାପମାତ୍ରା 60^0F ହେବ ?

3. ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଗତିକରୁଥିବା ଗୋଟିଏ କଣିକାର ବେଗ v(ମି/ସେକେଣ୍ଡ)କୁ $v = 4t^2$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିହେବ । ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ 1 ସେକେଣ୍ଡ ପରେ କଣିକାଟିର ଦୂରତା 2 ମିଟର ହୋଇଥିଲା । 3 ସେକେଣ୍ଡ ପରେ କଣିକାଟିର ଦୂରତା କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ଦେଖାଗଲା ଯେ ବାକ୍‌ଟେରିଆର ବୃଦ୍ଧିହାର ଏହାର ସଂଖ୍ୟା ସହ ସମାନୁପାତୀ । ଯଦି ଏକ ଘଣ୍ଟାରେ ବାକ୍‌ଟେରିଆର ସଂଖ୍ୟା 3ଗୁଣ ହେଉଥାଏ, ତେବେ 5 ଘଣ୍ଟା ପରେ ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ଗୁଣ ହେବ ?

ଉଦାହରଣ 28.25

ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ $y = e^{m\sin^{-1}x}$ ହେଉଛି $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - m^2y = 0$ ର ଏକ ସମାଧାନ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $y = e^{m\sin^{-1}x} \ldots (1)$

(1) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ କଲେ, ପାଇବା

$$(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 - y^2$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \frac{me^{m\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{my}{\sqrt{1-x^2}}$$

ବା, $\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = my$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(1-x^2)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} = 2m^2y\frac{dy}{dx}$$

ବା, $-x\frac{dy}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} = m^2y$

ବା, $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$

ଏଣୁ $y=e^{m\sin^{-1}x}$ ହେଉଛି $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}-m^2y=0$ ର ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.26

$e^{\frac{dy}{dx}}=x+1$ ର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $x=0$ ବେଳେ $y=2$ ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ,

$e^{\frac{dy}{dx}}=x+1$ ବା, $\dfrac{dy}{dx}=\log(x+1)$

ବା, $dy=\log(x+1)dx$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y=\int \log(x+1)\cdot 1dx+c$

ଯେଉଁଠି C ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y=x\log(x+1)-\int\dfrac{x}{x+1}dx+c$

ବା, $y=x\log(x+1)-\int\dfrac{x+1-1}{x+1}dx+c$

ବା, $y = x \log(x+1) - [x - \log(x+1)]+c$

ବା, $y = (x+1)\log(x+1) - x + c$ ... (2)

ସମୀକରଣ (2)ରେ $y = 2$ ଓ $x = 0$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$2 = \log 1 - 0 + c$ ବା $c = 2$

C ର ମାନ, ସମୀକରଣ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$y = (x+1) \log(x+1) - x + 2$

ଯାହାକି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 28.27

$(y-yx)dx + (x+xy)dy = 0$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଓ (1, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$(y-yx)dx + (x+xy)dy = 0$

ବା, $(x+xy)dy = (yx-y)dx$

ବା, $x(1+y)dy = y(x-1)dx$

ବା, $\dfrac{1+y}{y}dy=\dfrac{x-1}{x}dx$ ... (1)

ସମୀକରଣ (1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\int\left(\frac{1+y}{y}\right)dy = \int\left(\frac{x-1}{x}\right)dx$$

ବା, $\int\left(\frac{1}{y}+1\right)dy = \int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$

ବା, $\log y + y = x - \log x + c$ ... (2)

ବକ୍ରଟି (1, 1) ଦେଇ ଯାଏ, ଏଣୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ $x = 1, y = 1$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$1 = 1 + c$ ବା $c = 0$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$\log y + y = x - \log x$

ବା, $\log y + \log x = x - y$

ବା, $\log (xy) = x - y$

ଉଦାହରଣ 28.28

ସମାଧାନ କର : $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x}+3e^{4x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି, $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{2x}+3e^{4x}}{e^{x}+e^{-x}}$

