୨୬

ସମାକଳନ

ପୂର୍ବପାଠରେ ତୁମେ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଶିକ୍ଷା କରିଥିଲ । ତୁମେ ମଧ ବିଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଅବକଳଜର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଥିଲ । ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଅବକଳଜ (ଫଳନ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ) ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ମୂଳ ଫଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଭଳି ବିପରୀତ ସମସ୍ୟା କଥା ଆସ ବିଚାର କରିବା । ଏହି ବିପରୀତ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ସମାକଳନ (Integration) କୁହାଯାଏ । ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ସମାକଳନ ଓ ସମାକଳନ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିଭିନ୍ନ ପଦ୍ଧତି ଓ କୌଶଳ ଶିକ୍ଷା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ସମାକଳନକୁ ଅବକଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ପ୍ରକ୍ରିୟା ରୂପେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବ;
- x^n, sin x, cos x, $\sec^2 x$, $\text{cosec}^2 x$, sec x tan x, cosec x cot x, $\frac{1}{x}$, e^x ଆଦି ଭଳି ସରଳ ଫଳନର ସମାକଳ (Integral) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ନିମ୍ନ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକୁ କହିବାରେ ସକ୍ଷମ ହେବ;

  (i) $\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

  (ii) $\int[\pm kf(x)]dx = \pm k\int f(x)\,dx;$
- ବୀଜଗଣିତୀୟ, ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ, ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ, ଏବଂ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଫଳନର ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ପ୍ରଣାଳୀ ଦ୍ୱାରା ଫଳନମାନଙ୍କର ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ସମାକଳମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ :

$$\int\frac{dx}{x^2 \pm a^2}, \int\frac{dx}{a^2 - x^2}, \int\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}, \int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \int\frac{dx}{ax^2 + bx + c},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}, \int\frac{(px + q)dx}{ax^2 + bx + c}, \int\frac{(px + q)\,dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

- $\int\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C$ ଫଳାଫଳର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି କରିବା ସହ ତା'ର ଉପଯୋଗ କରିପାରିବ;

- ଖଣ୍ଡଶଃ ସମାକଳନ (integration by parts) ପ୍ରଣାଳୀକୁ କହିପାରିବ ଓ ତା'ର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ;
- ନିମ୍ନ ପ୍ରକାର ସମାକଳମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ :

$$\int\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx,\ \int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx,\ \int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx,\ \int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx,$$

$$\int \sin^{-1}x\,dx,\ \int\cos^{-1}x\,dx, \int\sin^n x\cos^m x\,dx,$$

$$\int\frac{dx}{a+b\sin x}, \int\frac{dx}{a+b\cos x}$$

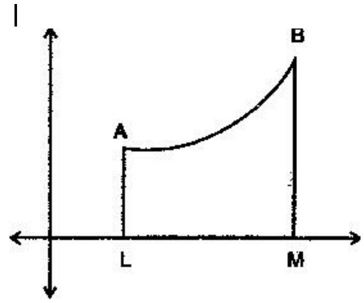
- ଫଳାଫଳ $\int e^x[f(x)+f'(x)]dx = e^x f(x)+c$ ର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି ତଥା ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ; ଏବଂ
- ଆଂଶିକ ଭଗ୍ନାଂଶ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶମାନଙ୍କର ସମାକଳନ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ବିଭିନ୍ନ ଫଳନର ଅବକଳନ
- ସମତଳ-ଜ୍ୟାମିତର ମୌଳିକ ଧାରଣା
- ବୀଜଗଣିତୀୟ ପରିପ୍ରକାଶର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ
- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନ

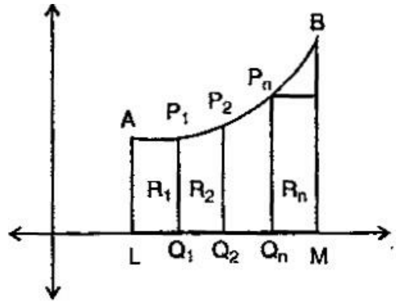
26.1 ସମାକଳନ

'ସମାକଳନ'ର ଆକ୍ଷରିକ ଅର୍ଥ ହେଉଛି ସଂକଳନ (ବା ଯୋଗ) । ଚିତ୍ର 26.1ରେ ଥିବା ALMB କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପ୍ରଶ୍ନକୁ ବିଚାର କର ।



ଚିତ୍ର **26.1**

ଆମେ ଏକ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ପ୍ରଣାଳୀ ଉପଯୋଗ କରି ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ମାତ୍ର ଏହା ଆମକୁ ସବୁକ୍ଷେତ୍ରରେ ସାହାଯ୍ୟ କରିନପାରେ । ଏପ୍ରକାର ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ସମାକଳନ (ସଂଯୋଗୀକରଣ) ପଦ୍ଧତିର ସାହାଯ୍ୟ ନେବା । ଏଥିପାଇଁ ଆମେ କ୍ଷେତ୍ରଟିକୁ ଛୋଟ ଛୋଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ କରିବା (ଚିତ୍ର 26.2 ଦେଖ ।



ଚିତ୍ର **26.2**

ଯେ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଏହି ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରସ୍ଥ ନ୍ୟୁନତମ ଅପେକ୍ଷା ନ୍ୟୁନତର (ଅର୍ଥାତ୍ $\to 0$) ନ ହୋଇଛି, ଆମେ ସେ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଉକ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଗୁଡ଼ିକର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ନାହିଁ ।

ଦୁଇ ହଜାର ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଆର୍କିମେଡିଜ୍ ଏହି କୌଶଳ ବ୍ୟବହାର କରି କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଆୟତନ ଆଦି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥିଲେ । ଆଜିର କଳନ - ଗଣିତର ସୃଷ୍ଟି ସହ ନ୍ୟୁଟନ୍ (1642-1727) ଏବଂ ଲିବ୍‌ନିଜ୍ (1646-1716) ନାମ ଦୁଇଟିକୁ ପ୍ରାୟ ସଂଯୋଗ କରାଯାଇଥାଏ ।

କଳନ ଗଣିତରେ ସମାକଳନ ହେଉଛି ଫଳନମାନଙ୍କର ସମାକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଅଧ୍ୟୟନ । ଜ୍ୟାମିତି, ଯନ୍ତ୍ରବିଜ୍ଞାନ, ପ୍ରାକୃତିକ ବିଜ୍ଞାନ ଓ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଏହି ବିଦ୍ୟାର ବହୁଳ ଉପଯୋଗ କରାଯାଏ ।

