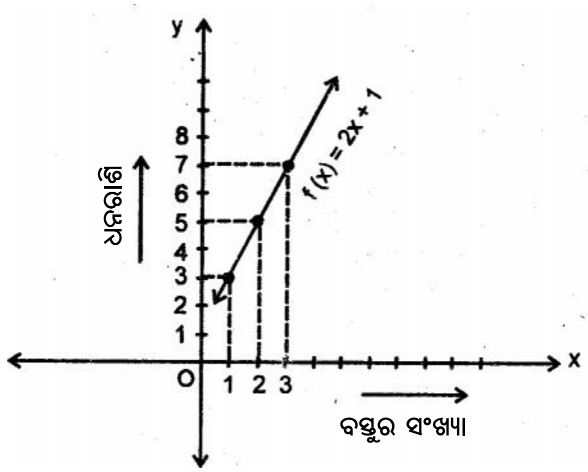
୨୫

ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ଲଘିଷ୍ଠ

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ ଏକ ଜିନିଷ କିଣିବା ବେଳେ, କିଣୁଥିବା ବସ୍ତୁର ପରିମାଣ ବୃଦ୍ଧି ସହ ଦେୟ ଅର୍ଥ ପରିମାଣ ବୃଦ୍ଧି ପାଏ । ଫଳନ $f(x) = 2x+1, x > 0$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର । ମନେକରାଯାଉ x ସଂଖ୍ୟକ ବସ୍ତୁ କିଣିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ଅର୍ଥ ପରିମାଣ $f(x)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ । ଫଳନ $y = f(x) = 2x + 1, x > 0$ର x ଲାଗି ବିଭିନ୍ନ ମାନ ନେଇ ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଚିତ 25.1ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 25.1

ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଦେଖିଲେ ଏହା ବିଶ୍ୱାସ କରି ହୁଏ ଯେ xର ଧନାତ୍ମକ ମାନ ପାଇଁ, ଅର୍ଥାତ୍ $x > 0$ ପାଇଁ ଫଳନର ମାନ ବଢ଼ି ବଢ଼ି ଯାଉଛି । ତୁମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ପରିସ୍ଥିତି ଚିନ୍ତା କରି ପାରିବା କି ଯେଉଁଠି xର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ପାଇବା ସହ ଫଳନର ମାନ କମି କମି ଯାଏ ? ଗୋଟିଏ କାର୍ଯ୍ୟ କରୁଥିବା ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧି ପାଇବା ସହ କାର୍ଯ୍ୟକୁ ଶେଷ କମିବାର ସମୟ-ଅବଧି କମି କମି ଯାଏ, ଏହା ହେଉଛି ସେପରି ଏକ ଉଦାହରଣ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ କାର୍ଯ୍ୟରତ ଲୋକସଂଖ୍ୟା ଓ କାର୍ଯ୍ୟ ଶେଷ ହେବାର ସମୟ-ଅବଧି ପ୍ରତିଲୋମ ସମାନୁପାତରେ ସମ୍ପର୍କିତ । ଅର୍ଥାତ୍, ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ଏକ କାର୍ଯ୍ୟ ଶେଷ ହେବାର ସମୟ-ଅବଧି ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଯଦି କାର୍ଯ୍ୟରତ ଲୋକସଂଖ୍ୟା ହ୍ରାସ ପାଏ ଏବଂ ଅନ୍ୟପକ୍ଷେ, ଏକ କାର୍ଯ୍ୟ ଶେଷ ହେବାର ସମୟ-ଅବଧି ହ୍ରାସ ପାଏ ଯଦି କାର୍ଯ୍ୟରତ ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧିପାଏ । ସେହିଭଳି ଏକ ଫଳନ କଥା ବିଚାର କର

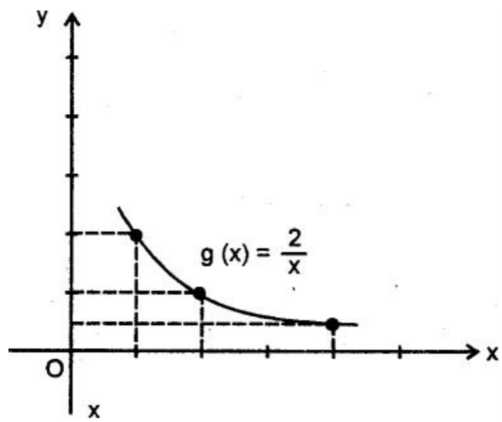
$$g(x) = \frac{2}{x},\ x > 0$$

xର ବିଭିନ୍ନ ମାନ ଲାଗି $g(x)$ ର ସମ୍ପୃକ୍ତ ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ଚିତ୍ର 25.2 ରେ ସଂସ୍ଥାପନ କରାଯାଇଛି ।

ମଡ୍ୟୁଲ-V

ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ



ଚିତ୍ର 25.2

ଯେଉଁପ୍ରକାର ସମାନୁପାତ ହେଉନା କାହିଁକି, ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ମାନଙ୍କରୁ ଜଣାଯାଏଯେ, ସେହି ଉଦାହରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଧର୍ମ ଅଛି :

ଫଳନଟି ହୁଏତ କ୍ରମ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା କ୍ରମ ହ୍ରାସମାନ ।

ଏହି ପାଠରେ, ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ପ୍ରକାର ଫଳନମାନଙ୍କର ବୈଶିଷ୍ଟ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକ ଦତ୍ତ ଫଳନ କ୍ରମ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ହୁଏ ବା କ୍ରମ ହ୍ରାସମାନ ହୁଏ, ତାହା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ତଥା ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ସମ୍ପର୍କିତ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ଏକଦିଷ୍ଟ (ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା ହ୍ରାସମାନ) ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା କହିପାରିବ;
- ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଲାଗି $\frac{dy}{dx} > 0$ ଏବଂ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ଲାଗି $\frac{dy}{dx} < 0$;
- ଏକ ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ତଥା ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ଫଳନର ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ବ୍ୟବହାର କରି ଏହାର ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିପାରିବ;
- ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ସମ୍ପର୍କିତ ସରଳ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଫଳନର ଧାରଣା ଓ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଫଳନ
- ଫଳନର ଅବକଳନ
- ସମୀକରଣ ଓ ଅସୀମକରଣର ସମାଧାନ

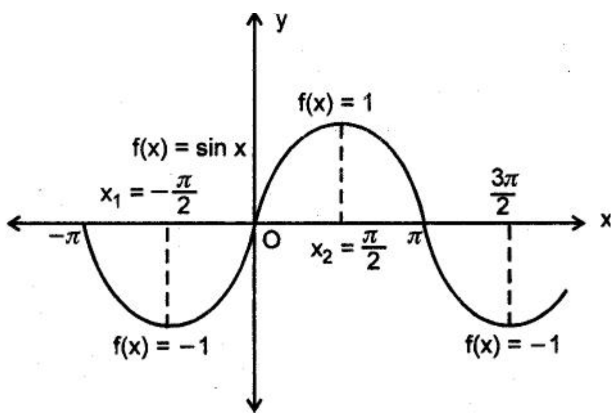
25.1 ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଓ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ

ତୁମେ ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା ଏକ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନର ସାଧାରଣ ପ୍ରବୃତ୍ତି ଦେଖିଛ । ଏଠାରେ ଆମେ ଏକ ଫଳନ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା ହ୍ରାସମାନ ହେବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବାର ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ଏକ ଫଳନ f(x) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅଟେ ।

ମନେକରାଯାଉ $x_1, x_2 \in [a, b]$, ତେବେ ଫଳନ f(x)କୁ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $f(x_2) \geq f(x_1)$ ଯେଉଁଠି $x_2 > x_1$ । ଏହାକୁ ନିରନ୍ତର ବର୍ଦ୍ଧମାନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସମସ୍ତ $x_2 > x_1, x_1, x_2 \in [a, b]$ ଲାଗି $f(x_2) > f(x_1)$ ହୁଏ ।

ଚିତ୍ର 25.3ରେ, x ର ମାନ $-\frac{\pi}{2}$ ରୁ $+\frac{\pi}{2}$କୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଇବା ସହ sin x, –1 ରୁ +1କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

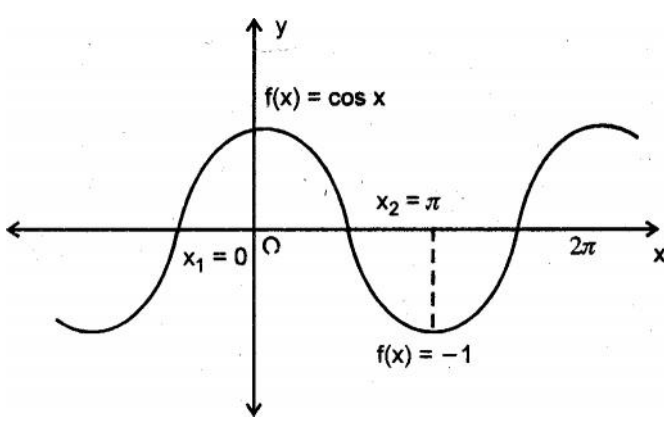


ଚିତ୍ର **25.3**

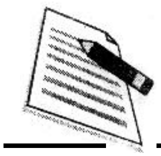
ଟୀକା : ଗୋଟିଏ ଫଳନକୁ ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ଯଦି ସେହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ x ଲାଗି f(x+h) > f(x) ଯେଉଁଠି h ହେଉଛି ଧନାତ୍ମକ ।

ଏକ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ f(x)କୁ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଯଦି $f(x_2) \leq f(x_1)$, ଯେଉଁଠି $x_2 > x_1, x_1, x_2 \in [a, b]$ । ଏହାକୁ ନିରନ୍ତର ହ୍ରାସମାନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସମସ୍ତ $x_2 > x_1, x_1, x_2 \in [a, b]$ ପାଇଁ $f(x_1) > f(x_2)$ ।

ଚିତ୍ର 25.4ରେ, xର ମାନ 0 ରୁ π କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଇବା ସହ cos x, 1 ରୁ –1କୁ ହ୍ରାସପାଏ ।



ଚିତ୍ର **25.4**



ଟୀକା : ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକ ଫଳନକୁ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସେହି ଅନ୍ତରାଳର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ x ଲାଗି $f(x+h) < f(x)$ ଯେଉଁଠି h ଧନାତ୍ମକ ।

25.2 ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ

ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ ଫଳନ $f(x)$ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥିବା ଅନ୍ତରାଳରେ, x_1, x_2 ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ, ଯେପରିକି $x_1 < x_2$ । ତେବେ ଫଳନ $f(x)$ କୁ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ଫଳନଟି ହୁଏତ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଥବା ହ୍ରାସମାନ ହୋଇଥାଏ । ଏହାକୁ ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସେହି ଅନ୍ତରାଳ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ $x_2 > x_1$ ପାଇଁ $f(x_2) \geq f(x_1)$ ହୁଏ ଏବଂ ଏହାକୁ ଏକଦିଷ୍ଟଭାବରେ ହ୍ରାସମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସେହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ $x_2 > x_1$ ପାଇଁ $f(x_1) \geq f(x_2)$ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 25.1