ବା, $\frac{dy}{dx} = \frac{3e^{3x}(e^{-x}+e^{x})}{e^{x}+e^{-x}}$ ବା, $\frac{dy}{dx} = 3e^{3x}$

ବା, $dy = 3e^{3x}\,dx$... (1)

(1)ର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାକଳନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y = \int 3e^{3x}\,dx + c$

ଯେଉଁଠି C ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $y = 3\frac{e^{3x}}{3} + c$ ବା, $y = e^{3x} + c$

ଯାହାକି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ

ଉଦାହରଣ 28.29

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + x^2\frac{dy}{dx}\right)$$

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ସମାଧାନଟି $x = a, y = a$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y - x\frac{dy}{dx} = a\left(y^2 + x^2\frac{dy}{dx}\right)$

ବା, $y - ay^2 = x\dfrac{dy}{dx} + ax^2\dfrac{dy}{dx}$ ବା, $(y - ay^2) = (a + ax^2)\dfrac{dy}{dx}$

ବା, $\dfrac{dy}{y - ay^2} = \dfrac{dx}{x + ax^2}$ ବା, $\dfrac{dy}{y(1-ay)} = \dfrac{dx}{x(1+ax)}$

ବା, $\left[\dfrac{1}{y} + \dfrac{a}{1-ay}\right]dy = \left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{a}{1+ax}\right]dx \quad ...(1)$

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{a}{1-ay}\right)dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{a}{1+ax}\right)dx + c$$

ଯେଉଁଠି C ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

ବା, $\log y - \dfrac{a}{a}\log(1-ay) = \log x - \dfrac{a}{a}\log(1+ax) + \log c_1$

ଯେଉଁଠି $c = \log c_1$ $(x, y > 0)$, $(1-ay) > 0$, $(1+az) > 0$

ବା, $\log y - \log(1-ay) = \log x - \log(1+ax) + \log c_1$

ବା, $\log\left(\dfrac{y}{1-ay}\right) = \log\left(\dfrac{c_1 x}{1+ax}\right)$

ବା, $y(1+ax) = c_1 x(1-ay) \quad ...(2)$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ, $x = a$ ହେଲେ $y = a$କୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$a(1+a^2) = c_1 a(1-a^2)$ ବା, $c_1 = \dfrac{1+a^2}{1-a^2}$

c_1ର ମାନକୁ ସମୀକରଣ (2)ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$y(1+ax)(1-a^2) = x(1-ay)(1+a^2)$

ଯାହାକି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.5

1. (a) $y = \tan^{-1}x$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2x\dfrac{dy}{dx} = 0$

(b) $y = e^x \sin x$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$ ।

2. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$\log\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$, ଦତ୍ତ ଅଛି $x = 0$ ହେଲେ $y = 0$

3. (a) $\frac{dy}{dx} = xy + x + y + 1$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବକ୍ରଟି (2, 0) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯାଉଥିଲେ, ତା'ର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) $\frac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଯେଉଁ ବକ୍ରଟି $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$ ଦେଇ ଅତିକ୍ରମ କରେ, ତା'ର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ସମାଧାନ କର : $\frac{dy}{dx} = \frac{4e^{3x} + 4e^{5x}}{e^{x} + e^{-x}}$

5. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $dx + x\,dy = e^{-y}\sec^2 y\,dy$

