୨୭

ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ

ଆମେ ପୂର୍ବପାଠରେ ପ୍ରତି-ଅବକଳଜ ଅର୍ଥାତ୍, ଏକ ଫଳନର ସମାକଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିଥିଲୁ । ବାସ୍ତବରେ ସମାକଳନ ଶବ୍ଦର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ଏକ ପ୍ରକାର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ବା ସମିଶ୍ରଣ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ : ଆମେ ଗଣିତର ଏହି ବିଭାଗଟି ପଢିବାର ଆବଶ୍ୟକତା କ'ଣ ? ବାସ୍ତବରେ ସମାକଳନ ଆମକୁ ବକ୍ରଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ ଜାଣିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ, ଯଦି ଏହାର ନିଶ୍ଚିତ ସୀମା ଥାଏ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ ପରିସଂଖ୍ୟାନ, ଭୌତିକ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିଜ୍ଞାନ, ପ୍ରାଣୀବିଜ୍ଞାନ, ବାଣିଜ୍ୟ ଏବଂ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିଷୟ ବିଭିନ୍ନ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନରେ ଏହି ବିଷୟବସ୍ତୁର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଉଛି ।

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର (Definife Integral) ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ସହ ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିଭାଷା ଦେବୁ । ଏହାର ଉପଯୁକ୍ତ ଧର୍ମର ଉପଯୋଗ କରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବୁ ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଏକ ସୀମାବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବୁ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୀକଳର ସଂଜ୍ଞା ତଥା ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗକ୍ରିୟାର ସଂଜ୍ଞା ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବ;
- ଏହି ସଂଜ୍ଞାର ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ଦତ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସମାକଳନ ଗଣିତର ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟର କଥନକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବ;
- ଏକ ପରିବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଇବାରେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ଉପଯୋଗ କରିପାରିବ ।
- ନିମ୍ନ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିପାରିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ:

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

(iii) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ଯଦି $f(2a-x) = f(x)$

$= 0$ ଯଦି $f(2a-x) = -f(x)$

(vii) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ଯଦି f, x ର ଏକ ସମଫଳନ ହୁଏ

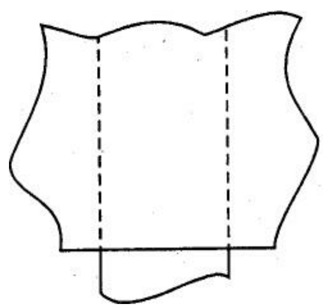
$= 0$ ଯଦି f, x ର ଏକ ବିଷମ ଫଳନ ହୁଏ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

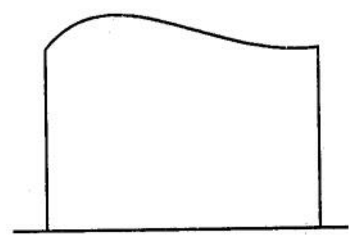
- ସମାକଳନର ଧାରଣା
- ପରିବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

27.1 ଯୋଗର ସୀମା ରୂପରେ ନିଶ୍ଚିତ ସମାକଳ

ଏହି ଭାଗରେ ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରର ସୀମା ସହ ଆମେ ପରିଚିତ ନୋହୁଁ, ସେପରି କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମସ୍ୟାର ଆଲୋଚନା କରିବୁ ।



ଚିତ୍ର 27.1

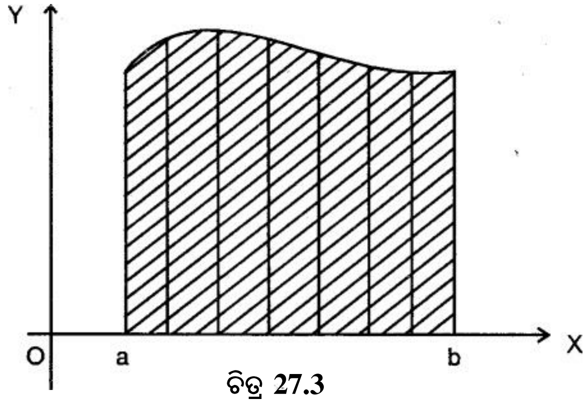


ଚିତ୍ର 27.2

ଏଠାରେ, x-ଅକ୍ଷର ଗୋଟିଏ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଥିବା ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ର (ଚିତ୍ର 27.2)ର ସୀମା ସହ ଆମେ ପରିଚିତ ନୋହୁଁ, କେବଳ ସେହି ପ୍ରକାର କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଆମର ଲକ୍ଷ୍ୟକୁ ସୀମିତ ରଖିବା ।

ଏହାର କାରଣ ହେଉଛି, ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର କ୍ଷେତ୍ରକୁ (ଚିତ୍ର 27.1ରେ ଥିବା ଚିତ୍ର) ଆମେ ଏହିପରି କେତେକ ଉପକ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗକରି ପାରିବା ଏବଂ ଉକ୍ତ ଉପକ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳରୁ ମୂଳ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇପାରିବା ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, f(x) ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ହେଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ ପାଇଁ, ଫଳନଟି କେବଳ ଅଣରଣାତ୍ମକ ମାନ ନେଇଥାଏ ବୋଲି ଧରିନିଆଯାଉ, ଯାହା ଫଳରେ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରଟି x-ଅକ୍ଷର ଉପରପାଖରେ ରହିବ (ଚିତ୍ର 27.3 ଦେଖ) । ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ରର ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଓ କୋଟି x=a ଏବଂ x=b ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର, ଯାହାକି ଚିତ୍ର 27.3ରେ ରେଖାଙ୍କନ ଦ୍ୱାରା ଚିତ୍ରିତ ଅଞ୍ଚଳ, ସେହି କ୍ଷେତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର । ବର୍ତ୍ତମାନର ସମସ୍ୟା ହେଉଛି ଉକ୍ତ ରେଖାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।



ଚିତ୍ର 27.3

ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ f(x) ସମ୍ପୃକ୍ତ ତିନୋଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି, ଯଥା ଆୟତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର, ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ଏବଂ ଟ୍ରାପିଜିୟମ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କ୍ଷେତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ।

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମି × ହାରାହାରି ଉଚ୍ଚତା

ସାଧାରଣଭାବରେ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ଯେକୌଣସି ଫଳନ f(x)ଲାଗି

ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ର (ଚିତ୍ର 27.3 ରେ ଥିବା ଛାୟାଙ୍କିତ କ୍ଷେତ୍ର)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = ଭୂମି × ହାରାହାରି ଉଚ୍ଚତା

ପରିସର ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ହେଉଛି ଭୂମି । ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ x ଠାରେ, ସେହିଠାରେ ଥିବା f(x) ହେଉଛି ଉଚ୍ଚତା । ଏହି ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ fଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମାନର ହାରାହାରି ହେଉଛି ହାରାହାରି ଉଚ୍ଚତା । (ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଏତେ ସହଜ ନୁହେଁ, କାରଣ ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ନାହିଁ ।) ଆମର ସମସ୍ୟା ହେଉଛି ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ କିପରି f ର ହାରାହାରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

27.1.1 ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକ ଫଳନର ହାରାହାରି ମାନ ନିରୂପଣ :

ଯଦି ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ fର ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ମାନ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ସହଜରେ ହାରାହାରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ

$$= \frac{[a, b]\text{ରେ } f \text{ ର ମାନଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି}}{\text{ମାନ ଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା}}$$

ମାତ୍ର ଆମ ପ୍ରଶ୍ନରେ, ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ f ଅସଂଖ୍ୟ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ ହାରାହାରି ମାନ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ?

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ନାହିଁ । ଏଣୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ପଦ୍ଧତିରେ fର ହାରାହାରି ମାନ କଳନା କରୁ :

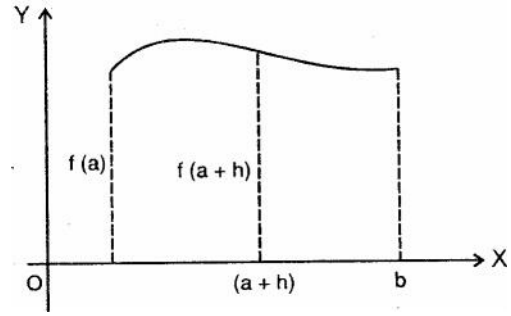
ପ୍ରଥମ ଆକଳନ : କେବଳ 'a' ଠାରେ fର ମାନ ନିଅ । 'a' ଠାରେ fର ମାନ ହେଉଛି f(a) ଆମେ ଏହି ମାନ f(a)କୁ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ଠାରେ ଏକ ପାଖାପାଖି (rough) ଉଚ୍ଚତା ଭାବେ ନେଉ । [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ (ପ୍ରଥମ ଆକଳନ) = f(a) ... (i)

ଦ୍ୱିତୀୟ ଆକଳନ : [a, b] ଦୁଇ ସମାନ ଭାଗ ବା ଉପଅନ୍ତରାଳରେ ପରିଣତ କର ।

ମନେକରାଯାଉ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପ-ଅନ୍ତରାଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ h ହେଉ, $h = \frac{b-a}{2}$ ।