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ବହୁପଦୀ, ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ, ଘାତାଙ୍କୀୟ, ଲଘୁଗଣକୀୟ ଓ ପରିମେୟ ଫଳନମାନଙ୍କର ସମାକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସମକଳନର ବିଭିନ୍ନ କୌଶଳ ଉପଯୋଗ କରିବାକୁ ଶିଖିବା ।

26.2 ସମାକଳନ : ଅବକଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ପ୍ରକ୍ରିୟା

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର :

(i) $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (iii) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

ଆସ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ଭିନ୍ନ ଦୃଷ୍ଟିକୋଣରୁ ବିଚାର କରିବା :

(i) x^2 ର ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ଫଳନ 2x ମିଳିଲା ।

$\Rightarrow$ x^2କୁ 2xର ପ୍ରତିଅବକଳଜ (anti derivative) / କୁହାଯାଏ ।

(ii) sin x ର ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା cos x ମିଳିଥାଏ ।

$\Rightarrow$ sin xକୁ cos xର ପ୍ରତିଅବକଳଜ (anti derivative) କୁହାଯାଏ ।

(iv) ସେହିପରି e^xକୁ e^xର ପ୍ରତିଅବକଳଜ କୁହାଯାଏ ।

ସାଧାରଣତଃ ପ୍ରତିଅବକଳଜ ଧାରଣାକୁ ଆମେ ଏକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିଥାଉ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମାକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କୁହାଯାଏ । ଆମେ ଲେଖୁ

1. 2x ର ସମାକଳନ x^2 2. cos x ର ସମାକଳନ sin x

3. e^x ର ସମାକଳନ e^x

ସମାକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ସୂଚାଉଥିବା ସଙ୍କେତ ହେଉଛି $\int$ ଏଣୁ

1. $\int 2x\,dx = x^2$ 2. $\int \cos x\,dx = \sin x$ 3. $\int e^x\,dx = e^x$

ମନେରଖ ଯେ $\int$ ଚିହ୍ନ ସହ 'dx' ସଙ୍କେତକୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଏହା ସମାକଳନ (intergral) ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବୁଝାଇଥାଏ ।

ସମାକଳନ ଲାଗି ନିଆଯାଉଥିବା ଫଳନକୁ $\int$ ଓ dx ମଧ୍ୟରେ ଲେଖାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$, ତେବେ $f(x)$କୁ $f'(x)$ର ସମାକଳ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ $\int f'(x)\,dx = f(x)$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଏଠାରେ ସମାକଳିତ ହୋଇଥିବା ଫଳନ $f'(x)$କୁ ସମାକଲ୍ୟ (intergrand) କୁହାଯାଏ ।

ସମାକଳନର ଧ୍ରୁବକ :

$$y = x^2 \text{ ହେଲେ, } \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \int 2x\,dx = x^2$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{d}{dx}(x^2+2)$ ବା $\frac{d}{dx}(x^2+c)$ କଥା ବିଚାର କର, ଯେଉଁଠି c ଏକ ବାସ୍ତବ ଧ୍ରୁବକ । ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମାନ ଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଯାହାକି 2x । ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ 2xର ସମାକଳ ଅନନ୍ୟ ନୁହେଁ । $\int 2x\,dx$ ର ମାନଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାର୍ଥକ୍ୟ ହେଉଛି କେବଳ ଧ୍ରୁବକ । ଏଣୁ $\int 2x\,dx = x^2 + c$ ଯେଉଁଠି cକୁ ସମାକଳନର ଧ୍ରୁବକ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଏହି କାରଣରୁ $\int e^x\,dx = e^x + c$, $\int \cos x\,dx = \sin x + c$ ସାଧାରଣ ଭାବରେ, $\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ ଧ୍ରୁବକ cର ମାନ ଯେକୌଣସି ଧ୍ରୁବକ ହୋଇପାରେ । ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ

ଏକ ସମାକଳର ଅବକଳଜ, ସମାକଲ୍ୟ ସହ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ।

ଟୀକା : $\int f(x)\,dx$, $\int f(y)\,dy$, $\int f(z)\,dz$ ଅର୍ଥପୂର୍ଣ୍ଣ ହୋଇଥାଏ, ମାତ୍ର $\int f(z)\,dx$ ଅର୍ଥହୀନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 26.1

ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) x^3 (ii) x^{30} (iii) x^n

ସମାଧାନ :

(i) $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$, ଯେହେତୁ, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = \frac{4x^3}{4} = x^3$

(ii) $\int x^{30}\,dx = \frac{x^{31}}{31} + c$, ଯେହେତୁ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{31}}{31}\right) = \frac{31x^{30}}{31} = x^{30}$

(iii) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, ଯେହେତୁ $\frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}\cdot(n+1)\,x^n = x^n$

ଉଦାହରଣ 26.2

(i) $\frac{dy}{dx} = \cos x$, ହେଲେ, y ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଯଦି $\frac{dy}{dx} = \sin x, y$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $\int \frac{dy}{dx} dx = \int \cos x \, dx \Rightarrow y = \sin x + C$

(ii) $\int \frac{dy}{dx} dx = \int \sin x \, dx \Rightarrow y = -\cos x + C$

26.3 ସରଳ ଫଳନର ସମାକଳନ

ଆମେ ଦେଖିଛୁ ଯେ ଯଦି $f'(x)$ର କୌଣସି ସମାକଳ $f(x)$ ହୁଏ, ତେବେ $f'(x)$ର ସମାକଳ $f(x) + c$ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନ ହୋଇଥାଏ । ଏକଥା ଆଉଥରେ କୁହାଯାଉଛି ଯେ c ଯେକୌଣସି ଧ୍ରୁବକ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ, ଏପରିକି 0 ମଧ୍ୟ ହୋଇପାରେ ।

$$\int f'(x) = f(x) + c$$

ଯାହାକି ଏକ ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ହୁଏ । C ର ମାନ ନିଶ୍ଚିତ ହେଲେ କେବଳ ଉକ୍ତ ସମାକଳ ନିଶ୍ଚିତ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 26.3