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମସ୍ତ $x \in R$ ପାଇଁ ଫଳନ $f(x) = 4x + 7$ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ :

xର ଦୁଇଟି ମାନ x_1, x_2 କଥା ବିଚାର କରାଯାଉ ଯେପରିକି $x_1, x_2 \in R$, ଯେପରିକି $x_2 > x_1$... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 4ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା $4x_2 > 4x_1$... (2)

(2)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 7ଯୋଗକଲେ, ପାଇବା $4x_2 + 7 > 4x_1 + 7$

ଏଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ, $f(x_2) > f(x_1)$

ଫଳରେ, ଆମେ ଦେଖିଲେ $f(x_2) > f(x_1)$ ଯେଉଁଠି $x_2 > x_1$ । ଏଣୁ ଦତ୍ତ ଫଳନ $f(x) = 4x + 7$ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ (ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ) ।

ଉଦାହରଣ 25.2

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = x^2$, ସମସ୍ତ $x < 0$ ଲାଗି ନିରନ୍ତର ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ।

ସମାଧାନ :

xର ଦୁଇଟି ମାନ x_1, x_2 ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରାଯାଉ ଯେପରିକି $x_2 > x_1, x, x_2 < 0$ ... (i)

ଏକ ଅସୀମକରଣର କ୍ରମ ବଦଳିଯାଏ ଯଦି ଏହାକୁ ଏକ ରଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ (i)କୁ x_2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$$x_2.x_2 < x_1.x_2$$

ବା, $x_2^2 < x_1x_2$ ... (ii)

ବର୍ତ୍ତମାନ (i)କୁ x_1 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ପାଇବା

$$x_1.x_2 < x_1.x_1$$

ବା, $x_1x_2 < x_1^2$ ... (iii)

(ii) ଓ (iii)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$x_2^2 < x_1x_2 < x_1^2$$

ବା, $x_2^2 < x_1^2$

ବା, $f(x_2) < f(x_1)$ ... (iv)

ଏଣୁ (i) ଓ (iv)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$x_2 > x_1$ ପାଇଁ

$f(x_2) < f(x_1)$

ଫଳରେ, ଦତ୍ତ ଫଳନଟି ସମସ୍ତ $x < 0$ ପାଇଁ ନିରନ୍ତର ହ୍ରାସମାନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.1

1. (a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସମସ୍ତ $x \in R$ ଲାଗି ଫଳନ $f(x) = 3x + 4$ ଏକଦିଷ୍ଟ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ।

(b) ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଫଳନ $f(x) = 7–2x$ ସମସ୍ତ $x \in R$ ଲାଗି ଏକଦିଷ୍ଟ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ।

(c) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $f(x) = ax + b$ ଯେଉଁଠି a, b ଧ୍ରୁବକ ଏବଂ $a > 0$, xର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବମାନ ପାଇଁ ନିରନ୍ତର ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ।

2. (a) ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମସ୍ତ $x > 0$ ଲାଗି $f(x) = x^2$ ଏକ ନିରନ୍ତର ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ।

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $x > 2$ ପାଇଁ ଫଳନ $f(x) = x^2 – 4$ ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ଏବଂ $–2 < x < 2, x \in R$ ପାଇଁ ଉକ୍ତ ଫଳନ ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 1 : ଯଦି ଏକ ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ] a, b [ରେ f(x) ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ $x \in [a, b]$ ଲାଗି ଏହି ବିନ୍ଦୁରେ, ଉକ୍ତ ଫଳନର ଅବକଳଜ $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥାଏ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ, ବକ୍ର $y = f(x)$ ଉପରେ (x, y) ବା [x, f(x)] ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ δx ପାଇଁ, ଆମେ ପାଇବା

$x + \delta x > x$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଫଳନ f(x) ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ

$\therefore f(x+\delta x) > f(x)$

ବା, $f(x+\delta x) – f(x) > 0$

ବା, $\dfrac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} > 0 [\because \delta x > 0]$

δxକୁ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ, ସୀମା ନେଲେ, ଯେତେବେଳେ $\delta x \to 0$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x} > 0$$

ବା, $f'(x) > 0$

ଏଣୁ, ଯଦି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ $y = f(x)$ ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ।

ଉପପାଦ୍ୟ 2 : ଯଦି ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ $f(x)$ ଏକ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ $x \in [a, b]$ ଲାଗି ଏହି ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ଫଳନର ଅବକଳଜ $f'(x)$ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ ବକ୍ର $y = f(x)$ ଉପରେ (x, y) ବା $[x, f(x)]$ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ଧନାତ୍ମକ δx ପାଇଁ, ଆମେ ପାଇବା $x + \delta x > x$

ଯେହେତୁ ଫଳନଟି ଏକ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ

$\therefore\ f(x+\delta x) < f(x)\ \delta x > 0$

ବା, $f(x+\delta x) - f(x) < 0$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ପାଇବା $\dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0\ \delta x > 0$

ବା, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \dfrac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} < 0$

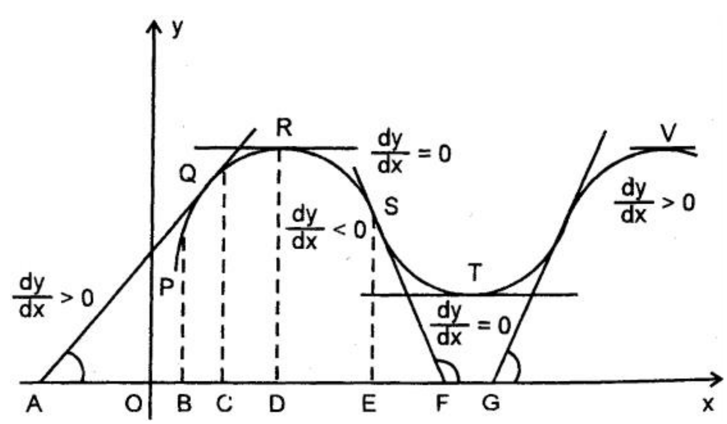
ବା, $f'(x) < 0$

ଏଣୁ, ଯଦି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ $f'(x)$ ଏକ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ।

ଟୀକା : ଯଦି ଏକ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ $f(x)$ ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ $f(x)$ ହେଉଛି
(i) [a, b] ରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଯଦି ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ $f'(x) > 0$ ହୁଏ ।
(ii) [a, b]ରେ ହ୍ରାସମାନ, ଯଦି ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ $f'(x) < 0$ ହୁଏ ।

25.3 ଏକ ଫଳନର ଏକଦିଷ୍ଟତା ଓ ଅବକଳଜର ଚିହ୍ନ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ

ଯେଉଁ ଫଳନର ବକ୍ର ଚିତ୍ର 25.5 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ତାହା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।



ଚିତ୍ର 25.5

କୌଣସି ଫଳନର ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା ହ୍ରାସମାନ ପ୍ରକୃତି (ଏକଦିଷ୍ଟତା) ଏବଂ ଅବକଳଜର ଚିହ୍ନ ମଧ୍ୟରେ ଏହାର ସମ୍ବନ୍ଧର ଅଧ୍ୟୟନକୁ ଆମେ ଚିତ୍ର 25.4 ଥିବା ଅନୁଯାୟୀ ବିଭିନ୍ନ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରିବା ।

(i) P ରୁ R (ii) R ରୁ T (iii) T ରୁ V

(i) ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ ବକ୍ରର P ରୁ R ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁର x-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବୃଦ୍ଧି ପାଇବା ସହ କୋଟୀ (y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ) ମଧ୍ୟ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଛି । ଯଦି (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁର ପରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁ (x_2, y_2) ହୁଏ, ତେବେ $x_2 > x_1$ ରୁ $y_2 > y_1$ ବା $f(x_2) > f(x_1)$ ମିଳିଥାଏ ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ, ବକ୍ରର P ଓ R ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରେ । ଫଳରେ, ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ (କେବଳ R ବ୍ୟତୀତ) ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଧନାତ୍ମକ । R ବିନ୍ଦୁରେ, ଯେଉଁଠି କୋଟୀ ହେଉଛି ସର୍ବାଧିକ, ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏଣୁ R ଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ହେଉଛି 0 ।

ବକ୍ରର ଏହି ଅଂଶ ପାଇଁ, ଆମର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା ଯେ

(a) ଫଳନଟି P ଠାରୁ R ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ।

(b) ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ (R ବ୍ୟତୀତ) ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।

(c) ବକ୍ରର ଯେଉଁବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ y ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ସେପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଧନାତ୍ମକ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dy}{dx} > 0$ ।

(d) R ବିନ୍ଦୁରେ y ସର୍ବାଧିକ । ସେଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ହେଉଛି ଶୂନ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dy}{dx} = 0$ ।

(ii) R ରୁ T ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ କୋଟୀ (y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ) ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ଯଦିଓ x-ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବୃଦ୍ଧିପାଏ । ଏଣୁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ $x_2 > x_1$ ରେ ଆମେ ପାଉ $y_2 < y_1$ ବା $f(x_2) < f(x_1)$ ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ବକ୍ର ଉପରେ, Rର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ଅଙ୍କନ କରେ । ଫଳରେ ଏପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ, ଯେଉଁଠି କୋଟୀ (y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ) ହ୍ରାସ ପାଉଥାଏ, ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଋଣାତ୍ମକ । T ଠାରେ କୋଟୀ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଅଟେ । ଏଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକଟି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୁଏ । ଫଳରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଶୂନ ହୁଏ ।

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କଲେ :

(a) ଫଳନଟି R ଠାରୁ T ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଏକଦିଷ୍ଟ ଭାବରେ ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ।

(b) T ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତବିନ୍ଦୁରେ, ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ।

(c) ବକ୍ରର ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ y ହ୍ରାସମାନ, ସେଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଋଣାତ୍ମକ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dy}{dx} < 0$ ।

(d) ବକ୍ରର ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ କୋଟୀ (ସ୍ଥାନାଙ୍କ) ସର୍ବନିମ୍ନ, ଅର୍ଥାତ୍ T ଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଶୂନ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dy}{dx}$ ।

(iii) ପୁନଶ୍ଚ T ଠାରୁ V ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ -

କୋଟୀ (y-ସ୍ଥାନାଙ୍କ) ନିରନ୍ତର ଭାବରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ବକ୍ରର T ଓ V ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ, x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ । ଫଳରେ, ବକ୍ରର ଏହି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ଧନାତ୍ମକ ।

ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଏହା ହେଲା ଯେ

ବକ୍ରର T ଓ V ବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ପାଇଁ $\frac{dy}{dx} > 0$ ।

T ଓ V ଠାରେ $\frac{dy}{dx}=0$ । ବକ୍ରର R, T ଓ V ବିନ୍ଦୁର $\frac{dy}{dx}=0$ ଏବଂ R, T ଓ V ବିନ୍ଦୁର ଗୋଟିଏ ପାଖରେ $\frac{dy}{dx}<0$, ଅନ୍ୟପାଖରେ $\frac{dy}{dx}>0_1$

ଉଦାହରଣ 25.3

xର କେଉଁମାନ ପାଇଁ $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ଫଳନଟି ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଟେ ଏବଂ xର କେଉଁମାନ ପାଇଁ ଏହା ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ?