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପ-ଅନ୍ତରାଳର ବାମ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ fର ମାନ ନିଅ । f(a) ଓ f(a+h) ହେଉଛି ଏହି ଦୁଇଟି ମାନ (ଚିତ୍ର 27.4) ।

ଏହି ଦୁଇଟି ମାନର ହାରାହାରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



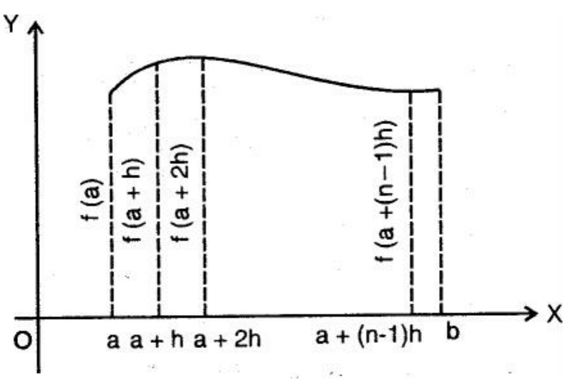
ଚିତ୍ର 27.4

ତାହା ହିଁ ହେବ [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ ।

[a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ (ଦ୍ୱିତୀୟ ଆକଳନ)

$$= \frac{f(a)+f(a+h)}{2}, \; h = \frac{b-a}{2} \quad \text{... (ii)}$$

ଏହି ଆକଳନ, ପ୍ରଥମ ଆକଳନ ଠାରୁ ଅଧିକ ଉତ୍ତମ ବୋଲି ଆଶା କରାଯାଏ । ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ, [a, b] ଅନ୍ତରାଳକୁ n ଗୋଟି ଉପ-ଅନ୍ତରାଳରେ ଭାଗକର ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ହେବ h (ଚିତ୍ର 27.5), $h = \frac{b-a}{n}$ ।



ଚିତ୍ର 27.5

n ଗୋଟି ଉପ-ଅନ୍ତରାଳର ବାମପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ fର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଏହି ମାନଗୁଡ଼ିକ ହେବ f(a), f(a+h) ... f[a+(n–1)h] । [a, b] ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହି n ଗୋଟି ମାନର ହାରାହାରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

f ରେ [a, b] ର ହାରାହାରି ମାନ (n ତମ ଆକଳନ)

$$= \frac{f(a)+f(a+h)+...+f[a+(n-1)h]}{n}, \; h = \frac{b-a}{n} \quad \text{... (iii)}$$

n ର ବୃହତ୍ତ ମାନଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଏକ ଉତ୍ତମ ଆକଳନ ବୋଲି ଆଶା କରାଯାଏ ।

(iii)କୁ ଏଣୁ [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ ଲାଗି ଆମେ ଆକଳନ ମାନଙ୍କର ନିମ୍ନ ଅନୁକ୍ରମ ପାଇଥାଉ :

$f(a)$

$\frac{1}{2}[f(a)+f(a+h)],\ h=\frac{b-a}{2}$

$\frac{1}{3}[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)], h=\frac{b-a}{3}$

....

....

$\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+...+f\{a+(n-a)h\}],\ h=\frac{b-a}{n}$

ଏହି ଅନୁକ୍ରମରେ ଆଗକୁ ଗଲାବେଳେ, ଆମେ ଆମ ଲକ୍ଷ୍ୟ, ଅର୍ଥାତ୍ [a, b]ରେ f ର ହାରାହାରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲକ୍ଷ୍ୟର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉ । ଏଣୁ ଏହା ଯୁକ୍ତିଯୁକ୍ତ ହେବ ଯଦି ଆମେ ଏହି ଆକଳନମାନଙ୍କରର ସୀମାକୁ [a, b]ରେ f ର ହାରାହାରି ମାନ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଉ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ,

[a, b]ରେ f ର ହାରାହାରି ମାନ

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+...+f[a+(n-1)h]\}, h=\frac{b-a}{n} \qquad ...\text{(iv)}$$

ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ସମସ୍ତ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ଲାଗି ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ଏହି ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ରହିଛି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଚିତ୍ର 27.3ରେ ଥିବା ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଞ୍ଚଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ସୂତ୍ର ପାଇବା । ଭୂମି ହେଉଛି (b – a) ଏବଂ ହାରାହାରି ଉଚ୍ଚତା (iv)ରେ ଦତ୍ତ । ବକ୍ର f(x), x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ x = a ଓ x = b ରେ ଥିବା କୋଟି ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+...+f[a+(n-1)h]\},\ \text{ଯେଉଁଠି}\ h=\frac{b-a}{n} \quad ...\text{(v)}$$

(v) ର ଡାହାଣ ପାଖରେ ଥିବା ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଆମେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ସଂଜ୍ଞା ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରିନେଉ । ଏହି ସମାକଳର ସଙ୍କେତ ହେଉଛି

$$=\lim_{h\to 0} h\{f(a)+f(a+h)+...+f[a+(n-1)n]\}\ \int_a^b f(x)\,dx$$

ଏହାକୁ ପଢାଯାଏ : 'a ରୁ b ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ f(x)ର ସମାକଳ' । $\int_a^b f(x)\,dx$ ସଙ୍କେତରେ a ଓ b କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ସମାକଳନର **ନିମ୍ନସୀମା** ଓ **ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ f(x)କୁ **ସମାକଲ୍ୟ** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : [a, b]ରେ fର ହାରାହାରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ଆମେ ଉପ-ଅନ୍ତରାଳମାନଙ୍କର ବାମ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନ ନେଇଛୁ । ବାମ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ କାହିଁକି ? ଉପ-ଅନ୍ତରାଳ ଗୁଡ଼ିକର ଡାହାଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଇ ନାହିଁ କାହିଁକି ?

ଆମେ ମଧ୍ୟ ସମସ୍ତ ଉପ-ଅନ୍ତରାଳର ଡାହାଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନେଇପାରିବା ଏବଂ ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପାଇବା

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\{f(a+h)+f(a+2h)+\ldots+f(b)\}$$ ଯେଉଁଠି $h=\dfrac{b-a}{n}$

$$=\lim_{h\to 0} h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots f(b)] \qquad \ldots (vi)$$

ଉଦାହରଣ 27.1

$\int_1^2 x\,dx$ କୁ ଯୋଗର ସୀମା ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର :

ସମାଧାନ :

ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\ldots+f(a+(n-1)h\}],$$

ଏଠାରେ, $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = x$ ଏବଂ $h=\dfrac{1}{n}$

$$\therefore \int_1^2 x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(1)+f\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{\text{n ଗୋଟି}}+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\ldots+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$\left[\because 1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)=\frac{(n-2)\cdot n}{2}\right]$$

$$\left[\because 1+2+3+\ldots\ldots+(n-1)=\frac{(n-2)\cdot n}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[n+\frac{(n-1)\cdot n}{n\cdot 2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{3n-1}{2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right]=\frac{3}{2}$$

ଉଦାହରଣ 27.2

$\int_0^2 e^x\,dx$ କୁ ଯୋଗର ସୀମା ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର :

ସମାଧାନ :

ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0} h[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+...+f\{a+(n-1)h\}] \text{ ଯେଉଁଠି } h=\frac{b-a}{n}$$

ଏଠାରେ $a=0, b=2, f(x)=e^x$ ଏବଂ $h=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n}$

$$\therefore \int_0^2 e^x\,dx = \lim_{h\to 0} h[f(0)+f(h)+f(2h)+...f(n-1)h]$$

$$= \lim_{h\to 0} h[e^0+e^h+e^{2h}+...+e^{(n-1)h}]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[e^0\left(\frac{(2^h)^n-1}{e^h-1}\right)\right] \qquad \left[\text{ଯେହେତୁ } a+ar+ar^2+....+ar^{n-1}=a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[\frac{e^{nh}-1}{e^h-1}\right] = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}\left[\frac{e^2-1}{\left(\frac{e^h-1}{h}\right)}\right] \quad (\because nh=2)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^2-1}{\frac{e^h-1}{h}} = \frac{e^2-1}{1} = e^2-1 \qquad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1\right]$$

ଉଦାହରଣ 27.1 ଓ 27.2 ରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନକୁ ଯୋଗର ସୀମା ରୂପରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଅତ୍ୟନ୍ତ ଜଟିଳ । ଏହି ଜଟିଳତାକୁ ଦୂରେଇ ଦେବା ଲାଗି ସମାକଳ ଗଣିତର ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ ରହିଛି । ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 1 : ଯଦି [a, b]ରେ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ [a, b]ରେ f ର ଏକ ପ୍ରତି ଅବକଳଜ F ହୋଇଥାଏ, ତେବେ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \qquad ...(1)$$

F(b) – F(a) ପାର୍ଥକ୍ୟକୁ ସାଧାରଣତଃ $[F(x)]_a^b$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ଯାହା ଫଳରେ (1)କୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ -

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)]_b^a \text{ ବା } [F(x)]_a^b$$