$\int 4x^3 dx$ ର 4 ଗୋଟି ଭିନ୍ନ ମାନ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $\int 4x^3 dx = x^4 + c$ ଯେଉଁଠି c ଏକ ଧ୍ରୁବକ $\int 4x^3 dx$ ର 4 ଗୋଟି ଭିନ୍ନମାନ ହୋଇପାରେ $x^4 + 1$, $x^4 + 2$, $x^4 + 3$ ଏବଂ $x^4 + 4$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ନିମ୍ନରେ କେତେକ ସରଳ ଫଳନର ସମାକଳ ଦତ୍ତ ଅଛି । ଏହି ସମାକଳମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତାକୁ ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ ସମାକଳର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟକରି ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳ ସମାକଲ୍ୟ ସହ ସମାନ ବୋଲି ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

	ସମାକଳ	**ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ**
1.	$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\because \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = x^n$ ଯେଉଁଠି $n \neq -1$
2.	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x$
3.	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$
4.	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x$
5.	$\int \mathrm{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\cot x + C) = \mathrm{cosec}^2 x$
6.	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$	$\because \frac{d}{dx}(\sec x + C) = \sec x \tan x$
7.	$\int \mathrm{cosec}\, x \cot x \, dx = -\mathrm{cosec}\, x + C$	$\because \frac{d}{dx}(-\mathrm{cosec}\, x + C) = \mathrm{cosec}\, x \cot x$

8. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sin^{-1}x + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x + C) = \frac{1}{1+x^2}$

10. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \sec^{-1}x + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}(\sec^{-1}x + C) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

11. $\int e^x dx = e^x + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$

12. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a} + C\right) = a^x$

13. $\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$ $\quad \because \frac{d}{dx}(\log|x| + C) = \frac{1}{x}$ ଯଦି $x \neq 0$

ସମାଧାନ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ

1. x^nର ସମାକଳ ପାଇବା ପାଇଁ, xର ଘାତାଙ୍କକୁ 1 ବଢାଅ, ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳକୁ ନୂତନ ଘାତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକର ଏବଂ ଧ୍ରୁବକ ଯୋଗକର ।

2. $\int \frac{1}{f(x)}dx$ କୁ ଅନେକ ସମୟରେ $\int \frac{dx}{f(x)}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 26.1

1. $\int x^{\frac{5}{2}} dx$ ର ଯେକୌଣସି ପାଞ୍ଚଟି ଭିନ୍ନ ମାନ ଲେଖ ।

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲାଗି ଅନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମାକଳ ଲେଖ :

(a) x^5 (b) $\cos x$ (c) 0

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int x^6 dx$ (b) $\int x^{-7} dx$ (c) $\int \frac{1}{x} dx$ (d) $\int 3^x 5^{-x} dx$

(e) $\int \sqrt[3]{x}\, dx$ (f) $\int x^{-9} dx$ (g) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (h) $\int \sqrt[9]{x^{-8}}\, dx$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} d\theta$ (b) $\int \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta$

(c) $\int \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$ (d) $\int \frac{1}{\sin^2\theta} d\theta$

26.4 ସମାକଳମାନଙ୍କର ଧର୍ମ

ଯଦି କୌଣସି ଫଳନକୁ ଦୁଇ ବା ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ଫଳନର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ଲେଖିବା ସମ୍ଭବ ହୁଏ, ତେବେ ଏପରି ଏକ ଫଳନର ସମାକଳକୁ ଉକ୍ତ ଫଳନର ସମସ୍ତ ଅଂଶମାନଙ୍କର ସମାକଳର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଯଦି $f(x) = x^7 + x^3$ ହୁଏ, ତେବେ

$$\int f(x)\,dx = \int [x^7 + x^3]\,dx$$

$$= \int x^7\,dx + \int x^3\,dx$$

$$= \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} + C$$

ଏଣୁ, ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଦୁଇଟି ଫଳନର ସମଷ୍ଟିର ସମାକଳ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଫଳନଦ୍ୱୟର ସମାକଳର ସମଷ୍ଟି ସହ ସମାନ ।

$$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

ସେହିପରି, ଯଦି ଦତ୍ତ ଫଳନ

$f(x) = x^7 - x^2$

ତେବେ ଆମେ ଲେଖୁ $\int f(x)\,dx = \int (x^7 - x^2)\,dx$

$$= \int x^7\,dx - \int x^2\,dx$$

$$= \frac{x^8}{8} - \frac{x^3}{3} + C$$

ଦୁଇଟି ଫଳନର ବିୟୋଗର ସମାକଳ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଫଳନ ଦ୍ୱୟର ସମାକଳର ବିୟୋଗ ସହ ସମାନ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\int [f(x) - g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

ଯଦି ଏକ ଫଳନ $f(x)$, ଏକ ଧ୍ରୁବକ (k)ଏବଂ ଅନ୍ୟ ଏକ ଫଳନ $[g(x)]$ର ଗୁଣନ ହୋଇଥାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $f(x) = kg(x)$, ତେବେ ଆମେ $f(x)$ର ସମାକଳନ ନିମ୍ନ ମତେ କରୁ ।

$$\int kf(x) = k\int f(x)\,dx$$

ଉଦାହରଣ 26.4

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int 4^x\,dx$ (ii) $\int (2^x)(3^{-x})\,dx$

ସମାଧାନ : (i) $\int 4^x\,dx = \dfrac{4^x}{\log 4} + c$ (ii) $\int (2)^x\,(3^{-x})\,dx = \int \dfrac{2^x}{3^x}\,dx = \int \left(\dfrac{2}{3}\right)^x dx$

$$= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + C$$

ମନେରଖ, (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ କହିବା ଠିକ୍ ହେବ ନାହିଁ ଯେ

$$\int 2^x\,3^{-x}\,dx = \int 2^x\,dx \int 3^{-x}\,dx$$

କାରଣ, $\int 2^x\,dx \int 3^{-x}\,dx = \dfrac{2^x}{\log 2}\left(\dfrac{3^{-x}}{\log 3}\right) + C \neq \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} + C$

ଏଣୁ, ଦୁଇଟି ଫଳନର ଗୁଣନର ସମାକଳ, ସର୍ବଦା ଉକ୍ତ ଫଳନ ଦ୍ୱୟର ସମାକଳର ଗୁଣନ ସହ ସମାନ ହୁଏ ନାହିଁ । ଆମେ ଏକାଧିକ ଫଳନର ଗୁଣନର ସମାକଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ପାଠରେ ପଢ଼ିବା ।