ସମାଧାନ :

$f(x) = x^2 - 6x + 8$

$\therefore f'(x) = 2x - 6$

f(x) ବର୍ଦ୍ଧମାନ ହେବା ପାଇଁ $f'(x) > 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $2x - 6 > 0$ ବା, $2(x-3) > 0$

ବା, $x - 3 > 0$ ବା, $x > 3$

$x > 3$ ପାଇଁ ଫଳନଟି ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

f(x) ହ୍ରାସମାନ ହେବା ପାଇଁ

$f'(x) < 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $2x - 6 < 0$ ବା, $x - 3 < 0$

ବା, $x < 3$

ଏଣୁ $x < 3$ ପାଇଁ ଫଳନଟି ହ୍ରାସ ପାଏ ।

ଉଦାହରଣ 25.4

କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଓ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ହ୍ରାସମାନ, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$= 6(x-2)(x+1)$

f(x), xର ଏକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହେବା ପାଇଁ

$f'(x) > 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $6(x-2)(x+1) > 0$ ବା, $(x-2)(x+1) > 0$

ଯେହେତୁ ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳ ଧନାତ୍ମକ, ଏଣୁ ହୁଏତ ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ବା ଉଭୟ ଋଣାତ୍ମକ ।

ଅର୍ଥାତ୍, ହୁଏତ $x - 2 > 0$ ଏବଂ $x + 1 > 0$

ଅଥବା, $x - 2 < 0$ ଏବଂ $x + 1 < 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $x > 2$ ଏବଂ $x > -1$ ଅର୍ଥାତ୍ $x < 2$ ଏବଂ $x < -1$

ମାତ୍ର $x > 2 \Rightarrow x > -1$ ମାତ୍ର $x < -1 \Rightarrow x < 2$

$\therefore x > 2 \qquad \therefore x < -1$

ଏଣୁ $x > 2$ ବା $x < -1$ ପାଇଁ $f(x)$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $f(x)$ ହ୍ରାସମାନ ହେବା ପାଇଁ

$f'(x) < 0$

ବା, $6(x-2)(x+1) < 0$ ବା, $(x-2)(x+1) < 0$

ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇଥିବାରୁ, ସେ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ ଅନ୍ୟଟି ଧନାତ୍ମକ ।

ତେଣୁ, ହୁଏତ ଅଥବା

$x - 2 > 0$ ଏବଂ $x + 1 < 0$	$x - 2 < 0$ ଏବଂ $x + 1 > 0$
ଅର୍ଥାତ୍ $x > 2$ ଏବଂ $x < -1$	ଅର୍ଥାତ୍, $x < 2$ ଏବଂ $x > -1$
ଏଭଳି ସମ୍ଭାବନା ନାହିଁ ଯେପରି	$x > 2$ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା
ହେବା ସହ $x < -1$ ହେବ ।	$-1 < x < 2$

$\therefore$ ଫଳନଟି $-1 < x < 2$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 25.5

କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଫଳନ $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଓ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ହ୍ରାସମାନ, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\dfrac{dx}{dx} - x \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{(x^2+1) - x \cdot (2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

ଯେହେତୁ $(x^2+)^2$, x ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବମାନ ପାଇଁ ଧନାତ୍ମକ

ତେଣୁ, ଯଦି $-1 < x < 0$, $(1-x)$ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ $(1+x)$ ଧନାତ୍ମକ, ତେଣୁ $f'(x) > 0$;

$\therefore$ ଯଦି $0 < x < 1$, $1 - x$ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ $1 + x$ ଧନାତ୍ମକ, ଫଳରେ $f'(x) > 0$;

ଯଦି $x < -1$, $1 - x$ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ $1 + x$ ଋଣାତ୍ମକ, ଏଣୁ $f'(x) < 0$;

$x > 1$, $1 - x$ ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ $1+x$ ଧନାତ୍ମକ, ଏଣୁ $f'(x) < 0$;

ଏଣୁ ଆମର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା ଯେ

ଫଳନଟି ବର୍ଦ୍ଧମାନ $-1 < x < 0$ ଏବଂ $0 < x < 1$ ପାଇଁ

ବା, $-1 < x < 1$ ପାଇଁ

ଏବଂ ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ $x < -1$ ଏବଂ $x > 1$ ପାଇଁ

ଟୀକା : ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ $f'(x) = 0$ ସେଗୁଡ଼ିକ କ୍ରାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁ । ଏଠାରେ କାନ୍ତିକ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, $x = -1$, $x = 1$

ଉଦାହରଣ 25.6

ଦର୍ଶାଅ ଯେ

(a) $f(x) = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ ଅନ୍ତରାଳରେ ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ।

(b) xର ସମସ୍ତ ମାନ ଲାଗି $f(x) = x - \cos x$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ :

(a) $f(x) = \cos x$

$\therefore f'(x) = -\sin x$

$f(x)$ ହ୍ରାସମାନ ହେବ

ଯଦି $f'(x) < 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $-\sin x < 0 \Rightarrow \sin x > 0$

ପ୍ରଥମ ପାଦ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ $\sin x$ ଧନାତ୍ମକ ।

$\therefore 0 \le x \le \pi$ ଅନ୍ତରାଳରେ $f(x)$ ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ।

(b) $f(x) = x - \cos x$

$\therefore f'(x) = 1 - (-\sin x) = 1 + \sin x$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\sin x$ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ -1 ଏବଂ ସର୍ବାଧିକ ମାନ $+1$; ଅର୍ଥାତ୍ xର ସମସ୍ତ ମାନପାଇଁ $\sin x$ର ମାନ -1 ଠାରୁ $+1$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $-1 \le \sin x \le 1$ ବା, $1 - 1 \le 1 + \sin x \le 1 + 1$

ବା, $0 \le 1 + \sin x \le 2$ ବା, $0 \le f'(x) \le 2$

ବା, $0 \le f'(x)$ ବା, $f'(x) \ge 0$

$\Rightarrow$ x ର ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ $f(x) = x - \cos x$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଟେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.2

କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା ହ୍ରାସମାନ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

1. (a) $f(x) = x^2 - 7x + 10$ (b) $f(x) = 3x^2 - 15x + 10$

2. (a) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ (c) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + 12$

3. (a) $y = -3x^2 - 12x + 8$ (b) $f(x) = 1 - 12x - 9x^2 - 2x^3$

4. (a) $y = \frac{x-2}{x+1}, x \neq -1$ (b) $\frac{x^2}{x-1}, x \neq 1$ (c) $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}, x \neq 0$

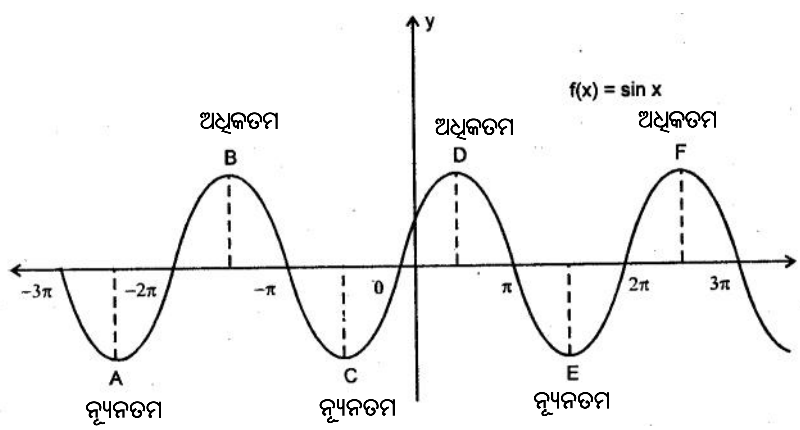
5. (a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ log sin x ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ ।

(b) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $[\pi, 2\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ cos x ଫଳନଟି ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଟେ ।

(c) କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଫଳନ $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), 0 \leq x \leq \pi$ ଟି ହ୍ରାସମାନ ଓ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଏହି ଫଳନର ଲେଖ ଉପରିସ୍ଥ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକଗୁଡ଼ିକ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

25.4 ଏକ ଫଳନର ସର୍ବାଧିକ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ

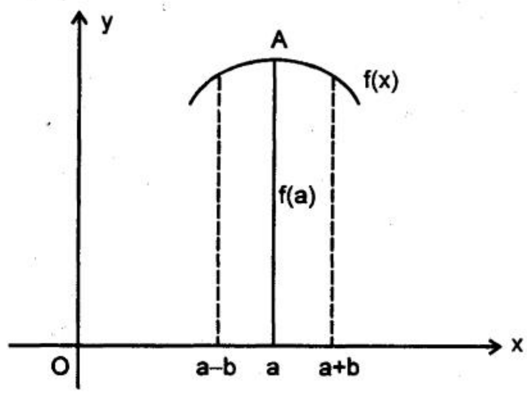
ଆମେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ଦେଖିଛୁ । ଏହା ଏକାନ୍ତର ଭାବରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଓ ହ୍ରାସପାଏ । ଯଦି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନର ମାନ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଓ ତା'ପରେ ହ୍ରାସ ପାଏ, ତେବେ ଏହି ବିନ୍ଦୁକୁ ଗରିଷ୍ଠ (ବା ସର୍ବୋଚ୍ଚ) ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ଫଳନର ମାନକୁ ଫଳନର ସର୍ବାଧିକ ମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ଅବସ୍ଥା ଆସେ, ଯେଉଁଠି ଏହା ହ୍ରାସମାନ ଅବସ୍ଥାରୁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅବସ୍ଥାକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଯଦି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନର ମାନ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ହ୍ରାସପାଏ ଏବଂ ତା'ପରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ, ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ଫଳନର ମାନକୁ ଫଳନର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେହି ବିନ୍ଦୁକୁ ଲଘିଷ୍ଠ (ବା ନ୍ୟୁନତମ) ବିନ୍ଦୁ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।



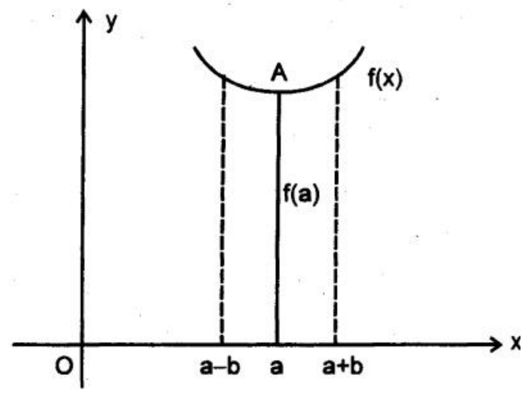
ଚିତ୍ର 25.6

ଚିତ୍ର 25.6ରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଏକାଧିକ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ଏକାଧିକ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ଥାଇପାରେ । ଏଣୁ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ (ସର୍ବନିମ୍ନ) ପାଉ, ମାତ୍ର ଏଗୁଡ଼ିକ ପରମ ସର୍ବୋଚ୍ଚ (ସର୍ବନିମ୍ନ) ନୁହେଁ । ଏହି କାରଣରୁ ଆମେ ବେଳେବେଳେ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ କହିଥାଉ । ଏକ ବିନ୍ଦୁ $x = a$ ଠାରେ, ଯେଉଁଠି $a - b < a < a+b$ (ଚିତ୍ର 25.7 ଦେଖ), ଫଳନ f(x) ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ହୋଇପାରେ, ଯଦି bର ସମସ୍ତ ଯଥା ସମ୍ଭବ କ୍ଷୁଦ୍ର ଧନାତ୍ମକ ମାନ ପାଇଁ $f(a) \geq f(a \pm b)$ ।

ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଯେଉଁମାନ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ପ୍ରତିବେଶୀ (ବା ନିକଟତମ) ବିନ୍ଦୁରେ ପ୍ରାପ୍ତ ମାନ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର, ତାକୁ ଫଳନର ଗରିଷ୍ଠ (ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ) ମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 25.7



ଚିତ୍ର 25.8

ଏକ ଫଳନ f(x) କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $x = a$, ଯେଉଁଠି $f(a) \leq f(a \pm b)$, ଯେପରିକି b ର ସମସ୍ତ ଯଥା ସମ୍ଭବ କ୍ଷୁଦ୍ର ମାନ ପାଇଁ

$a - b < a < a + b$, ଠାରେ ଫଳନକୁ ଲଘିଷ୍ଠ (ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 25.8 ରେ, $x = a$ ବିନ୍ଦୁରେ ଫଳନର ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠମାନ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଯେଉଁମାନ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ପ୍ରତିବେଶୀ (ବା ନିକଟତମ) ବିନ୍ଦୁରେ ପ୍ରାପ୍ତ ମାନଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର, ତାକୁ ଫଳନର ଲଘିଷ୍ଠ (ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ)ମାନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : $x \in R$ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରତିବେଶକୁ ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ $]x-\in[$ ଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ଯେଉଁଠି $\in > 0$ ।

25.5 ଗରିଷ୍ଠ ଅଥବା ଲଘିଷ୍ଠ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ଫଳନ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ହେବାବେଳେ, ଏହାର ଅବକଳଜ ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ ହେବାବେଳେ, ଏହାର ଅବକଳଜ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇଥାଏ । ଏକ ଫଳନ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ହେବା ପାଇଁ ଅଥବା ଏହା ହ୍ରାସମାନ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରିବା । ଚିତ୍ର 25.6ରେ B, D, F ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ A, C, E ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

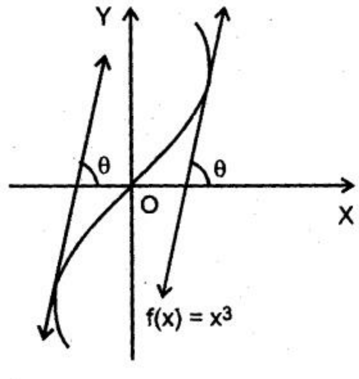
ବର୍ତ୍ତମାନ, Bର ବାମକୁ, ଫଳନଟି ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଏଣୁ $f'(x) > 0$; ମାତ୍ର Bର ଡାହାଣକୁ ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ, ତେଣୁ $f'(x) < 0$ । ଏହା ହୋଇପାରିବ କେବଳ ଯଦି ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୌଣସି ସ୍ଥାନରେ $f'(x)$ର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା :

ଏକ ଫଳନ f(x) କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଯଦି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ (i) $f'(x) = 0$ ଏବଂ (ii) $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (ଯେଉଁଠି $f'(x) = 0$)ର ପ୍ରତିବେଶରେ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବ, (ଅବଶ୍ୟ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ବାମରୁ ଡାହାଣକୁ ନିଆଯାଉଥିବ), ତେବେ ଫଳନ f(x)ର ମାନ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ଗରିଷ୍ଠ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ Cରେ ବାମକୁ (ଚିତ୍ର 25.6 ଦେଖ), ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ, ଫଳରେ $f'(x)$ ଋଣାତ୍ମକ; Cବିନ୍ଦୁର ଡାହାଣକୁ ଫଳନ f(x) ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଅଟେ, ଫଳରେ $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକ । ପୁନଶ୍ଚ $f'(x)$ ଧନାତ୍ମକ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବା ପୂର୍ବରୁ ଶୂନ ହେବ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖୁ :

ଏକ ଫଳନ f(x) କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଯଦି ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ (i) $f'(x) = 0$ ଏବଂ (ii) $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ (ଯେଉଁଠି $f'(x) = 0$)ର ପ୍ରତିବେଶରେ ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବ, ତେବେ ଫଳନ f(x)ର ମାନ ସେହି ବିନ୍ଦୁ ଲଘିଷ୍ଠ ହେବ ।

ଆମର ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଉଚିତ୍ ଯେ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ମାନଲାଗି $f'(x) = 0$ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ, ମାତ୍ର ଏହା ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ନୁହେଁ । ଆମେ ଏକ ଫଳନ ପାଇପାରିବା ଯାହା ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ତା'ପରେ ସ୍ଥିର ବା ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ଏବଂ ପୁନଶ୍ଚ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ହୁଏ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ନାହିଁ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, xର ଯେଉଁମାନ ପାଇଁ $f'(x) = 0$, ତାହା ଏକ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ । ଏଭଳି ବିନ୍ଦୁକୁ ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକ୍ସନ୍ ବିନ୍ଦୁ (point of inflection) କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 25.9

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଫଳନ $f(x) = x^3$ ପାଇଁ $x = 0$ ହେଉଛି ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକ୍ସନ୍ ବିନ୍ଦୁ, କାରଣ $x = 0$ ଠାରେ $f'(x) = 3x^2$ ର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ନାହିଁ । $x = 0$ ବିନ୍ଦୁର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକ (ଅର୍ଥାତ୍, ସ୍ପର୍ଶକଟି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି) । ଚିତ୍ର 25.9 ଦେଖ ।

ଏଣୁ $f(x) = x^3$ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $x = 0$ ହେଉଛି ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକ୍ସନ୍ ବିନ୍ଦୁ ।

ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ $f'(x) = 0$, ସେ ବିନ୍ଦୁକୁ ସ୍ଥିରବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ, କାରଣ ସେଠାରେ ଫଳନର ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର ହେଉଛି ଶୂନ । ଏଣୁ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି ।

ମନ୍ତବ୍ୟ :

ଯେଉଁ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁରେ ଏକ ଫଳନ ତା'ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ, ସେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ ଚରମ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନକୁ ଫଳନ $f(x)$ର ଚରମ ମାନ କୁହାଯାଏ । ଏହିପରି, $x = a$ଠାରେ ଏକ ଫଳନ ଚରମମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଏ, ଯଦି $f(a)$ ହୁଏତ ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ ହୁଏ ।

25.6 ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ଜାଣିବା ପ୍ରଣାଳୀ

ଏକ ଫଳନ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ଜାଣିବା ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ :

(i) $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(ii) $f'(x) = 0$ ନେଇ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(iii) ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରତିବେଶରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର । ଯଦି ଏହାର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ $f(x)$ର ମାନ ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ଯଦି $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ $f(x)$ର ମାନ ଲଘିଷ୍ଠ ହୁଏ ।

(iv) ଯଦି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରତିବେଶରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ନ ହୁଏ, ତେବେ ଏହା ଏକ ଇନ୍‌ଫ୍ଲେକ୍ସନ୍ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 25.7

ଫଳନ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ର ଗରିଷ୍ଠ (ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ) ଓ ଲଘିଷ୍ଠ (ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ) ବିନ୍ଦୁମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

ପାଦ I : ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x) = 0$ ଆମେ ପାଇବା $3x^2 - 6x - 9 = 0$

ବା, $x^2 - 2x - 3 = 0$

ବା, $(x-3)(x+1) = 0$

ବା, $x = 3, x = 1$

$\therefore$ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, $x = 3, x = -1$

ପାଦ II : $x = 3$ଠାରେ,

$x < 3$ ପାଇଁ, $f'(x) < 0$

ଏବଂ $x > 3$ ପାଇଁ, $f'(x) > 0$

$\therefore$ 3ର ପ୍ରତିବେଶରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

$\therefore$ $x = 3$ ଠାରେ $f(x)$ ର ମାନ ସର୍ବନିମ୍ନ ।

ପାଦ III : $x = -1$ ଠାରେ,

$x < -1$ ପାଇଁ, $f'(x) > 0$

ଏବଂ $x > -1$ ପାଇଁ, $f'(x) < 0$

$\therefore$ -1ର ପ୍ରତିବେଶରେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକରୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଉଛି ।

$\therefore$ $x = -1$ ଠାରେ $f(x)$ର ମାନ ସର୍ବାଧିକ ।

$\therefore$ $x = -1$ ଓ $x = 3$ଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ମିଳିଥା'ନ୍ତି । ଆମେ ଯଦି ସର୍ବାଧିକ ମାନ (ବା ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ) ଜାଣିବାକୁ ଚାହୁଁ । ତେବେ ତାହା ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ପାଇବା ।

ସର୍ବାଧିକ ମାନ $= f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$= -1 - 3 + 9 = 5$

ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ $= f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) = -27$

$\therefore$ $(-1, 5)$ ଓ $(3, -27)$ ହେଉଛନ୍ତି ଯଥାକ୍ରମେ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

ଉଦାହରଣ 25.8

ଫଳନ $f(x) = x^2 - 4x$ ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$f(x) = x^2 - 4x$

$\therefore$ $f'(x) = 2x - 4 = 2(x-2)$

$f'(x) = 0$ ନେଇ, ଆମେ ପାଇବା $2x - 4 = 0$, ଅର୍ଥାତ୍ $x = 2$

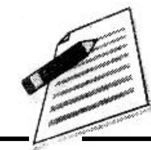
ଆମକୁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବାକୁ ହେବ $x = 2$ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବା ଗରିଷ୍ଠ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନୁହେଁ ।

ଆସ $x = 1.9$ ନେବା ଯାହାକି 2ର ବାମରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $x = 2.1$ ନେବା ଯାହାକି 2ର ଡାହାଣରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$f'(1.9) = 2(1.9 - 2) < 0$

$f'(2.1) = 2(2.1 - 2) > 0$

ଯେହେତୁ 2ର ବାମରୁ 2 ଆଡକୁ ଅଗ୍ରସର ହେଲେ, $f'(x) < 0$ ଏବଂ 2ର ଡାହାଣରୁ 2 ଆଡକୁ ଅଗ୍ରସର ହେଲେ $f'(x) > 0$, ତେଣୁ $x = 2$ ଠାରେ ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ।



$f(x)$ର ଅବକଳଜର ଚିହ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଯେଉଁ ସବୁ ତଥ୍ୟ ପାଇଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି ।

$f'(x)$ ର ଚିହ୍ନ

$x = 2$ବିନ୍ଦୁ

2ର ବାମ	2ର ଡାହାଣ
$f'(x) < 0$	$f'(x) > 0$

ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ

ଉଦାହରଣ 25.9

ଫଳନ $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ ର ସମସ୍ତ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

$\therefore\ f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$= 6(x^2 - x - 2)$

$\therefore\ f'(x) = 6(x+1)\ (x-2)$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x) = 0$କୁ ସମାଧାନ କରି x ର ମାନ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$6(x+1)\ (x-2) = 0$

$\Rightarrow x = -1, 2$

ଏଣୁ, $x = -1, 2$ ଠାରେ $f'(x) = 0$ ।

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା, ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବା ସେ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ ।