ଅନ୍ୟ କଥାରେ, ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ବ୍ୟକ୍ତ କରେ ଯେ

$\int_a^b f(x)\,dx$ = (ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ସୀମା b ଠାରେ ପ୍ରତିଅବକଳଜର ମାନ (–)

ନିମ୍ନ ସୀମା a ଠାରେ ସେହି ପ୍ରତିଅବକଳଜର ମାନ)

ଉଦାହରଣ 27.3 $\int_1^2 x\,dx$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

ଉଦାହରଣ 27.4 ନିମ୍ନସ୍ଥ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ (b) $\int_0^2 e^{2x}\,dx$

ସମାଧାନ : (a) ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

(b) $$\int_0^2 e^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 \qquad \left[\because \int e^x\,dx = e^x\right]$$

$$= \left(\frac{e^4 - 1}{2}\right)$$

ଉପପାଦ୍ୟ 2 : ଯଦି [a, b]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ ଫଳନ f ଓ g ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥାନ୍ତି ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ

(i) $\int_a^b c f(x)\,dx + c\int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $$\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

ଉଦାହରଣ 27.5 $\int_0^2 (4x^2-5x+7)\,dx$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $$\int_0^2 (4x^2-5x+7)\,dx = \int_0^2 4x^2\,dx - \int_0^2 5x\,dx + \int_0^2 7\,dx$$

$$= 4\int_0^2 x^2\,dx - 5\int_0^2 x\,dx + 7\int_0^2 1\cdot dx$$

$$= 4\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + 7[x]_0^2$$

$$= 4\cdot\left(\frac{8}{3}\right) - 5\left(\frac{4}{2}\right) + 7(2)$$

$$= \frac{32}{3} - 10 + 14 = \frac{44}{3}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.1

1. $\int_0^5 (x+1)\,dx$ କୁ ଯୋଗର ସୀମା ରୂପେ ନେଇ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. $\int_{-1}^1 e^x\,dx$ କୁ ଯୋଗର ସୀମା ରୂପେ ନେଇ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int_0^{\pi/4} \sin x\,dx$ (b) $\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x)\,dx$

(c) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (d) $\int_1^2 (4x^3-5x^2+6x+9)\,dx$

27.2 ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିରୂପଣ

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ମୁଖ୍ୟ କଥା ହେଉଛି ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ପୂର୍ବପାଠରେ ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ଆମେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀର ଆଲୋଚନା କରିଛୁ । ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ପ୍ରଣାଳୀ ଥିଲା ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ପ୍ରଣାଳୀ । ନିମ୍ନସ୍ଥ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ଭଳି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କଲାବେଳେ

$$\int_{2}^{3}\frac{x}{1+x^2}dx, \int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

ସମାଧାନର ପାଦଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନମତେ ହୋଇଥାଏ :

(i) ଦତ୍ତ ସମାକଳକୁ ଉପଯୁକ୍ତ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ସମାକଳନ ଯୋଗ୍ୟ ଏକ ଜଣାଥିବା ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର । ଦତ୍ତ ସମାକଳକୁ ନୂଆ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖ ।

(ii) ନୂଆ ସମାକଲ୍ୟକୁ ନୂଆଚଳ ସାପେକ୍ଷ ସମାକଳନ କର ।

(iii) ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଅନୁଯାୟୀ ସୀମାର ପରିବର୍ତ୍ତନ କର ଏବଂ ଉର୍ଦ୍ଧସୀମା ଓ ନିମ୍ନସୀମା ଅନୁଯାୟୀ ପ୍ରାପ୍ତ ମାନଦ୍ୱୟର ପାର୍ଥକ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଟୀକା : ତୁମେ ଯଦି ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଅନୁଯାୟୀ ସୀମାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ନ କର, ତେବେ ସମାକଳନ କଳାପରେ ପୁନଃ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ନୂତନ ଚଳରୁ ପୁରାତନ ଚଳକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ପ୍ରଥମ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ଉତ୍ତରକୁ ଲେଖ । ବର୍ତ୍ତମାନ ସମାକଳର ଦତ୍ତ ସୀମାକୁ ନେଇ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉଦାହରଣ 27.6

$\int_{2}^{3}\frac{x}{1+x^2}dx$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ $1 + x^2 = t$

$\therefore\ 2x\,dx = dt$ ବା $x\,dx = \frac{1}{2}dt$

$x = 2$ ହେଲେ, $t = 5$ ଏବଂ $x = 3$ ହେଲେ, $t = 10$ । ଏଣୁ 't'କୁ ଚଳ ରୂପେ ନେଲେ ସୀମା ହେବ 5 ଓ 10 ।

ଏଣୁ $\int_{2}^{3}\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{5}^{10}\frac{1}{t}dt$

$= \frac{1}{2}[\log t]_5^{10}$

$= \frac{1}{2}[\log 10 - \log 5] = \frac{1}{2}\log 2$

ଉଦାହରଣ 27.7

ନିମ୍ନସ୍ଥ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ (b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta$ (c) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{5+4\cos x}$

ସମାଧାନ :

(a) ମନେକରାଯାଉ $\cos x = t$, ତେବେ $\sin x\,dx = -dt$ ଯେତେବେଳେ $x = 0$, $t = 1$ ଏବଂ

$x=\frac{\pi}{2}, t=0$ । x ଚଳଟି 0 ରୁ $\frac{\pi}{2}$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, x ଚଳଟି 1 ରୁ 0କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବ ।

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}dt = -[\tan^{-1} t]_1^0$$

$$= -[\tan^{-1}0 - \tan^{-1}1] = -\left[0-\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4}$$

(b) $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta}{1-2\sin^2\theta\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{1-2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)}$$

ମନେକରାଯାଉ $\sin^2\theta = t$,

ତେବେ, $2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dt$ ଅର୍ଥାତ୍, $\sin 2\theta\, d\theta = dt$

ଯେତେବେଳେ $\theta=0, t=0$ ଏବଂ $\theta=\frac{\pi}{2}, t=1$ । θ, 0 ରୁ $\frac{\pi}{2}$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, ନୂତନ ଚଳ t, 0 ରୁ 1କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)}dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2t^2-2t+1}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{t}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{t-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\right]_0^1$$

$$= [\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)]$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

(c) ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\cos x = \dfrac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+\dfrac{4\left(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}}dx$$

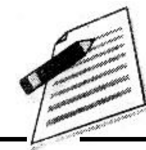
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)}{9+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}dx \quad \dots (1)$$

ମନେକରାଯାଉ, $\tan\frac{x}{2} = t$

ତେବେ, $\sec^2\frac{x}{2}dx = 2\,dt$ ଯେତେବେଳେ $x = 0, t = 0$, ଯେତେବେଳେ $x = \frac{\pi}{2}, t = 1$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+4\cos x}dx = 2\int_0^1 \frac{1}{9+t^2}dt \qquad [(1) \text{ ରୁ}]$$

$$=\frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{1}{3}\right]$$



27.3 ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳନର କେତେକ ଧର୍ମ

a ଓ b ସୀମା ମଧ୍ୟରେ f(x)ର ନିଶ୍ଚିତ ସମାକଳକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି -

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ ଯେଉଁଠି } \frac{d}{dx}[F(x)] = f(x)$$

ଯେଉଁଠି a ଓ b ହେଉଛନ୍ତି ଯଥାକ୍ରମେ ସମାକଳନର ନିମ୍ନସୀମା ଓ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା । ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନରେ ଏପରି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳର କେତୋଟି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଓ ଉପଯୋଗୀ ଧର୍ମମାନ ଦିଆଯାଇଛି ।

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$ (ii) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ ଯେଉଁଠି $a < c < b$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vii) $$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ଯଦି } f(2a-x) = -f(x) \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{ଯଦି } f(2a-x) = f(x) \end{cases}$$

(viii) $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{ଯଦି } f(x) \text{ହେଉଛି } x \text{ ର ଏକ ବିଷମ ଫଳନ} \\ 2\int_0^a f(x)\,dx, & \text{ଯଦି } f(x) \text{ ହେଉଛି } x \text{ ର ଏକ ସମ ଫଳନ} \end{cases}$$

ଉପରିସ୍ଥ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ ଅନେକ କଷ୍ଟ ସାଧ୍ୟ ନିଶ୍ଚିତ ସମାକଳଙ୍କର ମାନ ସହଜରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଉପରୋକ୍ତ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର କିପରି ଉପଯୋଗ କରାଯାଏ, ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଉଦାହରଣ 27.8

ଦର୍ଶାଅ ଯେ (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log|\tan x|\,dx = 0$ (b) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \pi$

ସମାଧାନ : (a) ମନେକରାଯାଉ $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log|\tan x|\,dx$ ... (i)

$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx$ ଧର୍ମକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପାଉ

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\cot x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\tan x)^{-1}\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\tan x\,dx=-1$$ [(i) ର ବ୍ୟବହାର କରି]

$$\therefore \frac{1}{2}I=0$$

ଅର୍ଥାତ୍ $I=0$ ବା $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log|\tan x|dx=0$