ଉଦାହରଣ 26.5

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \dfrac{dx}{\cos^n x}$, ଯେତେବେଳେ $n = 0$ ଏବଂ $n = 2$

(ii) $\int -\dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta$

ସମାଧାନ : (i) ଯେତେବେଳେ $n = 0$, $\int \dfrac{dx}{\cos^n x} = \int \dfrac{dx}{\cos^0 x} = \int \dfrac{dx}{1} = \int dx$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\int dx$ କୁ ଲେଖାଯାଇପାରେ $\int x^0\,dx$

$$\therefore \int dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + c = x + c$$

ଯେତେବେଳେ $n = 2$,

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \sec^2 x\,dx$$

$$= \tan x + c$$

(ii) $\int -\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int \frac{-1}{\sin^2\theta}d\theta$

$= -\int \text{cosec}^2\theta\, d\theta$

$= \cot\theta + c$

ଉଦାହରଣ 26.6 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int(\sin x+\cos x)\,dx$ (ii) $\int \frac{x^2+1}{x^3}dx$

(iii) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}dx$ (iv) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$

ସମାଧାନ : (i) $\int(\sin x+\cos x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx = -\cos x + \sin x + c$

(ii) $\int \frac{x^2+1}{x^3}dx = \int\left(\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)dx = \int\frac{1}{x}dx + \int\frac{1}{x^3}dx$

$= \log|x| + \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$

$= \log|x| - \frac{1}{2x^2} + C$

(iii) $\int \frac{1-x}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{x}{\sqrt{x}}\right)dx$

$= \int\left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx$

$= 2\sqrt{x} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

(iv) $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = \int\frac{dx}{1+x^2} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \tan^{-1}x - \sin^{-1}x + C$

ଉଦାହରଣ 26.7 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int\sqrt{1-\sin 2\theta}\,d\theta$ (ii) $\int\left(4e^x - \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right)dx$

(iii) $\int(\tan x+\cot x)^2\,dx$ (iv) $\int\left(\frac{x^6-1}{x^2+1}\right)dx$

ସମାଧାନ : (i) $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta}$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

$= \sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2} = \pm(\cos\theta - \sin\theta)$

[θର ମାନ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରି ଚିହ୍ନ (+ ବା –) ସ୍ଥିର କରାଯିବ]

(a) ଯଦି $\sqrt{1-\sin 2\theta} = \cos\theta - \sin\theta$

ତେବେ, $\int \sqrt{1-\sin 2\theta} = \int (\cos\theta - \sin\theta)\, d\theta$

$= \int \cos\theta\, d\theta - \int \sin\theta\, d\theta$

$= \sin\theta + \cos\theta + C$

(b) ଯଦି $\sqrt{1-\sin 2\theta} = -(\cos\theta - \sin\theta) = -\cos\theta + \sin\theta$

ତେବେ, $\int \sqrt{1-\sin 2\theta}\, d\theta = \int (-\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta$

$= -\int \cos\theta\, d\theta + \int \sin\theta\, d\theta$

$= -\sin\theta - \cos\theta + C$

(ii) $\int \left(4e^x - \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\right) dx = \int 4e^x\, dx - \int \frac{3}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$

$= 4\int e^x\, dx - 3\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

$= 4e^x - 3\sec^{-1}x + C$

(iii) $\int (\tan x + \cot x)^2 dx = \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x \cot x)\, dx$

$= \int (\tan^2 x + \cot^2 x + 2)\, dx$

$= \int (\tan^2 x + 1 + \cot^2 x + 1)\, dx$

$= \int (\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)\, dx$

$= \int \sec^2 x\, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx$

$= \tan x - \cot x + C$

(iv) $\int \left(\frac{x^6-1}{x^2+1}\right) dx = \int \left(x^4 - x^2 + 1 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx$ [x^6-1 କୁ x^2+1 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି]

$= \int x^4\, dx - \int x^2\, dx + \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1}$

$= \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + x - 2\tan^{-1}x + C$

ଉଦାହରଣ 26.8 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx$ (ii) $\int\left(\frac{4e^{5x}-9e^{4x}-3}{e^{3x}}\right)dx$ (iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

ସମାଧାନ : (i) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 dx=\int\left(x^{3/2}+3x\frac{1}{\sqrt{x}}+3\sqrt{x}\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}\right)dx$

$$=\int x^{\frac{3}{2}}dx+3\int\sqrt{x}\,dx+3\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+\int\frac{dx}{x^{3/2}}$$

$$=\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$$

$$=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}+C$$

(ii) $\int\left(\frac{4e^{5x}-9e^{4x}-3}{e^{3x}}\right)dx=\int\frac{4e^{5x}}{e^{3x}}dx-\int\frac{9e^{4x}}{e^{3x}}dx-\int\frac{3dx}{e^{3x}}$

$$=4\int e^{2x}dx-9\int e^{x}dx-3\int e^{-3x}dx$$

$$=2e^{2x}-9e^{x}+e^{-3x}+c$$

(iii) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

[ଆସ ପ୍ରଥମେ ସମାକଳ୍ୟର ହରକୁ ପରିମେୟ ରାଶିରେ ପରିଣତ କରିବା]

$$\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\times\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)}$$

$$=\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}=\int\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{a-b}dx$$

$$=\int\frac{\sqrt{x+a}}{a-b}dx-\int\frac{\sqrt{x+b}}{a-b}dx$$

$$=\frac{1}{a-b}\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{a-b}\frac{(x+b)^{3/2}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{2}{3(a-b)}\left[(x-a)^{3/2}-(x+b)^{3/2}\right]+C$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 26.2

1. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int\left(x+\frac{1}{2}\right)dx$ (b) $\int\frac{-x^2}{1+x^2}dx$

(c) $\int\left(10x^9-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$ (d) $\int\left(\frac{5+3x-6x^2-7x^4-3x^6}{x^6}\right)dx$

(e) $\int\frac{x^4}{1+x^2}dx$ (f) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^2dx$

2. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int\frac{dx}{1+\cos 2x}$ (b) $\int\tan^2x\,dx$ (c) $\int\frac{2\cos x}{\sin^2 x}dx$

(d) $\int\frac{dx}{1-\cos 2x}$ (e) $\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$ (f) $\int(\operatorname{cosec}x-\cot x)\operatorname{cosec}x\,dx$