(b) $(1+x^2)\frac{dy}{dx} - 4x = 3\cot^{-1} x$

(c) $(1+y)xy\,dy = (1-x^2)(1-y)dx$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ନିରପେକ୍ଷ ଚଳ, ସାପେକ୍ଷ ଚଳ ଏବଂ ସାପେକ୍ଷ ଚଳର ନିରପେକ୍ଷ ଚଳ ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ (ଅଥବା ଅବକଳ) ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ସ୍ଥାପନ କରୁଥିବା ସମୀକରଣକୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।
- ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ଅଧିକତମ ଅବକଳଜର କୋଟିକୁ ଉକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର କୋଟି କୁହାଯାଏ ।
- ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ଥିବା ଅବକଳଜରୁ କରଣୀ ଚିହ୍ନ (ବା ମୂଳଚିହ୍ନ) ଓ ଭଗ୍ନାଂଶ ଅପସାରଣ କଲାପରେ, ସମୀକରଣରେ ଥିବା ଅଧିକତମ ଅବକଳଜର ଘାତକୁ ଉକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଘାତ କୁହାଯାଏ ।
- ଯେଉଁ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ ଓ ତା'ର ଅବକଳଜ କେବଳ ଏକ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ ଓ ଅବକଳଜକୁ ପରସ୍ପର ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଇ ନ ଥାଏ, ତାକୁ ରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।
- ରୈଖିକ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ସର୍ବଦା ଏକ ଘାତୀ ।
- ଏକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଯେଉଁ ସମାଧାନର କୋଟି ସଂଖ୍ୟା ସହ ଏଥିରେ ଥିବା ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହୋଇଥାଏ, ତାକୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ସମାଧାନ କୁହାଯାଏ ।
- ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତକୁ ଉପଯୋଗ କରି ଏକ ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ଥିବା ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ଗୁଡ଼ିକର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ସାଧାରଣ ସମାଧାନଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନରେ ପରିଣତ ହୁଏ ।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ଏହାର ସମାଧାନ ମିଳିଥାଏ ।
- $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ ରୂପକ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ଚଳଗୁଡ଼ିକୁ ପରସ୍ପର ଠାରୁ ପୃଥକ କଲାପରେ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସମାକଳନ କଲେ, ଏହାର ସମାଧାନ ମିଳିଥାଏ ।

- ଅବକଳ ସମୀକରଣ $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$କୁ ସଜାତୀୟ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $M(x, y)$ ଓ $N(x, y)$ ଉଭୟ ସଜାତୀୟ ଓ ସମଘାତୀ ହୋଇଥା'ନ୍ତି ।
- ସଜାତୀୟ ଅବକଳ ସମୀକରଣରେ $y = vx$ ବା $x = vy$ ବସାଇବା ପରେ, ଚଳ ଦ୍ୱୟକୁ ପୃଥକ କରି ଉକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।
- ପ୍ରଥମ କୋଟି ରୈଖିକ ସମୀକରଣ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ର ସମାଧାନ ହେଉଛି $ye^{\int Pdx} = \int Q\left(e^{\int Pdx}\right)dx + c$ ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ।

  $e^{\int Pdx}$ କୁ ଅବକଳ ସମୀକରଣର ସମାକଳଗୁଣକ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ I.F. ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।
- ଏକ ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଟି ବଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ ର ସମାଧାନ ପାଇବା ପାଇଁ ଏହାର ଦୁଇଥର x ସାପେକ୍ଷ ସମାକଳନ କରାଯାଏ ଏବଂ ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ ଦୁଇଟି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଧ୍ରୁବକ ରହିଥାଏ

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣମାନଙ୍କର କୋଟି ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0$ (b) $x\,dx + y\,dy = 0$

(c) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 5\cos 3x$ (d) $\frac{dy}{dx} = \cos x$

(e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - xy\frac{dy}{dx} = y$ (f) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

(g) $y = x\frac{dy}{dx} + a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ (h) $\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} = a\frac{d^2y}{dx^2}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ରୈଖିକ ଓ କେଉଁଟି ଅଣରୈଖିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (b) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = y^2 \log x$

ମଡ୍ୟୁଲ-V
ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

(c) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$ (d) $x\frac{dy}{dx} - 4 = x$ (e) $dx + dy = 0$