(b) $\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$

ମନେକରାଯାଉ $I=\int_0^{\pi}\frac{x}{1+\sin x}dx$ ... (i)

$$\therefore I=\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{1+\sin(\pi-x)}dx \qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi-x}{1+\sin x}dx \qquad \text{... (ii)}$$

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗକରି

$$2I=\int_0^{\pi}\frac{x+\pi-x}{1+\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\sin x}dx$$

ବା, $2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx$

$= \pi\int_0^{\pi} (\sec^2 x - \tan x \sec x)\,dx$

$= \pi[\tan x - \sec]_0^{\pi}$

$= \pi[(\tan \pi - \sec \pi) - (\tan 0 - \sec 0)]$

$= \pi[0 - (-1) - (0-1)] = 2\pi$

$\therefore\ I = \pi$

ଉଦାହରଣ 27.9

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1+\sin x \cos x}dx$

ସମାଧାନ :

(a) ମନେକରାଯାଉ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$ ... (i)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}+\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}}dx$

[ଧର୍ମ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ ର ବ୍ୟବହାର କରି]

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}dx$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗକରି, ଆମେ ପାଇବା

$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore I = \frac{\pi}{4}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx = \frac{\pi}{4}$

(b) ମନେକରାଯାଉ $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$ ... (i)

ତେବେ $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ $\qquad \left[\because \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \cos x \sin x}\, dx \quad \text{... (ii)}$$

(i) ଓ (ii)କୁ ଯୋଗକଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x + \cos x - \sin x}{1 + \sin x \cos x}\, dx = 0$$

$$\therefore I = 0$$

ଉଦାହରଣ 27.10

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (a) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{x e^{x^2}}{1 + x^2}\, dx$ (b) $\displaystyle\int_{-3}^{3} |x + 1|\, dx$

ସମାଧାନ :

(a) ଏଠାରେ $f(x) = \dfrac{x e^{x^2}}{1 + x^2}$

$$\therefore f(-x) = -\frac{x e^{x^2}}{1 + x^2} = -f(x)$$

$\therefore$ f(x) ହେଉଛି xର ଏକ ବିଷମ ଫଳନ ।

$$\therefore \int_{-a}^{a} \frac{x e^{x^2}}{1+x^2} dx = 0$$

(b) $\int_{-3}^{3} |x+1| dx$

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ ଯଦି } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ ଯଦି } x < -1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} |x+1| dx = \int_{-3}^{-1} |x+1| dx + \int_{-1}^{3} |x+1| dx,$$ ଧର୍ମ (iii) ବ୍ୟବହାର କରି ।

$$= \int_{-3}^{-1} (-x-1)\, dx + \int_{-1}^{3} (x+1)\, dx$$

$$= \left[\frac{-x^2}{2} - x\right]_{-3}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{1}{2} + 1 = 10$$

ଉଦାହରଣ 27.11

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] dx$ [ଧର୍ମ (iv)ର ବ୍ୟବହାର କରି]

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos x)\, dx \qquad \text{... (ii)}$$

(i) ଓ (ii)କୁ ଯୋଗ କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [\log(\sin x) + \log(\cos x)]\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x)\ dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\ dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(2)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \text{... (iii)}$$

ପୁନଶ୍ଚ, ମନେକରିବା $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin 2x)\, dx$

$2x = t$ ନେଲେ ପାଇବା $dx = \frac{1}{2}dt$

ଯେତେବେଳେ $x = 0, t = 0$ ଏବଂ $x = \frac{\pi}{2}, t = \pi$

$$\therefore I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log(\sin t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin t)\, dt$$ [ଧର୍ମ (vi) ବ୍ୟବହାର କରି]

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx$$ [ଧର୍ମ (i) ବ୍ୟବହାର କରି]

$\therefore I_1 = I,$ [(i) ରୁ] ... (iv)

ଏହି ମାନକୁ (iii)ରେ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2 \Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

ଏଣୁ, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\log 2$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.2

ନିମ୍ନ ସମାକଳଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

1. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ **2.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin x}$ **3.** $\int_0^1 \frac{2x+3}{5x^2+1} dx$

4. $\int_{-5}^{5} |x+2| dx$ **5.** $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\, dx$ **6.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x\, dx$ 8. $\int_{-a}^{a} \frac{x^3 e^{x^4}}{1+x^2} dx$ **9.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log\tan x\, dx$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x} dx$

27.4 ସମାକଳନର ପ୍ରୟୋଗ

ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ f ଓ g ଦୁଇଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ, ଯେପରିକି $x \in [a, b]$ ଲାଗି $f(x) \leq g(x)$, ଅର୍ଥାତ୍ $y = f(x)$ ବକ୍ରଟି [a, b] ଅନ୍ତରାଳରେ $y = g(x)$ ବକ୍ରର ନିମ୍ନରେ ଆସେ ଓ ସେ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତିନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ହେଉଛି ଯେ ଉପରେ $y = f(x)$, ନିମ୍ନରେ $y = g(x)$ ଏବଂ ଉଭୟ ପାଖରେ $x = a$ ଏବଂ $x = b$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ପୁନଶ୍ଚ କ'ଣ କରାଯିବ, ଯଦି ଉପରେ ଥିବା ବକ୍ର $y = f(x)$ ନିମ୍ନରେ ଥିବା ବକ୍ର $y = g(x)$ କୁ ହୁଏତ ବାମ ସୀମା $x = a$ ଠାରେ ଅଥବା ଡାହାଣ ସୀମା $x = b$ ଠାରେ ଛେଦ କରେ ଅଥବା ଉଭୟ ସୀମାଠାରେ ଛେଦକରେ ?

27.4.1 ଏକ ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟିମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

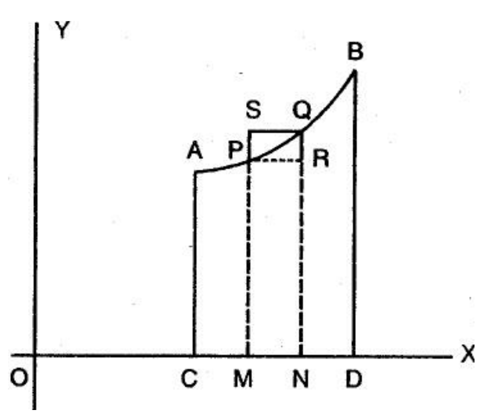
ମନେକର f(x) ବକ୍ର ହେଉଛି AB ଏବଂ ଦୁଇଟି କୋଟି ହେଉଛି ଯଥାକ୍ରମେ $x = a$ ଏବଂ $x = b$ । ଧରିନିଆଯାଉ ଯେ $a \leq x \leq b$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = f(x)$ ହେଉଛି ଏକ ବର୍ଦ୍ଧିଷ୍ଣୁ ଫଳନ ।

ଉକ୍ତ ବକ୍ର ଉପରେ P(x, y) ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ P ର ପ୍ରତିବେଶରେ ଥିବା $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର କୋଟି PM ଓ QN ଅଙ୍କନ କର । ଏଠାରେ ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ xର ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିଲେ, କ୍ଷେତ୍ର (ACMP)ର ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟେ । ମନେକରାଯାଉ A = (ACMP)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ତେବେ

(ACNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= A + \delta A$

(PMNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (ACNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – (ACMP)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= A + \delta A - A = \delta A$



ଚିତ୍ର 27.6

PRQS ଆୟତଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବ ଯେ (PMNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, PMNR ଏବଂ SMNQ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍

δA, $y\delta x$ ଓ $(y+\delta y)\delta x$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

$\Rightarrow \frac{\delta A}{\delta x}$, y ଓ $(y+\delta y)$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

ଚରମ ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଯେତେବେଳେ $Q \to P, \delta x \to 0$ ଏବଂ $\delta y \to 0 \therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta A}{\delta x}$, y ଏବଂ $\lim_{\delta y \to 0} (y+\delta y)$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

$$\therefore \frac{dA}{dx} = y$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ସମାକଳନ, $x = a$ ଠାରୁ $x = b$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ, ସମ୍ପାଦନ କଲେ ଆମେ ପାଇବା :

$$\int_a^b y\,dx = \int_a^b \frac{dA}{dx}\,dx = [A]_a^b$$

$= (x = b$ ବେଳେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ$) - (x = a$ ବେଳେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ$)$

$=$ (ACDB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $- 0$

$=$ ACDBର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଏଣୁ (ACDB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_a^b f(x)\,dx$

$y = f(x)$ ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = a$ ଓ $x = b$ କୋଟି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

$\int_a^b f(x)\,dx$ ବା $\int_a^b y\,dx$

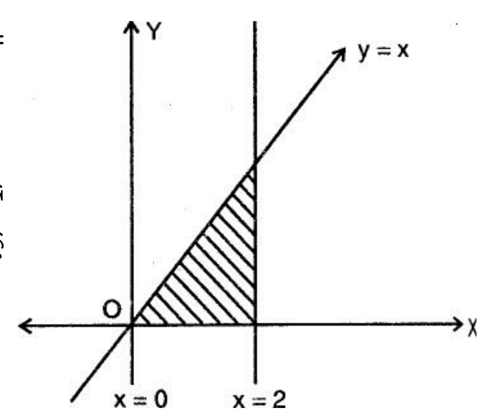
ଯେଉଁଠି $y = f(x)$ ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ ଏକ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନ ଏବଂ $a \le x \le b$ ଅନ୍ତରାଳରେ yର ଚିହ୍ନ ବଦଳେ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 27.12 $y = x$ ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = 0$, $x = 2$ ରେଖା ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି $y = x$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଚକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = 0$ ଓ $x = 2$ କୋଟି ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ (ଚିତ୍ର 27.7ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

$$\int_0^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2 - 0 = 2 \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$