$x = -1$ ବିନ୍ଦୁ କଥା ବିଚାର କର ।

ଆସ, $x = -1.1$ ନେବା ଯାହାକି -1ର ବାମରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $x = -0.9$ ନେବା ଯାହାକି -1ର ଡାହାଣରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ $f'(x)$ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$f'(-1.1) = 6(-1.1 + 1)\ (-1.1 - 2)$, ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ, ଅର୍ଥାତ୍ $f'(x) > 0$,

$f'(-0.9) = 6(-0.9 + 1)\ (-0.9 - 2)$, ଯାହାକି ଋଣାତ୍ମକ, ଅର୍ଥାତ୍, $f'(x) < 0$

ଏଣୁ $x = -1$ ଠାରେ ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଅବସ୍ଥିତ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $x = 2$ ବିନ୍ଦୁ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ।

ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ $x = 1.9$ ନେବା, ଯାହାକି $x = 2$ର ବାମରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $x = 2.1$ ନେବା, ଯାହାକି $x = 2$ର ଡାହାଣରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$f'(1.9) = 6(1.9 + 1)\ (1.9 - 2)$

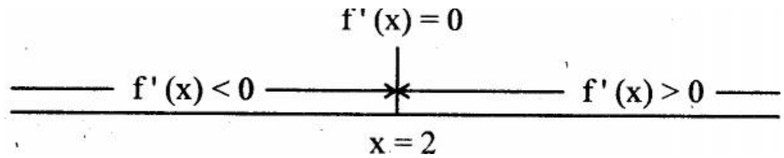
$= 6$(ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା) (ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା)

$=$ ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା

ଅର୍ଥାତ୍, $f'(1.9) < 0$

ଏବଂ, $f'(2.1) = 6(2.1 + 1)(2.1 - 2)$, ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ

ଅର୍ଥାତ୍ $f'(2.1) > 0$



$\therefore$ 2ର ବାମରୁ 2 ଆଡକୁ ଅଗ୍ରସର ହେବାବେଳେ $f'(x) < 0$ ଏବଂ 2ର ଡାହାଣରୁ 2 ଆଡକୁ ଅଗ୍ରସର ହେବା ବେଳକୁ $f'(x) > 0$

$\therefore$ $x = 2$ ହେଉଛି ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

ଏଣୁ, $x = -1$ ଠାରେ f(x)ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ f(x)ର ସର୍ବାଧିକ ମାନ $= -2 - 3 + 12 + 8 = 15$

$x = 2$ ଠାରେ f(x)ର ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ f(x)ର ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ $= 2(8) - 3(4) - 12(2) + 8 = -12$

f′(x)ର ଚିହ୍ନ

x = –1 ବିନ୍ଦୁ	x = 2 ବିନ୍ଦୁ
–1 ର ବାମ –1 ର ଡାହାଣ	2 ର ବାମ 2 ର ଡାହାଣ
ଧନାତ୍ମକ ରଣାତ୍ମକ	ରଣାତ୍ମକ ଧନାତ୍ମକ
ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ	ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ

ଉଦାହରଣ 25.10

ଫଳନ $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ, ଯଦି ଥାଏ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

ତେବେ, $f'(x) = \frac{(1+x^2)\times 1 - (2x)\times x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା ପାଇଁ $f'(x) = 0$ ନିଅ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$

$\Rightarrow 1 - x^2 = 0$ ବା, $(1+x)(1-x) = 0$ ବା, $x = 1, -1$

$x = 1$ ବିଷୟରେ ବିଚାର କର :

xର 1 ଠାରୁ ସାମାନ୍ୟ ସାନ ମୂଲ୍ୟ ଏବଂ 1ଠାରୁ ସାମାନ୍ୟ ବଡ ମୂଲ୍ୟ ଲାଗି $f'(x)$ର ମାନର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଏଣୁ $x = 1$ ଠାରେ ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବାଧିକ ମାନ

$$= \frac{1}{1+(-1)^2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $x = -1$ ବିଷୟରେ ବିଚାର କର :

x, -1 ଦେଇ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଏଣୁ $x = -1$ ଠାରେ $f(x)$ର ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଏଣୁ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ $= \frac{-1}{2}$

ଉଦାହରଣ 25.11

ଫଳନ $f(x) = \sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ଲାଗି, ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ, ଯଦି ଥାଏ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣୁ, $f(x) = \sin x + \cos x$

$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$

ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ/ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ $f'(x) = 0$

$\therefore \cos x - \sin x = 0$

ବା, $\tan x = 1$ ବା, $x = \frac{\pi}{4}, 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ମଧ୍ୟରେ

$x = \frac{\pi}{4}$ ଠାରେ,

$x < \frac{\pi}{4}$ ପାଇଁ, $\cos x > \sin x$

$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x > 0$

$x > \frac{\pi}{4}$ ପାଇଁ, $\cos x - \sin x < 0$

$\therefore \frac{\pi}{4}$ ର ପ୍ରତିବେଶରେ $f'(x)$ ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

ସର୍ବାଧିକ ମାନ $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\therefore$ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.3

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ସମସ୍ତ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସମସ୍ତ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ସର୍ବାଧିକ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

1. $x^2 - 8x + 12$ **2.** $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

3. $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ **4.** $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$

5. $(x-1)(x-2)^2$ **6.** $\dfrac{x-1}{x^2+x+2}$

25.7 ଏକ ଫଳନର ସର୍ବାଧିକ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜର ବ୍ୟବହାର

ଯେଉଁ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ସ୍ଥିତଥାଏ, ସେପରି ଫଳନର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଏକ ଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନରେ ଦେଉଛୁ । ବିଭିନ୍ନ ପାଦଗୁଡ଼ିକ ହେଲା :

(i) ଦତ୍ତ ଫଳନକୁ $f(x)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଉ ।

(ii) $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ଏହାକୁ ଶୂନ ସହ ସମାନ କରି ଲେଖ ।

(iii) $f'(x) = 0$ ର ସମାଧାନ କର । ମନେକର ସମାଧାନରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଗୋଟିଏ ମୂଳ ହେଉଛି $x = a$ ।

(iv) ଏହାର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ $f''(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ପାଦ (iii)ରେ ପାଇଥିବା xର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବମାନ 'a' ପାଇଁ $f''(a)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ତା'ପରେ ଯଦି

$f''(a) < 0$, ତେବେ $x = a$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

$f''(a) > 0$, ତେବେ $x = a$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

$f''(a) = 0$, ତେବେ ଆମେ 'a'ର ବାମକୁ ଏବଂ 'a'ର ଡାହାଣକୁ $f'(x)$ର ମାନର ଚିହ୍ନକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ଓ ଏହାକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଫଳାଫଳ ପାଇଥାଉ ।

ଉଦାହରଣ 25.12

ଫଳନ $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$ର ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

ତେଣୁ, $f'(x) = 6x^2 - 42x + 36$

$= 6(x^2 - 7x + 6)$

$= 6(x-1)(x-6)$

ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ $f'(x) = 0$

ବା, $6(x-1)(x-6) = 0 \Rightarrow x = 1, 6$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f''(x) = \dfrac{d}{dx} f'(x)$

$= \frac{d}{dx}[6(x^2 - 7x + 6)]$

$= 12x - 42 = 6(2x - 7)$

$x = 1$ ଲାଗି, $f''(1) = 6(2\times1 - 7) = -30 < 0$

$\therefore$ $x = 1$ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

ଏବଂ $f(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 36(1) - 20 = -3$ ।

ଏହା ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ $x = 6$ ପାଇଁ

$f''(6) = 6(2\times6-7) = 30 > 0$

$\therefore$ $x = 6$ ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବିନ୍ଦୁ ।

ଏବଂ $f(6) = 2(6)^3 - 21(6)^2 + 36(6) - 20 = -128$ ହେଉଛି ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ ।

ଉଦାହରଣ 25.13

ଫଳନ $f(x) = \cos 4x;\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ ଲାଗି ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ (ଯଦି ଥାଏ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$f(x) = \cos 4x$

$\therefore f'(x) = -4 \sin 4x$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f'(x) = 0 \Rightarrow -4 \sin 4x = 0$

ବା, $\sin 4x = 0$ ବା, $4x = 0, \pi, 2\pi$

ବା, $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{4} \qquad \left[\because 0 < x < \frac{\pi}{2}\right]$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f''(x) = -16 \cos 4x$

$x = \frac{\pi}{4}$ ଠାରେ, $f''(x) = -16 \cos \pi = -16\,(-1) = 16 > 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ ଠାରେ $f(x)$ ଲଘିଷ୍ଠ ଅଟେ ।

ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ $= f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\pi = -1$

ଉଦାହରଣ 25.14

(a) $[-3, -1]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $2x^3 - 24x + 107$ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) $[1, 3]$ ଅନ୍ତରାଳରେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଫଳନର ନିମ୍ନତମ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$f(x) = 2x^3 - 24x + 107$

$\therefore f'(x) = 6x^2 - 24$

ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ

$f'(x) = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $6x^2 - 24 = 0 \Rightarrow x = -2, 2$

$f'(x) = 0$ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରି ମିଳୁଥିବା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ -2 ହେଉଛି $[-3, -1]$ ଅନ୍ତରାଳ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଏଣୁ, ଆମେ କେବଳ $x = -2$ ଠାରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯଦି ଥାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f''(x) = 12x$

$\therefore f''(-2) = 12(-2) = -24$

ବା, $f''(-2) < 0$

ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ $x = -2$ ଠାରେ ଫଳନ $f(x)$ର ଏକ ଗରିଷ୍ଠ ମାନ ଅଛି ।

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ $= 2(-2)^3 - 24(-2) + 107 = 139$

ଏଣୁ, ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳ $[-3, -1]$ରେ ଥିବା -2 ବିନ୍ଦୁଠାରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ ହେଉଛି 139 ।

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ $f''(x) = 12x$

$\therefore f''(2) = 24 > 0,$ $[\because$ ଅନ୍ତରାଳ $[1, 3]$ରେ 2 ଅବସ୍ଥିତ$]$

ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ $x = 2$ ଠାରେ, ଫଳନ $f(x)$ ର ମାନ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ।

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ବନିମ୍ନ ମାନ $= 2(2)^3 - 24(2) + 107 = 75$

ଉଦାହରଣ 25.15

ଅନ୍ତରାଳ $(0, \pi)$ରେ ଫଳନ $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)$ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ନିମ୍ନତମ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣୁ, $f(x) = \sin x\,(1+\cos x)$

$\therefore f'(x) = \cos x\,(1+\cos x)+\sin x(-\sin x)$

$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos x + \cos^2 x - (1-\cos^2 x)$

$= 2\cos^2 x + \cos x - 1$

ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁ ଲାଗି, $f'(x) = 0$

$\therefore 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$$\therefore \cos x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} = -1, \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \pi, \frac{\pi}{3}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $f(0) = 0$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

ଏବଂ $f(\pi) = 0$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$ ଠାରେ, f(x)ର ମାନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$

ଏବଂ $x = 0$ ଏବଂ $x = \pi$ଠାରେ, f(x)ର ମାନ ନିମ୍ନତମ ଏବଂ ନିମ୍ନତମ ମାନ = 0

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.4

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

1. $2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ **2.** $-x^3 + 12x^2 - 5$