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$ (b) $\int\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ (c) $\int\frac{1}{1-\cos 2x}\,dx$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int\sqrt{x+2}\,dx$ (b) $\int\frac{17}{(x+1)^{17}}dx$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1}=(n+1)a(ax+b)^n$$

$$\Rightarrow(ax+b)^n=\frac{1}{(n+1)a}\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1},n\neq-1$$

$$\int(ax+b)^n\,dx=\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}+C$$

$(ax+b)^n$ର ସମାକଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ଘାତାଙ୍କକୁ ଏକ ବୃଦ୍ଧିକର ଏବଂ ପ୍ରାପ୍ତଫଳକୁ ବୃଦ୍ଧିପ୍ରାପ୍ତ ଘାତାଙ୍କ ଓ x ର ସହଗର ଗୁଣଫଳ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକର । ମିଳିଥିବା ଫଳ ସହ ସମାକଳନର ଧ୍ରୁବକ ଯୋଗକର ।

ଉଦାହରଣ 26.9

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମାକଳନ କର :

(i) $(x+9)^{11}$ (ii) e^{x+7} (iii) $\cos(x+5\pi)$ (iv) $\operatorname{cosec}^2(2x+3)$

ସମାଧାନ : (i) $\int (x+9)^{11}\,dx = \dfrac{(x+9)^{11+1}}{11+1} + C$

$$= \frac{(x+9)^{12}}{12} + C$$

(ii) $\int e^{x+7}\,dx = \int e^{x} \cdot e^{7}\,dx$

$= e^{7}\int e^{x}\,dx$ [$\because$ e^{7} ଏକ ଧ୍ରୁବକ]

$= e^{7}\cdot e^{x} + c = e^{x+7} + C$

(iii) $\int \cos(x+5\pi)\,dx = \sin(x+5\pi) + C$

$$\left[\because \frac{d}{dx}(\sin(x+5\pi)+c) = \cos(x+5\pi)\cdot\frac{d}{dx}(x+5\pi) = \cos(x+5\pi)\right]$$

(iv) $\int \text{cosec}^{2}(2x+3)\,dx = \dfrac{-\cot(2x+3)}{2} + C$

$$\left[\because \frac{d}{dx}\frac{(-\cot(2x+3))}{2} + C\right] = -2\left(\frac{-\text{cosec}^{2}(2x+3)}{2}\right) = \text{cosec}^{2}(2x+3)$$

ଉଦାହରଣ 26.10

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int (2x+5)(x-1)\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

ସମାଧାନ : $\int (2x+5)(x-1)\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx = \int (2x^{2}+3x-5)\,x^{\frac{-2}{3}}\,dx$

$$= \int\left(2x^{2-\frac{2}{3}} + 3x^{1-\frac{2}{3}} - 5x^{\frac{-2}{3}}\right)dx$$

$$= 2\int x^{\frac{4}{3}}\,dx + 3\int x^{\frac{1}{3}}\,dx - 5\int x^{\frac{-2}{3}}\,dx$$

$$= 2\frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} + 3\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - 5\frac{x^{\frac{-2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + c$$

$$= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{9}{4}x^{\frac{4}{3}} - 15x^{\frac{1}{3}} + c$$

ଉଦାହରଣ 26.11 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int \dfrac{x^{2}e^{x} + (x+1)^{2}}{x^{2}}\,dx$

ସମାଧାନ : $\int \frac{x^2e^x + (x+1)^2}{x^2} dx = \int \frac{x^2e^x + x^2 + 2x + 1}{x^2} dx$

$= \int \left(e^x + 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$

$= \int e^x \, dx + \int dx + 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x^2}$

$= e^x + x + 2\log|x| - \frac{1}{x} + C$

ଉଦାହରଣ 26.12 $\sec^2 x \, \text{cosec}^2 x$ର x ସାପେକ୍ଷ ସମାକଳନ କର :

ସମାଧାନ : $\int \sec^2 x \, \text{cosec}^2 x \, dx = \int (1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x) \, dx$

$[\because \sec^2 x = 1+\tan^2 x$ ଏବଂ $\text{cosec}^2 x = 1 + \cot^2 x\ ]$

$= \int (1+\tan^2 x + \cot^2 x + \tan^2 x \cot^2 x) \, dx$

$= \int [(1+\tan^2 x) + (1+\cot^2 x)] \, dx$

$= \int (\sec^2 x + \text{cosec}^2 x) \, dx$

$= \tan x - \cot x + C$

ଉଦାହରଣ 26.13 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int \left(\frac{-7}{1+x^2} - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

ସମାଧାନ : $\int \left(\frac{-7}{1+x^2} - \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = -7\int \frac{dx}{1+x^2} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$= -7 \tan^{-1} x - 6 \sin^{-1} x + C$

ଉଦାହରଣ 26.14 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int (x + \cos x) \, dx$

ସମାଧାନ : $\int (x + \cos x) \, dx = \int x \, dx + \int \cos x \, dx$

$= \frac{x^2}{2} + \sin x + C$

26.5 ସମାକଳନର କୌଶଳ

26.5.1 ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ସମାକଳନ

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଆମେ $\int f(x) \, dx$ କୁ ଏକ ଭିନ୍ନ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରୁ ଯେପରିକି ନୂତନ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ଫଳନକୁ ଆମେ ପୂର୍ବ ପାଠରେ ପଢିଥିବା କୌଣସି ମାନକ ପ୍ରଣାଳୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ସମାକଳନ କରିପାରିବା ।

ପ୍ରଥମେ ଆମେ ବିଚାର କରିବା f(ax+b), $a \neq 0$ ରୂପକ ଫଳନ, ଯେଉଁଠି f(x) ଏକ ମାନକ ଫଳନ ହୋଇଥିବ ।

ଉଦାହରଣ 26.15 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \sin(ax+b)\,dx$ (ii) $\int \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)dx$ (iii) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx$

ସମାଧାନ :

(i) $\int \sin(ax+b)\,dx$

$ax + b = t$ ନିଅ ।

ତେବେ, $a = \frac{dt}{dx}$ ବା, $dx = \frac{dt}{a}$

$\therefore \int \sin(ax+b)\,dx = \int \sin t \frac{dt}{a}$ [ଏଠାରେ ସମାକଳନ ଗୁଣକକୁ dt ଦ୍ୱାରା ସଂସ୍ଥାପିତ କରାଯିବ]