ଚିତ୍ର 27.7

ଉଦାହରଣ 27.13

ବକ୍ର $y = e^x$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = 0$ ଓ $x = a > 0$ କୋଟି ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ବକ୍ର, ହେଉଛି $y = e^x$ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ବକ୍ର x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = 0, x = a$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$\int_0^a e^x\,dx = [e^x]_0^a = (e^a - 1) \text{ ବର୍ଗଏକକ ।}$$

ଉଦାହରଣ 27.14

ବକ୍ର $y = c\cos\left(\frac{x}{c}\right)$, x -ଅକ୍ଷ ଏବଂ $x = 0, x = a, 2a \le cx$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି $y = c\cos\left(\frac{x}{c}\right)$

$$\therefore \text{ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ } = \int_0^a y\,dx$$

$$= \int_0^a c\cos\left(\frac{x}{c}\right)dx$$

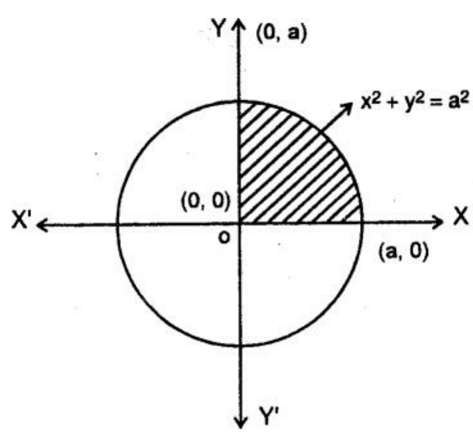
$$= c^2\left[\sin\left(\frac{x}{c}\right)\right]_0^a$$

$$= c^2\left(\sin\left(\frac{a}{c}\right) - \sin 0\right)$$

$$= c^2 \sin\left(\frac{a}{c}\right) \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$

ଉଦାହରଣ 27.15

$x^2 + y^2 = a^2$ ବୃତ୍ତ ଏବଂ x-ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ସୀମାବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 27.8

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି $x^2 + y^2 = a^2$, ଯାହାକି ଏକ ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ର $(0, 0)$ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ a । ଏଣୁ ଆମକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି $x = 0, x = a$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$$\therefore \text{ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ } = \int_0^a y\,dx$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad [\because \text{ ପ୍ରଥମ ପାଦରେ } y \text{ ଧନାତ୍ମକ}]$$

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \left[\because \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2},\ \sin^{-1}0 = 0\right]$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ ବର୍ଗଏକକ}$$

ଉଦାହରଣ 27.16 x-ଅକ୍ଷ, ଦତ୍ତ କୋଟି ଏବଂ ନିମ୍ନସ୍ଥ ବକ୍ର ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $xy = c^2,\ x = a,\ x = b,\ a > b > 0$

(ii) $y = \log_e x,\ x = a,\ x = b,\ b > a > 1$

ସମାଧାନ :

(i) ଏଠାରେ ଆମେ ଦତ୍ତ ବକ୍ର, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି $x = a$, $x = b$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହୁଁ ।

ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି $xy = c^2$ ବା $y = \frac{c^2}{x}$

$$\therefore \text{ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ } = \int_b^a y\, dx \qquad [\because\ a > b \text{ ଦତ୍ତ}]$$

$$= \int_b^a \frac{c^2}{x} dx$$

$$= c^2[\log x]_b^a = c^2(\log a - \log b) = c^2 \log\left(\frac{a}{b}\right)$$

(ii) ଏଠାରେ $y = \log_e x$

$$\therefore \text{ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ } = \int_a^b \log_e x\, dx \quad [\because\ b > a > 1]$$

$$= [x \log_e x]_a^b - \int_a^b x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= b\log_e b - a\log_e a - \int_a^b dx$$

$$= b\log_e b - a\log_e a - [x]_a^b$$

$$= b \log_e b - a \log_e a - b + a$$

$$= b (\log_e b - 1) - a(\log_e a - 1)$$

$$= b\log_e\left(\frac{b}{e}\right) - a\log_e\left(\frac{a}{e}\right) \quad [\because \log_e e = 1]$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.3

1. ବକ୍ର $y = x^2$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା $x = 0, x = 2$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

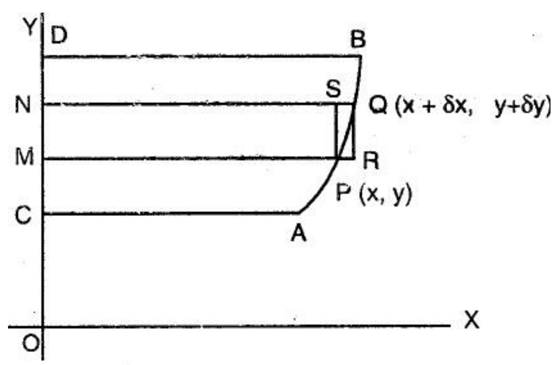
2. ବକ୍ର $y = 3x$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା $x = 0$ ଓ $x = 3$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ବକ୍ର $y = e^{2x}$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି $x = 0, x = a, a > 0$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. x-ଅକ୍ଷ, ବକ୍ର $y = c\sin\left(\frac{x}{c}\right)$ ଏବଂ କୋଟି $x = 0, x = a, 2a \le c\pi$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

27.4.2 ବକ୍ର $x = f(y)$, y-ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା $y = c, y = d$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ମନେକରାଯାଉ ବକ୍ର $x = f(y)$ ହେଉଛି AB ଏବଂ CA, DB ହେଉଛି ଯଥାକ୍ରମେ $y = c, y = d$ ଠାରେ ଭୁଜ । ମନେକରାଯାଉ ଉକ୍ତ ବକ୍ର ଉପରେ $P(x, y)$ ହେଉଛି ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ ହେଉଛି ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ । P ଓ Qରୁ y-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ ଲମ୍ବ PM ଓ QN ଅଙ୍କନ କର । y ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବା ସହ (ACMP)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଏଣୁ ଏହା ନିଶ୍ଚୟ yର ଏକ ଫଳନ । (ACMP)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ A ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଉ । ଫଳରେ (ACNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେବ $A + \delta A$ ।
(PMNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = (ACNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – (ACMP)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= A + \delta A - A = \delta A$



ଚିତ୍ର 27.9

PRQS ଆୟତଚିତ୍ରଟି ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍ଗ କର । ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା ଯେ (PMNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ, (PMNS)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଏବଂ (RMNQ)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ । ଅର୍ଥାତ୍

δA, $x\delta y$ ଏବଂ $(x+\delta x)\delta y$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

$\Rightarrow \frac{\delta A}{\delta y}$, x ଏବଂ $x+\delta x$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

ଚରମ ପରିସ୍ଥିତିରେ, ଯେତେବେଳେ $Q \to P$, ସେତେବେଳେ $\delta x \to 0$ ଏବଂ $\delta y \to 0$ ।

$\therefore \lim_{\delta y \to 0} \frac{\delta A}{\delta y}$, x ଏବଂ $\lim_{\delta x \to 0} (x+\delta x)$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ ।

$\Rightarrow \frac{dA}{dy} = x$

c ଓ d ସୀମା ମଧ୍ୟରେ, ଉଭୟ ପକ୍ଷର y ସାପେକ୍ଷ ସମାକଳନ ସମ୍ପାଦନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\int_c^d x\,dy = \int_c^d \frac{dA}{dy} \cdot dy = [A]_c^d$$

= (କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯେତେବେଳେ y = d) – (କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଯେତେବେଳେ y = c)

= (ACDB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – 0

= (ACDB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ଏଣୁ (ACDB)କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_c^d x\,dy = \int_c^d f(y)\,dy$

ବକ୍ର x = f(y), y ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା y = c, y = d ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

$\int_c^d x\,dy$ ବା $\int_c^d f(y)\,dy$

ଯେଉଁଠି x = f(y) ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏକ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନ ଏବଂ $c \le y \le d$ ଅନ୍ତରାଳରେ xର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 27.17

ବକ୍ର x = y, y- ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା y = 0, y = 3 ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି x = y ।