3. a କୁ ଅପସାରଣ କରି $y^2 - 2ay + x^2 = a^2$ର ସଙ୍ଗତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

4. ସମୀକରଣ $y = ax^2 + bx + c$ ରୁ a, b, c ଅପସାରଣ କରି ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହାର କୋଟି ଓ ଘାତ ଲେଖ ।

5. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ସମାଧାନରେ କେତୋଟି ଧ୍ରୁବକ ରହିବ ।

(a) ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

(b) ତୃତୀୟ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

(c) ପଞ୍ଚମ କୋଟି ବିଶିଷ୍ଟ ଅବକଳ ସମୀକରଣ ।

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ସମାଧାନ ହେଉଛି $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ।

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅବକଳ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $\sin^2 x\frac{dy}{dx} = 3\cos x + 4$ (b) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y} + x^2e^{-y}$

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{\cos x \sin y}{\cos y} = 0$ (d) $dy + xy\,dx = xdx$

(e) $\frac{dy}{dx} + y\tan x = x^m \cos mx$ (f) $(1+y^2)\frac{dx}{dy} = \tan^{-1} y - x$

(g) $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos^2 x$ (h) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin^{-1} x$

(i) $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x - \sin x$ (j) $\frac{d^3y}{dx^3} = \cos 3x - \sin 3x$

8. $\frac{dv}{dt} = g\cos\propto - Kv$ ଯେଉଁଠି 3, g , k ଧ୍ରୁବକ, ତେବେ t ମାଧ୍ୟମରେ v ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି $t = 0$ ହେଲେ $v = 0$ ହୁଏ ।

9. ନିମ୍ନ ଅବକଳ ସମୀକରଣଟି ସମାଧାନ କର :

$\frac{d^2y}{dx^2} = \log x$, ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $x = 1$ ବେଳେ $y = 1$ ଓ $\frac{dy}{dx} = -1$ ।

10. ଯଦି ବାୟୁର ତାପମାତ୍ରା 290K ହୁଏ ଏବଂ ଏକ ବସ୍ତୁ 10 ମିନିଟ୍‌ରେ 370K ରୁ 330K ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଶୀତଳ ହୁଏ, ତେବେ ବାୟୁର ତାପମାତ୍ରା କେତେବେଳେ 295K ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.1

1. କୋଟି 1, ଘାତ 2
2. (a) କୋଟି 2, ଘାତ 1 (b) କୋଟି 1, ଘାତ 2
   (c) କୋଟି 1, ଘାତ 1 (d) କୋଟି 2, ଘାତ 2
3. (a) ଅଣରୈଖିକ (b) ରୈଖିକ (c) ରୈଖିକ (d) ଅଣରୈଖିକ
4. $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$
5. (a) $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$

   (b) $(x^2-2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-4xy\frac{dy}{dx}-x^2=0$

   (c) $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$ (d) $y=(x-3)\frac{dy}{dx}+2$

   (e) $(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.2

1. (i) ହଁ (ii) ନାହିଁ
2. (i), (ii) ଓ (iv) ହେଉଛନ୍ତି, ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସମାଧାନ (iii) ହେଉଛି ସାଧାରଣ ସମାଧାନ
3. (ii), (iv) ସଜାତୀୟ
5. (a) $y = \tan x$ (b) $y=\tan x+\sqrt{3}$
6. (a) $y=\frac{1}{6}x^6\tan^{-1}(x^3)-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{6}\tan^{-1}(x^3)+c$

   (b) $y=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x(x-1)e^x+c$

   (c) $y=\frac{1}{2}\log|x^2+1|+c$ (d) $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}\cos 3x+c$
7. $y = -4e^{-x} + 7$
8. (a) $\log\left|\frac{y}{x}\right|=c+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (b) $\log|y+1|=x+\frac{x^2}{2}+c$