$= \frac{1}{a}\int \sin t\,dt$

$= \frac{1}{a}(-\cos t) + c$

$= -\frac{\cos(ax+b)}{a} + C$

(ii) $\int \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)dx$

$7x+\frac{\pi}{4} = t$ ନିଅ । $\therefore$ 7 dx = dt

$\therefore \int \cos\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \int \cos t \frac{dt}{7}$

$= \frac{1}{7}\int \cos t\,dt$

$= \frac{1}{7}\sin t + C$

$= \frac{1}{7}\sin\left(7\pi+\frac{\pi}{4}\right) + C$

(iii) $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx$

$\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} = t$ ନିଅ

ତେବେ, $\frac{-1}{2}=\frac{dt}{dx} \Rightarrow dx=-2dt$

$$\therefore \int \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=-2\int \sin t\,dt$$

$= -2(-\cos t)+C$

$= 2\cos t + C$

$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C$$

ସେହିପରି ଭାବରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନମାନଙ୍କର ସମାକଳ ହେବ -

$$\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C$$

$$\int \sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)dx=-\frac{1}{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+C$$

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)dx=4\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}\right)+C$$

$$\int \cos(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

$$\int \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x+C$$

ଉଦାହରଣ 26.16

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $\int (ax+b)^n\,dx$, ଯେଉଁଠି $n \neq -1$ (ii) $\int \frac{1}{(ax+b)}dx$

ସମାଧାନ : (i) $\int (ax+b)^n\,dx$, ଯେଉଁଠି $n=-1$

$ax+b=t$ ନିଆଯାଉ, ତେବେ $a=\frac{dt}{dx}$ ବା, $dx=\frac{dt}{a}$

$$\therefore \int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\int t^n\,dt$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\frac{t^{n+1}}{(n+1)}+C$$

$$=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C \qquad \text{ଯେଉଁଠି } n\neq -1$$

(ii) $\int \frac{1}{(ax+b)}dx$

$ax+b=t$ ନିଆଯାଉ,

ତେବେ $dx = \frac{1}{a}dt$

$$\therefore \int \frac{1}{(ax+b)}dx = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{a}\log|t| + c = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.17

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int e^{5x+7}\,dx$ (ii) $\int e^{-3x-3}\,dx$

ସମାଧାନ :

(i) $\int e^{5x+7}\,dx$

$5x + 7 = t$ ନିଆଯାଉ, ତେବେ $dx = \frac{dt}{5}$

$$\therefore \int e^{5x+7}\,dx = \frac{1}{5}\int e^t dt$$

$$= \frac{1}{5}e^t + c = \frac{1}{5}e^{5x+7} + C$$

(ii) $\int e^{-3x-3}\,dx$

$-3x - 3 = t$ ନିଆଯାଉ,

ତେବେ $dx = \frac{1}{-3}dt$

$$\therefore \int e^{-3x-3}dx = -\frac{1}{3}\int e^t\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}e^t + C$$

$$= -\frac{1}{3}e^{-3x-3} + C$$

$$\int e^{ax+b}dx = \frac{1}{a}\int e^{ax+b} + C$$

ସେହିପରି $ax + b = t$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କରି, ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ସମାକଳ ହେବ :

$$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{(ax+b)}\, dx = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

$$\int \sin(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$$

$$\int \cos(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$$

$$\int \sec^2(ax+b)\, dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$$

$$\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\sec(ax+b) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\, dx = -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b) + C$$

ଉଦାହରଣ 26.18

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \sin^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin^3 x\, dx$ (iii) $\int \cos^3 x\, dx$ (iv) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx$

ସମାଧାନ :

ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି, ଫଳନଗୁଡ଼ିକୁ xର ଗୁଣିତକର sine ଓ cosine ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିବା :

(i) $$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx \qquad \left[\because \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right]$$

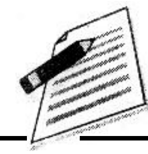
$$= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\cdot dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

(ii) $$\int \sin^3 x\, dx = \int \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}\, dx \qquad [\because \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x]$$

$$= \frac{1}{4}\int (3\sin x - \sin 3x)\, dx$$



$$= \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right] + C$$

(iii) $\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} dx$ $[\because \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x]$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right] + C$$

(iv) $\int \sin 3x \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\int 2\sin 3x \cdot \sin 2x\, dx$

$[\because 2\sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 5x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin x - \frac{\sin 5x}{5}\right] + C$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 26.3

1. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \sin(4 - 5x)\, dx$ (b) $\int \sec^2(2 + 3x)\, dx$

(c) $\int \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ (d) $\int \cos(4x + 5)\, dx$

(e) $\int \sec(3x + 5)\tan(3x + 5)\, dx$

(f) $\int \operatorname{cosec}(2 + 5x)\cot(2 + 5x)\, dx$

2. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \frac{dx}{(3 - 4x)^4}$ (b) $\int (x + 1)^4\, dx$ (c) $\int (4 - 7x)^{10}\, dx$

(d) $\int (4x - 5)^3\, dx$ (e) $\int \frac{1}{3x - 5} dx$

(f) $\int \frac{1}{\sqrt{5 - 9x}} dx$ (g) $\int (2x + 1)^2\, dx$ (h) $\int \frac{1}{x + 1} dx$

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int e^{2x+1}\, dx$ (b) $\int e^{3-8x}\, dx$ (c) $\int \frac{1}{e^{(7+4x)}} dx$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \cos^2 x \, dx$ (b) $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$

(c) $\int \sin 4x \cos 3x \, dx$ (d) $\int \cos 4x \cos 2x \, dx$

26.5.2 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ରୂପକ ଫଳନର ସମାକଳନ

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ $f(x) = t$ ନେବା । ଫଳରେ $f'(x)dx = dt$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C$$

$$= \log|f(x)| + C$$

ଯେଉଁ ଫଳନର, ହରର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଲବ, ତା'ର ସମାକଳ ହେଉଛି ହରର ଲଗାରିଦମ୍ ସହ ସମାନ ।

ଉଦାହରଣ 26.19

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$ (ii) $\int \frac{4x^3}{5+x^4} dx$ (iii) $\int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)}$

ସମାଧାନ :

(i) ବର୍ତ୍ତମାନ, $x^2 + 1$ର ଅବକଳଜ ହେଉଛି $2x$ ।

$\therefore$ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଫଳାଫଳକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପାଇବା

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \log|x^2+1| + C$$

(ii) $5+x^4$ ଅବକଳଜ ହେଉଛି $4x^3$

$$\therefore \int \frac{4x^3}{5+x^4} dx = \log|5+x^4| + C$$

(iii) $3+\sqrt{x}$ ର ଅବକଳଜ ହେଉଛି $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\therefore \int \frac{dx}{2\sqrt{x}\left(3+\sqrt{x}\right)} = \log\left|3+\sqrt{x}\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.20

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} dx$ (ii) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx$

ସମାଧାନ :

(i) $e^x - e^{-x}$ ର ଅବକଳଜ ହେଉଛି $e^x + e^{-x}$

$$\therefore \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \log\left|e^x - e^{-x}\right| + C$$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି

$\int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ dx ର ସମାଧାନ ପାଇଁ

$e^x - e^{-x} = t$ ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $(e^x + e^{-x})dx = dt$

$$\therefore \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = \int \frac{dt}{t}$$

$= \log|t| + c = \log|e^x - e^{-x}| + C$

(ii) $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx$

ଏଠାରେ, $e^{2x}+1$ ର ଅବକଳଜ $e^{2x}-1$ ନୁହେଁ । ଆମେ ଲବ ଓ ହର ଉଭୟକୁ e^{-x} ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ଦତ୍ତ ଫଳନ ହେବ

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \log|e^x + e^{-x}| + C$$

$$\therefore \int \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx = \log|e^x + e^{-x}| + c$$

[$\because$ $e^x + e^{-x}$ ର ଅବକଳଜ ହେଉଛି $e^x - e^{-x}$]

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 26.4

1. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \frac{x}{3x^2 - 2} dx$ (b) $\int \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} dx$ (c) $\int \frac{2x+9}{x^2 + 9x + 30} dx$

(d) $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 3} dx$ (e) $\int \frac{2x+1}{x^2 + x - 5} dx$ (f) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(5 + \sqrt{x}\right)}$

(g) $\int \frac{dx}{x(8 + \log x)}$

2. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\int \frac{e^x}{2 + be^x} dx$ (b) $\int \frac{dx}{e^x - e^{-x}}$

26.5.3 ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ ଦ୍ୱାରା ସମାକଳନ

ଉଦାହରଣ 26.21

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \sec x\, dx$ (iii) $\int \frac{1-\tan x}{1+\tan x} dx$

(iv) $\int \frac{(1-\sin x)}{(1+\cos x)} dx$ (v) $\int \operatorname{cosec}^5 x \ \cot\ x\ dx$ (vi) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx$

ସମାଧାନ :

(i) $\int \tan x = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx$

$= -\log |\cos x| + C$ [$\because$ cos xର ଅବକଳଜ ହେଉଛି sin x]

$= \log \left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$ ବା, $= \log |\sec x| + C$

$\therefore \int \tan x\, dx = \log |\sec x| + C$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି : $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$

$= -\int \frac{-\sin x\, dx}{\cos x}$

$\cos x = t$ ନିଆଯାଉ, ତେବେ $-\sin x\, dx = dt$

$\therefore \int \tan x\ dx = -\int \frac{dt}{t}$

$= -\log |t| + C$

$= -\log |\cos x| + C$

$= -\log \left|\frac{1}{\cos x}\right| + C$

$= \log |\sec x| + C$

(ii) $\int \sec\ x\, dx$

sec x ଅନ୍ୟକୌଣସି ଫଳନର ଅବକଳଜ ହୋଇନଥିବାରୁ ଏହାକୁ ସିଧାସଳଖ ସମାକଳନ କରି ହେବନାହିଁ । ମାତ୍ର $\sec^2 x$ ଏବଂ sec x tan x କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେପରି ନୁହେଁ । $\int \sec\ x$ କୁ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରି ହେବ :

$$\int \sec x \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{(\sec x + \tan x)} dx$$

$\sec x + \tan x = t$ ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx = dt$

$$\therefore \int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t}$$

$= \log |t| + C = \log |\sec x + \tan x| + C$

(iii) $$\int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$\cos x + \sin x = t$ ନିଆଯାଉ ।

ଫଳରେ, $(-\sin x + \cos x)dx = dt$

$$\therefore \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx = \int \frac{1}{t} dt$$

$= \log |t| + c = \log |\cos x + \sin x| + C$

(iv) $$\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{1 + \cos x} dx + \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$$

$$= \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx + \int \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int \tan\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$\frac{x}{2} = d$ ନିଆଯାଉ, ତେବେ $\frac{1}{2} dx = dt$

$$\therefore \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \int \sec^2 t \, dt + 2\int \tan t \, dt$$

$= \tan t - 2 \log |\cos t| + C$

$$= \tan\frac{x}{2} - 2\log\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

(v) $$\int \operatorname{cosec}^5 x \cot x \, dx = -\int -\operatorname{cosec}^4 x \cdot \operatorname{cosec} x \cdot \cot x \, dx$$

cosec x = t ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ –cosec x cot x dx = dt

$$\therefore \int \text{cosec}^5 x \cot x\, dx = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + c = \frac{-(\text{cosec})^5}{5} + c$$

(vi) $\int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx$

x – a = t ନିଆଯାଉ, ତେବେ dx = dt ଓ x = t + a

$$\therefore \int \frac{\sin x}{\sin(x-a)} dx = \int \frac{\sin(t+a)}{\sin t} dt$$

$$= \frac{\sin t \cos a + \cos t \sin a}{\sin t} dt$$

[∵ sin (A+B) = sin A cos B + cos A sin B]

$= \cos a \int dt + \sin a \int \cot t\, dt$ [cos a ଓ sin a ଧ୍ରୁବକ ହେତୁ]

= cos a·t + sin a log |sin t| + c

= (x–a) cos a + sin a log |sin (x–a)| + c

ଉଦାହରଣ 26.22

$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

x = a sin θ ନିଆଯାଉ । ତେବେ dx = a cos θ dθ

$$\therefore \int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a\cos\theta}{a^2 - a^2 \sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

ଟିପ୍ପଣୀ

$$= \frac{1}{a} \log \left| \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \log \left| \frac{1+\frac{x}{a}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \log \left| \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \log \left| \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a-x}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{a} \log \left| \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^{\frac{1}{2}} \right| + C$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.23