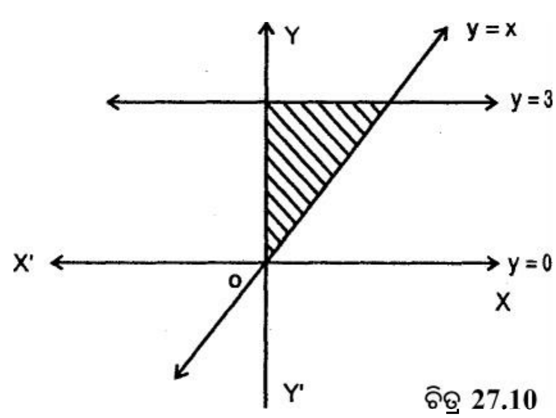
∴ ଦତ୍ତ ବକ୍ର, y- ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା y = 0, y = 3 ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= \int_0^3 x\,dy = \int_0^3 y\,dy$

$= \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^3$

$= \frac{9}{2} - 0$

$= \frac{9}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ ।



ଚିତ୍ର 27.10

ଉଦାହରଣ 27.18 ବକ୍ର $x = y^2$, y- ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା $y = 0$, $y = 2$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = y^2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ବକ୍ର, y-ଅକ୍ଷ ଏବଂ ରେଖା $y = 0$, $y = 2$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \int_0^2 y^2\,dy = \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{8}{3} - 0$$

$$= \frac{8}{3} \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$

ଉଦାହରଣ 27.19

ବୃତ୍ତ $x^2 + y^2 = a^2$ ଏବଂ y-ଅକ୍ଷ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ପ୍ରଥମପଦ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ବକ୍ର $x^2 + y^2 = a^2$ ହେଉଛି ଏକ ବୃତ୍ତ ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର $(0, 0)$ ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ a । ଏଣୁ ଆମକୁ ବୃତ୍ତ $x^2 + y^2 = a^2$, y-ଅକ୍ଷ ଏବଂ ଭୁଜ $y = 0$, $y = a$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

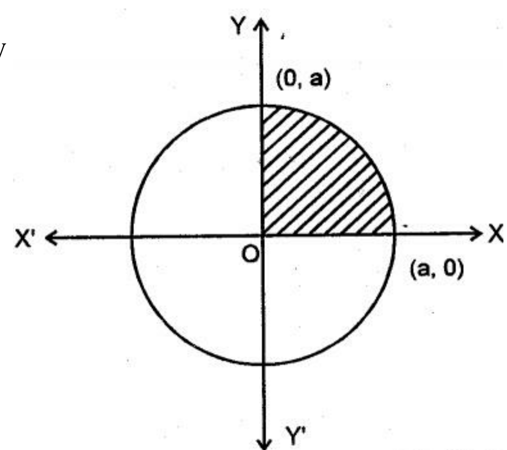
$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_0^a x\,dy = \int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy$

(କାରଣ, ପ୍ରଥମ ପାଦରେ x ଧନାତ୍ମକ)

$$= \left[\frac{y}{2}\sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= 0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0$$

$$= \frac{\pi a^2}{4} \text{ ବର୍ଗଏକକ} \left(\because \sin^{-1}0 = 0,\ \sin^{-1}1 = \frac{\pi}{2}\right)$$



ଚିତ୍ର 27.11

ଟୀକା : ଉଦାହରଣ 27.14ରେ ପାଇଥିବା କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ଏଠାରେ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ । କାରଣ, ଦତ୍ତ ବକ୍ର ହେଉଛି ଉଭୟ ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ (symmetrical) । ଏପରି ପ୍ରଶ୍ନରେ, ଆମକୁ ବକ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଥିଲେ, ଆମେ ବିନା ବାଧାରେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ପଦ୍ଧତିରେ ଦତ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ 27.20

ବୃତ୍ତ $x^2 + y^2 = a^2$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ସମଗ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

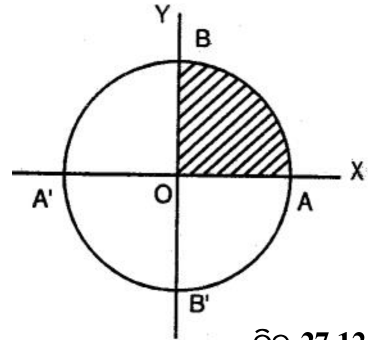
ସମାଧାନ : ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x^2 + y^2 = a^2$

ବୃତ୍ତ ଉଭୟ ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ । ଏଣୁ ସମଗ୍ର ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି ବୃତ୍ତର ପ୍ରଥମ ପାଦର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଚାରିଗୁଣ, ଅର୍ଥାତ୍

ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4 \times$ OABର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= 4 \times \dfrac{\pi a^2}{4}$ (ଉଦାହରଣ 27.15 ଓ 27.19 ରୁ)

$= \pi a^2$ ବର୍ଗଏକକ



ଚିତ୍ର **27.12**

ଉଦାହରଣ 27.21 ଉପବୃତ୍ତ (ellipse) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ର ସମଗ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଉପବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

ଉପବୃତ୍ତଟି ଉଭୟ ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ । ଏଣୁ ଉପବୃତ୍ତର ସମଗ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି ଏହାର ପ୍ରଥମ ପାଦର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଚାରିଗୁଣ । ଅର୍ଥାତ୍

ଉପବୃତ୍ତର ସମଗ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $4 \times$ (OAB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ପ୍ରଥମ ପାଦରେ, $\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$ ବା $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ (OAB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ପାଇଁ x, 0 ରୁ a ମଧ୍ୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

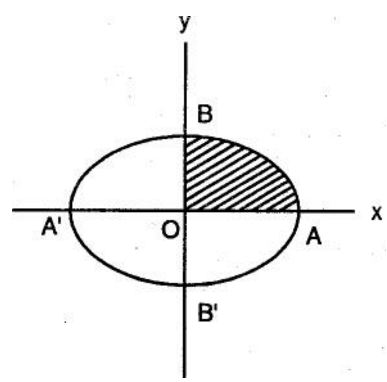
$\therefore$ (OAB)ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \displaystyle\int_0^a y\,dx$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}1 - 0 - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}0\right]$$

$$= \frac{ab\pi}{4}$$



ଚିତ୍ର **27.13**

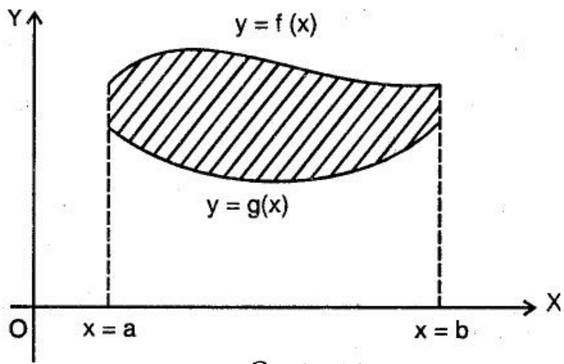
ଏଣୁ ଉପବୃତ୍ତର ସମଗ୍ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 4 \times \dfrac{ab\pi}{4} = \pi ab$ ବର୍ଗଏକକ

27.4.3 ଦୁଇଟି ବକ୍ର ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ f(x) ଓ g(x) ହେଉଛି ଦୁଇଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଣରଣାତ୍ମକ ଫଳନ, ଯେପରିକି ସମସ୍ତ $x \in [a, b]$ ଲାଗି $f(x) \geq g(x)$ । ଅର୍ଥାତ୍ $x \in [a, b]$ ମଧ୍ୟରେ $y = f(x)$ ବକ୍ର, $y = g(x)$

ବକ୍ରକୁ ନିମ୍ନରୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ । ଆମେ, ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ $y = f(x)$ ନିମ୍ନରେ $y = g(x)$ ଏବଂ ଦୁଇପାଖରେ $x = a$ ଓ $x = b$ ରେଖାଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଚାହୁଁ । ମନେକରାଯାଉ, A = [$y = f(x)$ ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ] – [$y = g(x)$ ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ] ... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ ବକ୍ର $y = f(x)$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି $x = a$, $x = b$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ, ଆମେ ପାଇବା $y = f(x)$ ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ



ଚିତ୍ର 27.14

$$= \int_a^b f(x)\,dx \quad ... (2)$$

ସେହପରି $y = g(x)$ ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_a^b g(x)\,dx \quad ... (3)$

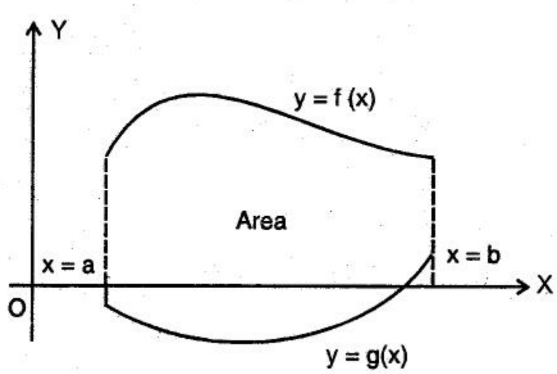
ସମୀକରଣ (2) ଓ (3)କୁ (1) ରେ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

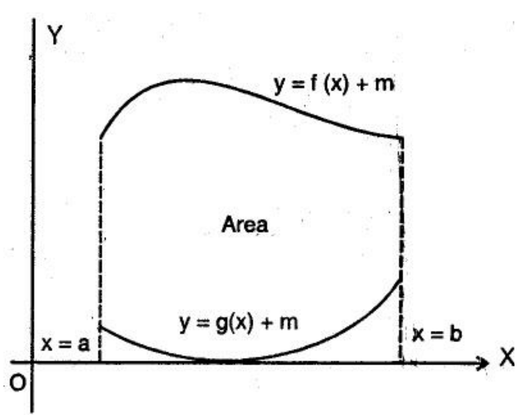
$$= \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx \quad ... (4)$$