3. $(x-1)(x+2)^2$ **4.** $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

5. $\sin x(1+\cos x),\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$ **6.** $\sin x + \cos x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

7. $\sin 2x - x,\ \frac{-\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$

25.8 ବ୍ୟାବହାରିକ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନରେ ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠର ଉପଯୋଗ

ଫଳନର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ନିମ୍ନତମ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଭଳି ସମସ୍ୟା ସମାଧନରେ ଅବକଳଜର ଉପଯୋଗ ଏକ ଶକ୍ତିଶାଳୀ ସାଧନୀ ଅଟେ । ଏ ପ୍ରକାର ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କଲାବେଳେ, ଆମେ ସମାଧାନର ପାଦ ନିମ୍ନ କ୍ରମରେ ଦେଇଥାଉ :

(i) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟରେ ଆଲୋଚିତ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ଫଳନକୁ ପ୍ରକାଶ କର ।

(ii) ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସାହାଯ୍ୟରେ, ଫଳନକୁ ଗୋଟିଏ ଚଳ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(iii) ଶେଷରେ, ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନା ଭଳି ଗରିଷ୍ଠ ଓ ଲଘିଷ୍ଠର ସର୍ତ୍ତ ପ୍ରୟୋଗ କର ।

ଉଦାହରଣ 25.16

ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ସମଷ୍ଟି ହେଉଛି 70 ଏବଂ ଗୁଣଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ ।

ସମାଧାନ :

ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ x ହେଉ । ସେ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 70 ହେତୁ, ଅନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $70 - x$ । ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ଧନାତ୍ମକ ହେତୁ,

$x > 0,\ 70 - x > 0$

$70 - x > 0 \Rightarrow x < 70$

$\therefore 0 < x < 70$

ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟିର ଗୁଣଫଳକୁ f(x) ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $f(x) = x(70-x) \Rightarrow f(x) = 70x - x^2$

f(x)କୁ ସର୍ବୋଚ୍ଚ କରିବାକୁ ହେବ ।

ଏଣୁ ଆମକୁ f′(x) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ତାକୁ ଶୂନ ସହ ସମାନ କରିବାକୁ ହେବ ।

$f'(x) = 70 - 2x$

ଗୁଣଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବା ଲାଗି $f'(x) = 0$

ବା, $70 - 2x = 0$

ବା, $x = 35$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f''(x) = -2$ ଯାହାକି ଋଣାତ୍ମକ ।

ଫଳରେ, $x = 35$ ଠାରେ $f(x)$ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଅଟେ ।

ଅନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାଟି $= 70 - x = 70 - 35 = 35$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ହେଲେ 35, 35 ।

ଉଦାହରଣ 25.17

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା ନିମ୍ନତମ ।

ସମାଧାନ : ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଯଥାକ୍ରମେ x ଏକକ ଓ y ଏକକ ହେଉ ।

$\therefore$ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= xy$

ଏହା ଦତ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ବିଶିଷ୍ଟ ହେତୁ, ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳକୁ A ନିଆଯାଏ । ଏଣୁ ଆମେ ପାଇବା $A = xy$

ବା, $y = \dfrac{A}{x}$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା (ମନେକରାଯାଉ P) $= 2(x+y)$

ବା, $P = 2\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$

$\therefore \dfrac{dP}{dx} = 2\left(1 - \dfrac{A}{x^2}\right)$

P ଲଘିଷ୍ଠ ହେବା ଲାଗି, $\dfrac{dP}{dx} = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $2\left(1 - \dfrac{A}{x^2}\right) = 0$

ବା, $A = x^2$ ବା, $\sqrt{A} = x$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\dfrac{d^2P}{dx^2} = \dfrac{4A}{x^3}$, ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ

ଏଣୁ ପରିସୀମା ନିମ୍ନତମ ହେବ ଯେତେବେଳେ $x = \sqrt{A}$

$\therefore y = \dfrac{A}{x} = \dfrac{x^2}{x} = x \qquad [\because A = x^2]$

ଫଳରେ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଟି ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ହେଲେ, ପରିସୀମା ନିମ୍ନତମ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 25.18

କ୍ଷେତ୍ରଫଳ a^2 ହୋଇଥିବା ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ପଟିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ବର୍ଗ ଆକୃତିର ଭୂମି ଥିବା ଏକ ଖୋଲା ବାକ୍ସ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବାକୁ ହେବ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହି ବାକ୍ସର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆୟତନ ହେବ $\dfrac{a^3}{6\sqrt{3}}$ ।

ସମାଧାନ : ବର୍ଗଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଭୂମିଥିବା ବାକ୍ସର ଭୂମିର ଗୋଟିଏ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏବଂ ବାକ୍ସଟିର ଉଚ୍ଚତା y ହେଉ । ବାକ୍ସଟିର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ = $x^2 + 4xy$

$$\therefore x^2 + 4xy = a^2 \text{ ବା } y = \frac{a^2 - x^2}{4x}$$

ବାକ୍ସଟିର ଆୟତନ, V = ଭୂମିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ × ଉଚ୍ଚତା $= x^2y = x^2\left(\frac{a^2 - x^2}{4x}\right)$

ବା, $V = \frac{1}{4}(a^2x - x^3)$ ... (i)

$$\therefore \frac{dV}{dx} = \frac{1}{4}(a^2 - 3x^2)$$

ଗରିଷ୍ଠ/ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ $\frac{dV}{dx} = 0$

$$\therefore \frac{1}{4}(a^2 - 3x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad \text{... (ii)}$$

(i) ଓ (ii)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

ଆୟତନ $= \frac{1}{4}\left(\frac{(a^3)}{\sqrt{3}} - \frac{a^3}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3}{6\sqrt{3}}$ ... (iii)

ପୁନଶ୍ଚ, $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{1}{4}(a^2 - 3x^2) = -\frac{3}{2}x$

ଭୂମିର ଗୋଟିଏ ଧାରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ହେତୁ, x ଧନାତ୍ମକ

$$\therefore \frac{d^2V}{dx^2} < 0$$

∴ ଆୟତନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ

ଫଳରେ, ବାକ୍ସଟିର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆୟତନ $= \frac{a^3}{6\sqrt{3}}$

ଉଦାହରଣ 25.19

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ ଯେ r ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତରେ ABCD ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ । ତେବେ ବ୍ୟାସ AC = 2r

ମନେକରାଯାଉ AB = x ଓ BC = y

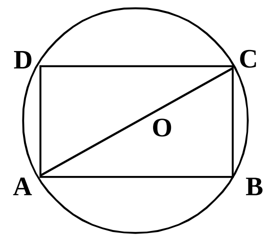
ତେବେ, $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ବା, $x^2 + y^2 = (2r)^2 = 4r^2$ ... (i)

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ A = xy

$$\therefore A = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{x(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}} + \sqrt{4r^2 - x^2} \times 1$$

$$= \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$



ଚିତ୍ର 25.10

ଗରିଷ୍ଠ/ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{4r^2 - 2x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}r$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}(-4x) - (4r^2 - 2x^2)\frac{(-2x)}{2\sqrt{4r^2 - x^2}}}{(4r^2 - x^2)}$

$$= \frac{-4x(4r^2 - x^2) + x(4r^2 - 2x^2)}{(4r^2 - x^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{-4\sqrt{2}(2r^2) + 0}{(2r^2)^{3/2}} \qquad [x = \sqrt{2}r \text{ ବସାଇ}]$$

$$= \frac{-8\sqrt{2}r^3}{2\sqrt{2}r^3} = -4 < 0$$

ଏଣୁ, A ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ, ଯେତେବେଳେ $x = \sqrt{2}r$

ବର୍ତ୍ତମାନ, (i)ରୁ $y = \sqrt{4r^2 - 2r^2} = \sqrt{2}r$

$\therefore$ x = y । ଏଣୁ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ର ABCD ଏକ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ର ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 25.20

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ ଆୟତନ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ପୃଷ୍ଠ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ ଭୂମିକ ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା, ଏହାର ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ ।

ସମାଧାନ :

ସିଲଣ୍ଡରର ଆୟତନକୁ V, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ r ଓ ଉଚ୍ଚତାକୁ h ନିଆଯାଉ ।

ତେବେ, $V = \pi r^2 h$

ବା, $h = \frac{V}{\pi r^2}$ ... (i)

ବର୍ତ୍ତମାନ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$$= 2\pi r \times \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{dS}{dr} = \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r$

ପୃଷ୍ଠ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିମ୍ନତମ ହେବାଲାଗି, $\frac{dS}{dr} = 0$

$$\therefore \frac{-2V}{r^2} + 4\pi r = 0$$

ବା, $V = 2\pi r^3$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ଆମେ ପାଇବା, $h = \frac{2\pi r^3}{\pi r^2} = 2r$

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{d^2S}{dr^2} = \frac{4V}{r^3} + 4\pi = 8\pi + 4\pi$ [(ii) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

$= 12\pi > 0$

$\therefore$ S ନିମ୍ନତମ ହୁଏ ଯେତେବେଳେ $h = 2r$

ଏଣୁ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା = ଭୂମିର ବ୍ୟାସ

ଉଦାହରଣ 25.21

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ ପୃଷ୍ଠ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ ଭୂମିକ ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ, ଯଦି ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଉଚ୍ଚତା h ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତ ଭୂମିକା ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ S ଏବଂ ଆୟତନ V ।

ତେବେ, $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ ... (i)

(ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଧ୍ରୁବକ ଅଟେ)

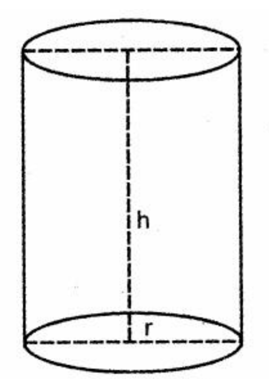
$V = \pi r^2 h$

$$\Rightarrow V = \pi r^2 \left[\frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}\right]$$

$$= \frac{r}{2}[S - 2\pi r^2]$$

$$\therefore V = \frac{Sr}{2} - \pi r^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - \pi(3r^2)$$



ଚିତ୍ର 25.11

ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ, $\frac{dV}{dr} = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{S}{2} - \pi(3r^2) = 0$

ବା, $S = 6\pi r^2$

(i) ରୁ ଆମେ ପାଇବା, $6\pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$\Rightarrow 4\pi r^2 = 2\pi rh$

$\Rightarrow 2r = h$ ... (ii)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ, $\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left[\frac{S}{2} - 3\pi r^2\right]$

$= -6\pi r \left[\because \frac{d}{dr}\left(\frac{S}{2}\right) = 0\right]$

= ରଣାତ୍ମକ ରାଶି

ଏଣୁ, ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୁଇଗୁଣ ସମାନ ହେଲେ, ଅର୍ଥାତ୍ $h = 2r$ ହେଲେ ଏହାର ଆୟତନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 25.22

ଏକ ବର୍ଗଆକୃତିର ଧାତବ ଚଦରର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ 48 ସେ.ମି. । ଏହା ଚାରିକଣରୁ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗାକୃତି ଖଣ୍ଡମାନ କାଟି ନିଆଯାଇଛି । ତା'ପରେ ପାଖଗୁଡ଼ିକୁ ଭାଙ୍ଗି ଗୋଟିଏ ଖୋଲା ବାକ୍ସ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଇଛି । କଣରୁ କଟାଯାଇଥିବା ବର୍ଗଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଖଣ୍ଡଗୁଡ଼ିକର ଧାରର ମାପ କେତେ ହେଲେ, ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଥିବା ବାକ୍ସର ଆୟତନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ ?