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$

ସମାଧାନ :

$x = a \sec\theta$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ, $dx = a \sec\theta \tan\theta \, d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \int \frac{a \sec\theta \tan\theta \, d\theta}{a^2 \sec^2\theta - a^2}$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec\theta \tan\theta}{\tan^2\theta} d\theta \qquad [\because \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1]$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{\sec\theta}{\tan\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sin\theta} d\theta = \frac{1}{a} \int \operatorname{cosec}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{a} \log |\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta| + C$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{1-\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a}\log\left|\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.24

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$$

ସମାଧାନ :

$x = a\tan\theta$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta = \frac{1}{a}\theta + c$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad \left[\frac{x}{a} = \tan\theta \Rightarrow \tan^{-1}\frac{x}{a} = \theta\right]$$

ଉଦାହରଣ 26.25

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

ସମାଧାନ :

$x = a\sin\theta$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $dx = a\cos\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}\,d\theta$$

$$= \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}\,d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

ଉଦାହରଣ 26.26

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx$$

ସମାଧାନ :

$x = a \sec\theta$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $dx = a \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}\,dx = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\sqrt{\sec^2\theta - 1}}\,d\theta$$

$$= \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \log\left|\frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.27

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx$$

ସମାଧାନ :

$x = a \tan\theta$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $dx = a \sec^2\theta\, d\theta$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx = \int \sec\theta\, d\theta$$

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + C$$

$$= \log\left|\frac{1}{a}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{x}{a}\right| = \log\left|\sqrt{a^2 + x^2} + x\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.28

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}\,dx$$

ସମାଧାନ :

x^2, x^{4+1} ର ଅବକଳଜ x^2 ହୋଇନଥିବାରୁ, ଦତ୍ତ ସମାକଳକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିବା :

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$x-\frac{1}{x}=t$ ନିଆଯାଉ ।

$$\therefore \left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $x^2-2+\frac{1}{x^2}=t^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+2$

$$\therefore \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2+2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{t}{\sqrt{2}}+c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right)+c$$

ଉଦାହରଣ 26.29 $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$

ସମାଧାନ : $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$

$x+\frac{1}{x}=t$ ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx = dt$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $x^2+2+\frac{1}{x^2}=t^2$

$$\Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

$$\therefore \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{dt}{t^2-2}$$

$$= \int \frac{dt}{(t)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{t-\sqrt{2}}{t+\sqrt{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.30 $\int \frac{x^2}{x^4+1}dx$

ସମାଧାନ : ଏହି ପ୍ରଶ୍ନକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ଦତ୍ତ ସମାକଳକୁ ଉଦାହରଣ 26.28 ଓ 26.29ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସମାକଳ ରୂପରେ ପରିଣତ କରିବା ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\int \frac{x^2}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int\left[\frac{x^2+1}{x^4+1} + \frac{x^2-1}{x^4+1}\right]dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

ଉଦାହରଣ 26.31 $\int \frac{1}{x^4+1}dx$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମାକଳକୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା :

$$\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|\right] + c$$

ଉଦାହରଣ 26.32 (a) $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$ (b) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$

ସମାଧାନ : (a) $\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \int \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1} dx$

$$= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \tan^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

(b) $\int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx$

$x + \frac{1}{x} = t$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx = dt$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$

$$\Rightarrow x^2 + 1 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 1$$

$$\therefore \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{dt}{t^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|\frac{t - 1}{t + 1}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|\frac{x + \frac{1}{x} - 1}{x + \frac{1}{x} + 1}\right| + C$$

ଉଦାହରଣ 26.33

$$\int \sqrt{\tan x}\,dx$$

ସମାଧାନ :

$\tan x = t^2$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $\sec^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$\Rightarrow dx = \frac{2t}{\sec^2 x}dt$$

$$= \frac{2t}{1+t^4}dt$$

$$\therefore \int \sqrt{\tan x}\,dx = \int t\left(\frac{2t}{1+t^4}\right)dt$$

$$= \int \frac{2t^2}{1+t^4}dt$$

$$= \int \left(\frac{t^2+1}{t^4+1} + \frac{t^2-1}{t^4+1}\right)dt$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt + \int \frac{t^2-1}{t^4+1}dt$$

ପୂର୍ବରୁ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ 26.28 ଓ ଉଦାହରଣ 26.29 ଭଳି ଆଗାଅ ।

ଉଦାହରଣ 26.34

$$\int \sqrt{\cot x}\,dx$$

ସମାଧାନ : $\cot x = t^2$ ନିଆଯାଉ । ତେବେ $-\mathrm{cosec}^2 x\, dx = 2t\, dt$

$$\Rightarrow dx = \frac{-2t}{\mathrm{cosec}^2 x}dt$$

$$= -\frac{2t}{t^4+1}dt$$

$$\therefore \int \sqrt{\cot x}\,dx = -\int t\left(\frac{2t}{t^4+1}\right)dt$$

$$= -\int \frac{2t^2}{t^4+1}dt$$

$$= -\int \left(\frac{t^2+1}{t^4+1} + \frac{t^2-1}{t^4+1}\right)dt$$

ପୂର୍ବରୁ ସମାହିତ ଉଦାହରଣ 26.28 ଓ ଉଦାହରଣ 26.29 ଭଳି ଆଗାଅ ।

ଉଦାହରଣ 26.35

$$\int\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$$

ସମାଧାନ : $\sin x - \cos x = t$ ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $(\cos x + \sin x)dx = dt$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $1 - 2\sin x\cos x = t^2$

$\Rightarrow 1 - t^2 = 2\sin x\cos x$

$$\Rightarrow \frac{1-t^2}{2} = \sin x \cdot \cos x$$

$$\int\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\cos x\sin x}} = \int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1-t^2}{2}}}$$

$$= \sqrt{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin^{-1}[\sin x - \cos x] + C$$

[ଉଦାହରଣ 26.25 ର ଫଳକୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ଉଦାହରଣ 26.36 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (a) $\int\frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}}$ (b) $\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-2x)}}$

ସମାଧାନ : (a) $\int\frac{dx}{\sqrt{8+3x-x^2}} = \int\frac{dx}{\sqrt{8-(x^2-3x)}}$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{8-\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{9}{4}}}$$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{41}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left[\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\frac{\sqrt{41}}{2}}\right]+c = \sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$$