ଯଦି ଫଳନ g ର ଋଣାତ୍ମକ ମାନ ଥାଏ, ତେବେ କ'ଣ ହେବ ? f(x) ଓ g(x) ଉଭୟକୁ ସ୍ଥାନାନ୍ତର କରି x-ଅକ୍ଷର ଉପରକୁ ଆଣିବା ଏବଂ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସୂତ୍ରର ସଂପ୍ରସାରଣ କରିବା । ଏହି କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ପାଇଁ ମନେକରିବା ଯେ [a, b] ମଧ୍ୟରେ g(x)ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ m (ଚିତ୍ର 27.15 ଦେଖ) ।

ଯେହେତୁ $g(x) \geq -m \Rightarrow g(x) + m \geq 0$



ଚିତ୍ର 27.15



ଚିତ୍ର 27.16

ବର୍ତ୍ତମାନ [a, b] ଉପରେ ଫଳନ $g(x) + m$ ଏବଂ $f(x) + m$ ଉଭୟ ଅଣଋଣାତ୍ମକ (ଚିତ୍ର 27.16 ଦେଖ) । ଅନ୍ତଃଜ୍ଞାନ ଲବ୍ଧ ଧାରଣାରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ କ୍ଷେତ୍ରର ସ୍ଥାନାନ୍ତରଣ ଦ୍ୱାରା ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟେ ନାହିଁ । ଏଣୁ,

f ଓ g ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A, g(x) + m ଏବଂ f(x) + m ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ । ଫଳରେ

A = [y = (f(x) + m]ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ] – [y = [g(x) + m]ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ] ... (5)

ବର୍ତ୍ତମାନ ବକ୍ର y = f(x), x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି x = a, x = b ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସଂଜ୍ଞାର ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ପାଇବା

y = f(x) + m ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_a^b [f(x)+m]dx$ ... (6)

ଏବଂ y = g(x) + m ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_a^b [g(x)+m]dx$ ... (7)

ସମୀକରଣ (6), (7) ଓ (5) ରୁ ପାଇବା

$$A = \int_a^b [f(x)+m]dx - \int_a^b [g(x)+m]dx$$

$$= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

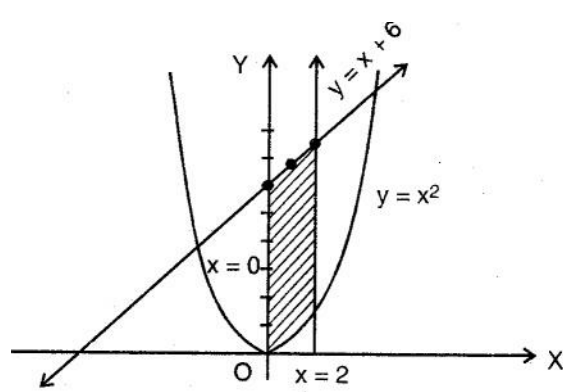
ଯାହାକି (4)ରେ ପାଇଥିବା ଫଳ ସହ ସମାନ । ଏଣୁ

ଯଦି ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ଉପରେ f(x) ଓ g(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ହୋଇଥା'ନ୍ତି ଏବଂ $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a, b]$, ତେବେ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ y = f(x), ନିମ୍ନରେ y = g(x), ବାମରେ x = a ଏବଂ ଡାହାଣରେ x = b ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ଅଞ୍ଚଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

ଉଦାହରଣ 27.22

ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ y = x + 6, ନିମ୍ନରେ $y = x^2$ ଏବଂ ପାଖରୁ x = 0 ଓ x = 2 ରେଖାଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ଅଞ୍ଚଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : y = x + 6 ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ଏବଂ $y = x^2$ ହେଉଛି ଏକ ପାରାବୋଲା ଯାହାକି y-ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ ଓ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ତା'ର ଶୀର୍ଷ । ଅଞ୍ଚଳଟି ମଧ୍ୟ x = 0 ଓ x = 2 ରେଖାଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ ।



ଚିତ୍ର 27.17

ଏଣୁ $A = \int_0^2 (x+6)\,dx - \int_0^2 x^2\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

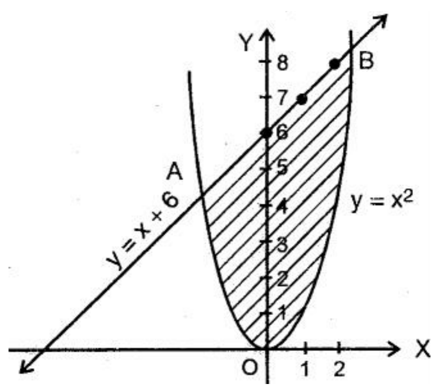
$$= \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3}$$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଯଦି ବକ୍ର ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦକରନ୍ତି, ତାହା ହେଲେ ଆବଦ୍ଧ ଅଞ୍ଚଳର ପାଖ ଦୁଇଟିରେ, ବକ୍ର ଦୁଇଟିର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିଥା'ନ୍ତି । ପାଖ ଦୁଇଟିରେ କୌଣସି ରେଖା ରହିନଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 27.23

ବକ୍ର $y = x^2$ ଏବଂ $y = x + 6$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ ଅଞ୍ଚଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $y = x^2$ ଏକ ପାରାବୋଲା ଯାହାକି y-ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ଏହାର ଶୀର୍ଷ । $y = x + 6$ ହେଉଛି ଏକ ସରଳରେଖା ଯାହାକି x-ଅକ୍ଷ ସହ 45^0 କୋଣ ଅଙ୍କନ କରେ ଏବଂ ଏହାର x-ଅକ୍ଷ ଓ x-ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଛେଦାଂଶ ଯଥାକ୍ରମେ –6 ଓ +6 (ଚିତ୍ର 27.18 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର **27.18**

ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ କ୍ଷେତ୍ରର ନିମ୍ନ ସୀମା ହେଉଛି $y = x^2$ ଏବଂ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ହେଉଛି $y = x + 6$ । ଏହି ବକ୍ରଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ପାଇବା

$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x-3)\,(x+2) = 0 \Rightarrow x = +3, -2$

ଯେତେବେଳେ $x = 3, y = 9$ ଏବଂ ଯେତେବେଳେ $x = -2, y = 4$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_{-2}^{3} [(x+6) - x^2]\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^3$$

$= \frac{27}{2} - \left(-\frac{22}{3}\right)$

$= \frac{125}{6}$ ବର୍ଗଏକକ

ଉଦାହରଣ 27.24

ବକ୍ର $y = x^2$ ଓ $y = x$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $y = x^2$ ହେଉଛି ଏକ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ । ଏହି ପାରାବୋଲା y-ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ ଓ ଏହାର ଶୀର୍ଷ ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ । $y = x$ ହେଉଛି ଏକ ସରଳରେଖା ଯାହାକି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅତିକ୍ରମ କରେ ଓ x-ଅକ୍ଷ ସହ 45^0 କୋଣ ଅଙ୍କନ କରେ (ଚିତ୍ର 27.19 ଦେଖ) ।

ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ କ୍ଷେତ୍ରର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ହେଉଛି $y = x$ ଏବଂ ନିମ୍ନ ସୀମା ହେଉଛି $y = x^2$ । ଏହି ବକ୍ର ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରକୁ O ଏବଂ A ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କରି ଆମେ ପାଉ

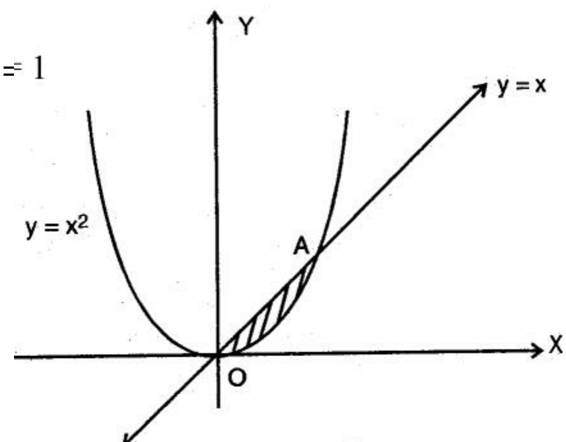
$x^2 = x \Rightarrow x(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0, 1$

ଏଠାରେ $f(x) = x, g(x) = x^2, a = 0, b = 1$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_0^1 (x - x^2)\,dx$