ସମାଧାନ :

କଣମାନଙ୍କରୁ କଟାଯାଇଥିବା ସାନ ବର୍ଗର ବାହୁ x ସେ.ମି. ହେଉ । ଫଳରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଥିବା ବାକ୍ସର ଭୂମିର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧାର ହେବ $(48 - 2x)$ ସେ.ମି. ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା ହେବ x ସେ.ମି. ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $x > 0$, $48 - 2x > 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $x < 24$

$\therefore$ x, 0 ଓ 24 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅଟେ ବା, $0 < x < 24$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ବାକ୍ସର ଆୟତନ = $(48 - 2x)(48 - 2x)$

ଅର୍ଥାତ୍ $V = (48 - 2x)\cdot x$

$\therefore \frac{dV}{dx} = (48-2x)^2 + 2(48-2x)(-2)x$

$= (48 - 2x)(48 - 6x)$

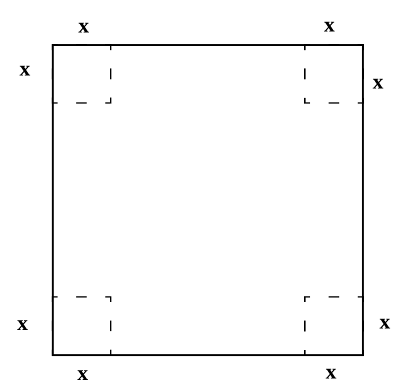
ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି $\frac{dV}{dx} = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $(48 - 2x)(48 - 6x) = 0$

ଆମେ ପାଇବା ହୁଏତ $x = 24$ ବା $x = 8$

$\because 0 < x < 24$

$\therefore x = 24$ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $x = 8$ ସେ.ମି.



ଚିତ୍ର 25.12

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\dfrac{d^2V}{dx^2} = 24x - 384$

$$\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=8} = 192 - 384 = -192 < 0,$$

ଏଣୁ, x = 8 ଲାଗି, ଆୟତନ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବ ।

ଏଣୁ ପ୍ରତି କଣରୁ 8 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବର୍ଗ କାଟିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣ 25.23

ଦୈନିକ x ସଂଖ୍ୟକ ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରୟ କରୁଥିବା ଗୋଟିଏ ବ୍ୟବସାୟ ସଂସ୍ଥାର ଲାଭ ସୂଚାଉଥିବା ଫଳନ P(x) ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

$P(x) = (150 - x)x - 1625$

ସଂସ୍ଥାର ଲାଭ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ହେବା ଲାଗି ଦୈନିକ ବିକ୍ରି କରାଯାଉଥିବା ବସ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲାଭ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ ବ୍ୟବସାୟ ସଂସ୍ଥାଟି ଦୈନିକ ବିକ୍ରି କରୁଥିବା ବସ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟା x ।

ସର୍ବାଧିକ ଲାଭ ପାଇବା ଲାଗି

$P'(x) = 0$ ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{dP}{dx} = 0$

ବା, $\dfrac{d}{dx}[(150 - x)x - 1625] = 0$

ବା, $150 - 2x = 0$ ବା, $x = 75$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\dfrac{d}{dx}P'(x) = P''(x) = -2$ ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ।

ଏଣୁ x = 75 ହେଲେ P(x) ସର୍ବାଧିକ ।

ଏଣୁ, ସଂସ୍ଥାଟି ଦୈନିକ 75ଟି ବସ୍ତୁ ବିକ୍ରୟ କଲେ, ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲାଭ ପାଇବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ୍, ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲାଭ = P(75) = (150 – 175)×75 – 1625

= ଟ. (75×75 – 1625)

= ଟ. (5625 – 1625) = ଟ. 4000

ଉଦାହରଣ 25.24

'r' ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଲକ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇପାରୁଥିବା ବୃହତ୍ତମ ସିଲିଣ୍ଡରର ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

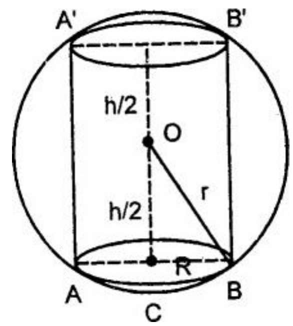
ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଗୋଲକ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇପାରୁଥିବା ବୃହତ୍ତମ ସିଲିଣ୍ଡରର ଉଚ୍ଚତା h ଏବଂ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ R । ସିଲିଣ୍ଡରଟିର ଆୟତନ V ହେଉ ।

ତେବେ, $V = \pi r^2 h$

Δ OCBରୁ ପାଇବା

$$r^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + R^2 \qquad \left[\because OB^2 = OC^2 + BC^2\right]$$

$$\therefore R^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} \qquad ...(ii)$$



ଚିତ୍ର 25.13

ବର୍ତ୍ତମାନ $V = \pi\left(r^2 - \frac{h^2}{4}\right)h = \pi r^2 h - \pi\frac{h^3}{4}$

$$\therefore \frac{dV}{dh} = \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4}$$

ଗରିଷ୍ଠ/ଲଘିଷ୍ଠ ପାଇଁ, $\frac{dV}{dh} = 0$

$$\therefore \pi r^2 - \frac{3\pi h^2}{4} = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{4r^2}{3} \Rightarrow h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\frac{d^2V}{dh^2} = -\frac{3\pi h}{2}$

$\therefore \frac{d^2V}{dh^2}$ ($h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ଠାରେ) $= -\frac{3\pi \times 2r}{2 \times \sqrt{3}}$

$$= -\sqrt{3}\pi r < 0$$

$\therefore h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ଠାରେ V ହେଉଛି ଗରିଷ୍ଠ ।

(ii)ରେ $h = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$R^2 = r^2 - \frac{4r^2}{4 \times 3} = \frac{2r^2}{3}$$

$$\therefore R = \sqrt{\frac{2}{3}}r$$

ସିଲିଣ୍ଡରର ସର୍ବାଧିକ ଆୟତନ = $\pi R^2 h$

$= \pi\left(\frac{2}{3}r^2\right)\left(\frac{2r}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi r^3}{3\sqrt{3}}$ ଘନସେ.ମି.

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.5

1. ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ଯାହାର ସମଷ୍ଟି 15 ଏବଂ ଗୋଟିକର ବର୍ଗ ଓ ଅନ୍ୟଟିର ଘନର ଗୁଣଫଳ ସର୍ବାଧିକ ।

2. 15 କୁ ଦୁଇଟି ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତକର ଯେପରିକି ସେ ଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ।

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ ପରିସୀମା ବିଶିଷ୍ଟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବାଧିକ ।

4. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦତ୍ତ କର୍ଣ୍ଣ ବିଶିଷ୍ଟ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ତ୍ରିଭୁଜ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ତା'ର ପରିସୀମା ସର୍ବାଧିକ ।

5. ଗୋଟିଏ ଝରକାର ତଳ ଅଂଶ ଆୟତ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଏବଂ ଏହାର ଉପର ଅଂଶ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତାକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ । ଯଦି ଏହାର ପରିସୀମା 30 ମି. ହୁଏ, ଝରକାର ମାପଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରି ଝରକା ମଧ୍ୟ ଦେଇ ସର୍ବାଧିକ ପରିମାଣର ଆଲୋକ ଆସିପାରିବ ।

6. 100 ଘନସେ.ମି. ଆୟତନ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଆବଦ୍ଧ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସରଳ ସିଲିଣ୍ଡରର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ଏହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବ ।

7. ଏକ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର ତିଆରି କରବାକୁ ହେବ ଯାହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଉଚ୍ଚତାର ସମଷ୍ଟି 6 ମି. । ସିଲିଣ୍ଡରଟିର ସର୍ବାଧିକ ଆୟତନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ କୋନ୍‌ରେ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇପାରୁଥିବା ସର୍ବାଧିକ ଆୟତନ ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର ଉଚ୍ଚତା, କୋନ୍‌ର ଉଚ୍ଚତାର ଏକ ତୃତୀୟାଂଶ ସହ ସମାନ ହେବ ।

9. ଦତ୍ତ ଆୟତନ ବିଶିଷ୍ଟ କୋନ୍ ଆକୃତିର ତମ୍ବୁ ତିଆରି କରାଯିବ । ତମ୍ବୁ ତିଆରି ନିମିତ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ କ୍ୟାନ୍‌ଭାସ୍‌ର ପରିମାଣ ସର୍ବନିମ୍ନ ହେବା ନିମିତ୍ତ, ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ଓ ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ଜଣେ ନିର୍ମାତା 16π ଘନମିଟର ଆୟତନ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର ଆବଶ୍ୟକ କରନ୍ତି । ସର୍ବନିମ୍ନ ପରିମାଣର ପୃଷ୍ଠ ବିଶିଷ୍ଟ ଧାତବ ଚଦର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ସିଲିଣ୍ଡରଟି ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ଲାଗି ସିଲିଣ୍ଡରର ମାପଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଗୋଟିଏ ସିନେମା ହଲ୍‌ର ପରିଚାଳକ ଅଧିକ ଦର୍ଶକ ପାଇବା ଲକ୍ଷ୍ୟରେ ତାଙ୍କର ଟିକେଟ ଦାମକୁ 55 ଟଙ୍କାରୁ କମାଇବାକୁ ଚାହାନ୍ତି । ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟକୁ ବିଚାର କରି ସେ ସ୍ଥିର କଲେ ଯେ ଦୈନିକ ହାରାହାରି ଦର୍ଶକ ସଂଖ୍ୟା 'q' କୁ ନିମ୍ନମତେ 'x' ର ଫଳନ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରି ହେବ, ଯେଉଁଠି x ହେଉଛି ଟିକେଟ୍‌ର ମୂଲ୍ୟରେ ଘଟିଥିବା ହ୍ରାସ ପରିମାଣ ।

$q = 500 + 100x$

ଟିକେଟର ଦାମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ଆୟ ହେଉଥିବା ରାଜସ୍ୱ ସର୍ବାଧିକ ହେବ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- **ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ :** ଏକ ଫଳନ f(x) କୁ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $f(x_2) \geq f(x_1)$ ଯେଉଁଠି $x_2 > x_1$ ।
- **ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ :** ଏକ ଫଳନ f(x) କୁ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି $f(x_2) \leq f(x_1)$ ଯେଉଁଠି $x_2 > x_1$ ।
- ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ f(x) ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ଯଦି ସମସ୍ତ $x \in [a, b]$ ଲାଗି $f'(x) > 0$ ।
- ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ f(x) ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ହୁଏ, ଯଦି ସମସ୍ତ $x \in [a, b]$ ଲାଗି $f'(x) < 0$ ।
- **ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ :**