   (c) $\tan x \tan y = c$ (d) $e^y=e^x+\frac{x^3}{3}+c$

9. $3e^{-4y} + 4e^{3x} = 7$

10. (a) $x = c(x^2 - y^2)$

(b) $x + cy = y \log |x|$

(c) $\sin^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log|x| + c$

(d) $\tan\frac{y}{2x} = cx$

11. $y(\sec x + \tan x) = \sec x + \tan x - x + c$

12. (a) $y = \tan^{-1}x + ce^{-\tan x}$

(b) $y = \tan x - 1 + ce^{-\tan x}$

(c) $y = \log x + \frac{c}{\log x}$

13. (a) $x = ce^{y} - (y+2)$ (b) $x = y^2 + cy$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.3

1. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{8}\cos 2x - \frac{1}{8}$

2. $\frac{x^4}{24} + \frac{3}{2}x^2 - x + \cos x - 1$

3. (a) $y = -x \sin x - 2 \cos x + c_1x + c_2$

(b) $y = c_1x + c_2 - \log \sin x - \frac{1}{2}x^2$

(c) (d) $y = -\cos x + \sin x + c_1x + c_2$

4. (a) $y = x(\log x - 1) + 2$

(b) $y = \frac{1}{2}x^2 - \sin x + x$

(c) $y = x^2 + x + 1$

5. (a) $y = e^x + \frac{x^5}{60} + c_1x^2 + c_2x + c_3$

(b) $y = e^x - \sin x + c_1x^2 + c_2x + c_3$

(c) $y = c_1x^2 + c_2x + c_3$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.4

1. $t = 10 \log 2$ ବର୍ଷ

2. 13.55 ମିନିଟ୍

3. $12\frac{2}{3}$ ମିନିଟ

4. 243 ଗୁଣ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 28.5

2. $^{3x} + 3e^{-4y} = 7$

3. (a) $\log(y+1) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

   (b) $y \sin x + 5e^{\cos x} = 7$

4. $y = \frac{5}{4}e^{5x} + c$ 5.(a) $x = e^{-y}(c + \tan y)$

   (b) $y = 2\log|1+x^2| - \frac{3}{2}(\cot^{-1}x)^2 + c$

   (c) $\log x + 2\log|1-y| = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - 2y + c$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (a) କୋଟି 2, ଘାତ 3 (e) କୋଟି 2, ଘାତ 1

   (b) କୋଟି 1, ଘାତ 1 (f) କୋଟି 2, ଘାତ 1

   (c) କୋଟି 4, ଘାତ 1 (g) କୋଟି 1, ଘାତ 2

   (d) କୋଟି 1, ଘାତ 1 (h) କୋଟି 2, ଘାତ 1

2. (a), (d), (e) ରୈଖିକ; (b), (c) ଅଣରୈଖିକ

3. $(x^2 - 2y^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - x^2 = 0$

4, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, କୋଟି 3, ଘାତ 1

5. (a) ଦୁଇ (b) ତିନି (c) ପାଞ୍ଚ

7. (a) $y + 3 \operatorname{cosec} x + 4 \cot x = c$ (b) $e^y = e^x + \frac{x^3}{3} + c$

   (c) $\sin y = ce^{-\sin x}$ (d) $\log(1-y) + \frac{x^2}{2} = c$

   (e) $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cos x + c\cos x$ (f) $x = \tan^{-1} y - 1 + ce^{-\tan^{-1} y}$

(g) $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2x}{8} + c_1x + c_2$

(h) $y = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\right)\sin^{-1} x + \frac{3}{4}x\sqrt{1-x^2} + c_1x + c_2$

(i) $y = e^x + \sin x + c_1x + c_2$

(j) $y = -\frac{\sin 3x}{27} - \frac{\cos 3x}{27} + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3$

8. $v = \frac{g\cos\alpha}{k}(1 - e^{-Kt})$

9. $y = \frac{x^2 \log x}{2} - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{4}$

10. 40 ମିନିଟ