$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ବର୍ଗଏକକ

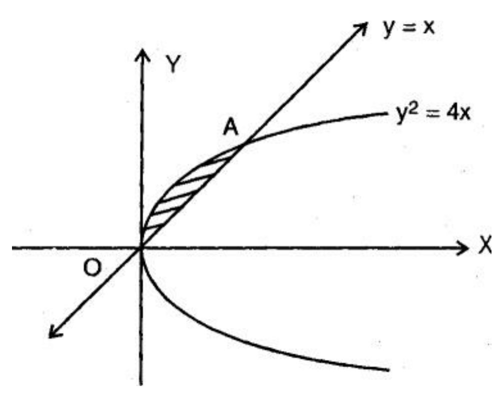


ଚିତ୍ର 27.19

ଉଦାହରଣ 27.25

ବକ୍ର $y^2 = 4x$ ଓ $y = x$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $y^2 = 4x$ ହେଉଛି ଏକ ପାରାବୋଲାର ସମୀକରଣ ଏବଂ ଏହି ପାରାବୋଲା x-ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ ଏବଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ଏହାର ଶୀର୍ଷ । $y = x$ ହେଉଛି ଏକ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ ଯାହା ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅତିକ୍ରମ କରେ, x-ଅକ୍ଷ ସହ 45^0 କୋଣ ଅଙ୍କନ କରି (ଚିତ୍ର 27.20 ଦେଖ) । ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରର ନିମ୍ନ ସୀମା ହେଉଛି $y = x$ ଏବଂ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ହେଉଛି $y^2 = 4x$ । ଏହି ବିକ୍ରଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ଏବଂ A ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କରିପାଇବା



ଚିତ୍ର 27.20

$\frac{y^2}{4} - y = 0 \Rightarrow y(y-4) = 0$

$\Rightarrow y = 0, 4$

ଯେତେବେଳେ $y = 0, x = 0$ ଏବଂ ଯେତେବେଳେ $y = 4, x = 4$ ।

ଏଠାରେ $f(x) = (4x)^{\frac{1}{2}}, g(x) = x, a = 0, b = 4$ ।

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$$= \int_0^4 \left(2x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^4 \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$

$$= \frac{32}{3} - 8$$

$$= \frac{8}{3} \text{ ବର୍ଗ ଏକକ}$$

ଉଦାହରଣ 27.26

ଦୁଇଟି ପାରାବୋଲା $x^2 = 4ay$ ଏବଂ $y^2 = 4ax$ର ସାଧାରଣ ଅଞ୍ଚଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $y^2 = 4ax$ ଏବଂ $x^2 = 4ay$ ହେଉଛି ଦୁଇଟି ପାରାବୋଲା ଏବଂ ସେ ଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ x-ଅକ୍ଷ ଓ y-ଅକ୍ଷ ସାପେକ୍ଷ ସମମିତ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାରାବୋଲାର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ମୂଳବିନ୍ଦୁ (ଚିତ୍ର 27.21 ଦେଖ) ।

ଚିତ୍ରରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର ନିମ୍ନ ସୀମା ହେଉଛି $x^2 = 4ay$ ଏବଂ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ହେଉଛି $y^2 = 4ax$ । ଏହି ବକ୍ରଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ A ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ସମୀକରଣଦ୍ୱୟକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା

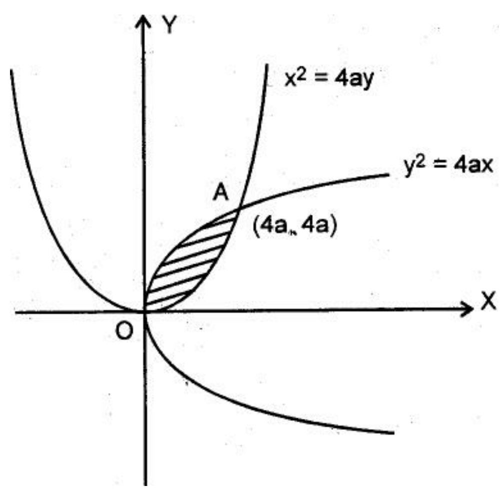
$$\frac{x^4}{16a^2} = 4ax$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 64a^3) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, 4a$$

ଏଣୁ ପାରାବୋଲା ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହେଉଛନ୍ତି

(0, 0) ଏବଂ (4a, 4a) ।



ଚିତ୍ର 27.21

ଏଠାରେ $f(x) = \sqrt{4ax}, g(x) = \frac{x^2}{4a}, a = 0$

ଏବଂ $b = 4a$

ଏଣୁ, ନିର୍ଣ୍ଣେୟ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \int_0^{4a} \left[\sqrt{4ax} - \frac{x^2}{4a}\right] dx$

$$= \left[\frac{2 \cdot 2\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{12a} \right]_0^{4a}$$

$$= \frac{32a^2}{3} - \frac{16a^2}{3}$$

$= \frac{16}{3}a^2$ ବର୍ଗ ଏକକ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.4

1. ବୃତ୍ତ $x^2 + y^2 = 9$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଉପବୃତ୍ତ $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. ଉପବୃତ୍ତ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ବକ୍ର $y^2 = 4ax$ ଏବଂ $y = \frac{x^2}{4a}$ ଦ୍ୱାରା ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ବକ୍ର $y^2 = 4x$ ଏବଂ $x^2 = 4y$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. ବକ୍ର $y = x^2$ ଏବଂ $y = x + 2$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଯଦି [a, b]ରେ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏକ [a, b]ରେ fର ପ୍ରତିଅବକଳଜ F, ତେବେ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

- ଯଦି [a, b]ରେ f ଏବଂ g ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ, ତେବେ

(i) $\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$

(ii) $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

- ବକ୍ର $f(x)$, x-ଅକ୍ଷ ଏବଂ କୋଟି $x = a$, $x = b$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

  $\int_a^b f(x)\,dx$ ବା $\int_a^b y\,dx$

  ଯେଉଁଠି $y = f(x)$ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏକ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନ ଏବଂ $a \le x \le b$ ଅନ୍ତରାଳରେ yର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ନାହିଁ ।

- ଯଦି $[a, b]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $f(x)$ ଓ $g(x)$ ଉଭୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ସମସ୍ତ $x \in [a, b]$ ଲାଗି $fx \ge g(x)$ ହୁଏ, ତେବେ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା $y = f(x)$, ନିମ୍ନସୀମା $y = g(x)$, ବାମ ପ୍ରାନ୍ତ $x = a$ ଓ ଦକ୍ଷିଣପ୍ରାନ୍ତ $x = b$ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି

  $$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

ପ୍ରଶ୍ନ 1 ରୁ 5 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ସମାକଳଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗର ସୀମା ନେଇ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

1. $\int_a^b x\,dx$ 2. $\int_a^b x^2\,dx$ 3. $\int_a^b \sin x\,dx$

4. $\int_a^b \cos x\,dx$ 5. $\int_0^2 (x^2 + 1)\,dx$

ନିମ୍ନରେ ଥିବା 6 ରୁ 24 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମାକଳଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

6. $\int_0^2 \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$ 7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$ 8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx$ 10. $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$ 11. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

12. $\int_3^4 \frac{1}{x^2-4}dx$

13. $\int_0^{\pi} \frac{1}{5+3\cos\theta}d\theta$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\tan^3 x\,dx$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$

16. $\int_0^2 x\sqrt{x+2}\,dx$

17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\cos^5\theta\,d\theta$

18. $\int_0^{\pi} x\log\sin x\,dx$

19. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$

20. $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\tan x)\,dx$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^5 2x\cos 2x\,dx$

24. $\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.1

1. $\frac{35}{2}$ 2. $e-\frac{1}{e}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ (b) 2 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{64}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.2

1. $\frac{e-1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 3. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

4. 29 5. $\frac{24\sqrt{2}}{15}$ 6. $\frac{\pi}{4}$ 7. $-\frac{\pi}{2}\log 2$

8. 0 9. 0 10. $\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\log 2\right]$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.3

1. $\frac{8}{3}$ ବର୍ଗ ଏକକ 2. $\frac{27}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ 3. $\frac{e^{2a}-1}{2}$ ବର୍ଗ ଏକକ

4. $c^2\left(1-\cos\frac{a}{c}\right)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 27.4

1. 9π ବର୍ଗ ଏକକ 2. 6π ବର୍ଗଏକକ 3. 20π ବର୍ଗଏକକ

4. $\frac{16}{3}a^2$ ବର୍ଗଏକକ 5. $\frac{16}{3}$ ବର୍ଗଏକକ 6. $\frac{9}{2}$ ବର୍ଗଏକକ

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $\frac{b^2-a^2}{2}$ 2. $\frac{b^3-a^3}{3}$ 3. $\cos a-\cos b$

4. $\sin b-\sin a$ 5. $\frac{14}{3}$ 6. $\frac{\pi a^2}{4}$

7. 1	8. $\frac{1}{2}\log 2$	9. $\frac{\pi}{4}$
10. $\frac{\pi}{2}-1$	11. $\frac{\pi}{2}$	12. $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$
13. $\frac{\pi}{4}$	14. $1-\log 2$	15. $\frac{2}{3}$
16. $\frac{16}{15}\left(2+\sqrt{2}\right)$	17. $\frac{64}{231}$	18. $-\frac{\pi^2}{2}\log 2$
19. $-\pi \log 2$	20. $\frac{\pi^2}{4}$	21. $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(1+\sqrt{2}\right)$
22. $\frac{\pi}{8}\log 2$	23. $\frac{1}{96}$	24. 78