  (i) ଏକ ଫଳନକୁ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ (ବର୍ଦ୍ଧମାନ) କୁହାଯାଏ, ଯଦି ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

  (ii) ଏକ ଫଳନ f(x) କୁ ଏକଦିଷ୍ଟ (ହ୍ରାସମାନ) କୁହାଯାଏ, ଯଦି ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ହ୍ରାସପାଏ । ଯେଉଁ ଫଳନ f(x), ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ତଥା ହ୍ରାସ ପାଏ, ତାହା ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

- ଫଳନ $f(x)$ର $x = a$ ବିନ୍ଦୁର ପ୍ରତିବେଶରେ ଥିବା ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ
  - (i) ଯଦି ବିନ୍ଦୁ 'a'ର ବାମରେ $f'(x) > 0$ ଏବଂ ବିନ୍ଦୁ $x = a$ର ଡାହାଣରେ $f'(x) < 0$ ହୁଏ, ତେବେ $f(x)$ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ରହିବ ।
  - (ii) ଯଦି ବିନ୍ଦୁ 'a' ର ବାମରେ $f'(x) < 0$ ଏବଂ ବିନ୍ଦୁ $x = a$ର ଡାହାଣରେ $f'(x) > 0$ ହୁଏ, ତେବେ $f(x)$ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ରହିବ ।
- ଯଦି $x = a$ ଠାରେ $f(x)$ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ଥାଏ ଏବଂ $x = a$ ଠାରେ $f(x)$ ଅବକଳନୀୟ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ $f'(a) = 0$ ।
  - (i) ଯଦି x ର ମାନ 'a' କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, $f'(x)$ ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକରୁ ଋଣାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ, ତେବେ $x = a$ ଠାରେ, $f(x)$ ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଥାଏ ।
  - (ii) ଯଦି x ର ସ୍ଥାନ 'a' କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକରୁ ଧନାତ୍ମକକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ, ତେବେ $x = a$ ଠାରେ, $f(x)$ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ଥାଏ ।
- **ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ପରୀକ୍ଷା**
  - (i) ଯଦି $f'(a) = 0$ ଏବଂ $f''(a) < 0$, ତେବେ $x = a$ ଠାରେ $f(x)$ ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଥାଏ ।
  - (ii) ଯଦି $f'(a) = 0$ ଏବଂ $f''(a) > 0$, ତେବେ $x = a$ ଠାରେ $f(x)$ ର ଏକ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ଥାଏ ।
  - (iii) ଯଦି $f'(a) = 0$ ଏବଂ $f''(a) = 0$,ତେବେ $x = a$ ଠାରେ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, x ଯେତେବେଳେ 'a'କୁ ଅତିକ୍ରମ କରେ, ସେତେବେଳେ $f'(x)$ର ଚିହ୍ନ ପରିବର୍ତ୍ତନ ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରୁ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ସମସ୍ତ $x \in R$ ପାଇଁ $f(x) = x^2$ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ହ୍ରାସମାନ ନୁହେଁ ।

ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଓ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ହ୍ରାସମାନ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

2. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$
3. $\frac{x}{4} + \frac{4}{x}, x \neq 0$
4. $x^4 - 2x^2$ 5. $\sin x - \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$ ଚିତ୍ର **25.12**

ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

6.(a) $x^3 - 6x^2 + 9x + 7$ (b) $2x^3 - 24x + 107$

(c) $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ (d) $x^4 - 62x^2 + 120x + 9$

7.(a) $\frac{1}{x^2+2}$ (b) $\frac{x}{(x-1)(x-4)}, 1 < x < 4$ (c) $x\sqrt{1-x},\ x < 1$

8.(a) $\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ (b) $\sin 2x,\ 0 \le x \le 2\pi$

(c) $-x + 2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

9. ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [0, 5]ରେ ଥିବା xର କେଉଁମାନ ପାଇଁ, $x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଅଟେ ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସେ ବିନ୍ଦୁଟି ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

10. ବକ୍ର $-x^3 + 3x^2 + 2x - 27$ ର ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଏହା ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଆନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ବିନ୍ଦୁଟି ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

11. ଏକ ସରଳ ବୃତ୍ତଭୂମିକ ସିଲିଣ୍ଡର ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପାତ୍ର ନିର୍ମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯାହାର ସମଗ୍ର ପୃଷ୍ଠତଳର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ହେଉଛି 24π ବର୍ଗ ମି. । ସିଲିଣ୍ଡରଟିର ଆୟତନ ସର୍ବାଧିକ ହେବା ପାଇଁ ଏହାର ମାପଗୁଡ଼ିକ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

12. ଦୁଇ ଶଯ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ 400 କୋଠରି ଥିବା ଏକ ହୋଟେଲ୍ କମ୍ପ୍ଲେକ୍ସର 300ଟି କୋଠରିକୁ ଦୈନିକ 360 ଟଙ୍କା ହାରରେ ଭଡା ଦିଆଯାଇଛି । ପରିଚାଳକଙ୍କ ଗବେଷଣାରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଦୈନିକ ଭଡାକୁ x ଟଙ୍କା କମାଇ ଦିଆଗଲେ ଭଡା ଯାଇଥିବା କୋଠରି $q = \frac{5}{4}x + 300,\ 0 \le x \le 80$ । ସର୍ବୋଚ୍ଚ ରାଜସ୍ୱ ପାଇବା ପାଇଁ ହେଲେ, ଭଡା କେତେ କରିବାକୁ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ସର୍ବୋଚ୍ଚ ରାଜସ୍ୱ କେତେ ହେବ ତାହା ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.2

1.(a) $x > \frac{7}{2}$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $x < \frac{7}{2}$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ

(b) $x > \frac{5}{2}$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $x < \frac{5}{2}$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ

2.(a) $x > 6$ ବା $x < -2$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ $-2 < x < 6$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ

(b) $x > 4$ ବା $x < 2$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଅନ୍ତରାଳ]2, 4[ରେ ହ୍ରାସମାନ

3.(a) $x < -2$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $x > -2$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ ।

(b) ଅନ୍ତରାଳ $-1 < x < -2$ରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $x > -1$ ବା $x < -2$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ ।

4.(a) ସର୍ବଦା ବର୍ଦ୍ଧମାନ

(b) $x > 2$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଅନ୍ତରାଳ $0 < x < 2$ ରେ ହ୍ରାସମାନ ।

(c) $x > 2$ ବା $x < -2$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଅନ୍ତରାଳ $-2 < x < 2$ରେ ହ୍ରାସମାନ ।

5.(c) ଅନ୍ତରାଳ $\frac{3\pi}{8} \le x \le \frac{7\pi}{8}$ ରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ

ଅନ୍ତରାଳ $0 \le x \le \frac{3\pi}{8}$ ରେ ହ୍ରାସମାନ

ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର, ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $x = \frac{3\pi}{8}$ ଏବଂ $x = \frac{7\pi}{8}$ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.3

1. $x = 4$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= -4$
2. $x = 3$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ଲଘିଷ୍ଠ ଏବଂ ନିମ୍ନତମ ମାନ $= 15$,
   $x = 1$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ଗରିଷ୍ଠ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ $= 19$
3. $x = 6$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -128, $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ -3 ।
4. $x = -6$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -1647, $x = 5$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -316 ।
   $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 68 ।
5. $x = 0$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -4 $x = -2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ 0
6. $x = -1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -1 $x = 3$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $\frac{1}{7}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.4

1. $x = 2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -34, $x = -3$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 91 ।
2. $x = 0$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -5, $x = 8$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚମାନ 251 ।

3. $x = 0$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -4, $x = -2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 0
4. $x = 3$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $= -28$, $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= 0$ ।
   $x = 0$ ଠାରେ, ଗରିଷ୍ଠ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ଲଘିଷ୍ଠ ନୁହେଁ ।
5. $x = \frac{\pi}{3}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ।
6. $x = \frac{\pi}{4}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= \sqrt{2}$ ।
7. $x = -\frac{\pi}{6}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$,
   $x = \frac{\pi}{6}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 25.5

1. ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 6, 9 । 2. ଭାଗ ଦୁଇଟି ହେଲେ 7.5, 5.5
5. ମାପଗୁଡ଼ିକ : ପ୍ରତ୍ୟେକ $\frac{30}{\pi+4}$ ମି., $\frac{30}{\pi+4}$ ମି.,
6. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ ସେ.ମି.; ଉଚ୍ଚତା $= 2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ ସେ.ମି.
7. ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $= 32\pi$ ଘନମିଟର 9. $h = \sqrt{2}r$
10. $r = 2$ ମିଟର, $h = 4$ ମିଟର 11. ଟ. 3000 – 00

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

2. $x > 2$ ବା $x < -1$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଅନ୍ତରାଳ $-1 < x < 2$ ରେ ହ୍ରାସମାନ
3. $x > 4$ ବା $x < -4$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, ଅନ୍ତରାଳ $]-4, 4[$ ରେ ହ୍ରାସମାନ
4. $x > 1$ ବା $-1 < x < 0$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $x < -1$ ବା $0 < x < 1$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ
5. $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$ ବା $\frac{7\pi}{4} \le x \le 2\pi$ ପାଇଁ ବର୍ଦ୍ଧମାନ, $\frac{3\pi}{4} \le x \le \frac{7\pi}{4}$ ପାଇଁ ହ୍ରାସମାନ ।

6.(a) $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 11; $x = 3$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ 7 ।
(b) $x = -2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 139; $x = 2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ 75 ।
(c) $x = -3$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ 20; $x = \frac{1}{3}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $\frac{40}{27}$ ।
(d) $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ 68;
   $x = 5$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -316 ଏବଂ
   $x = -6$ ଠାରେ ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -1627 ।

7.(a) $x = 0$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $\frac{1}{2}$

(b) $x = 2$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ -1

(c) $x = \frac{2}{3}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $\frac{2}{3\sqrt{3}}$

8.(a) $x = \frac{\pi}{6}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $\frac{3}{4}$;

$x = \frac{\pi}{2}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $\frac{1}{2}$;

(b) $x = \frac{\pi}{4}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ 1;

$x = \frac{3\pi}{4}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ -1

(c) $x = \frac{\pi}{3}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ମାନ $\frac{-\pi}{4} + \sqrt{3}$;

$x = \frac{5\pi}{3}$ ଠାରେ, ସ୍ଥାନୀୟ ନିମ୍ନତମ ମାନ $\frac{-5\pi}{3} - \sqrt{3}$

9. $x = 5$ ଠାରେ, ସର୍ବାଧିକ ଆନତି ହେଉଛି 24;
ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ : (5, 24) ।

10. $x = 1$ ଠାରେ, ସ୍ପର୍ଶକର ସର୍ବାଧିକ ଆନତି ହେଉଛି 5, ବିନ୍ଦୁଟି ହେଉଛି (1, –23)

11. ସିଲିଣ୍ଡରର ଭୂମିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ = 2 ମି. ଓ ଉଚ୍ଚତା = 4 ମି.

12. ହ୍ରାସପ୍ରାପ୍ତ ଭଡା ହେଉଛି ଟ. 300-00, ସର୍ବୋଚ୍ଚ ରାଜସ୍ୱ = ଟ. 1,12,500 - 00