୨୪

ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବ

ପୂର୍ବପାଠରେ ତୁମେ ପଢିଛ ଯେ ଏକ ରେଖାର ଆନତି (slope) ହେଉଛି, ରେଖାଟି x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା କୋଣର ଟ୍ୟାଞ୍ଜେଣ୍ଟ (tangent) ସହ ସମାନ । ଏହାକୁ ଅକ୍ଷର ‘m’ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଏଣୁ ଏକ ରେଖା x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା କୋଣ ଯଦି θ ହୁଏ, ତେବେ m ର ମାନ tan θ ସହ ସମାନ ।

ତୁମେ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ପଢିଛ ଯେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖାର ଆନତି

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$ ।

ଏହି ପାଠରେ, ଆମେ ଅବକଳନ - ଗଣିତ ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ କରି, ବିଭିନ୍ନ ବକ୍ରର ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଆମେ ମଧ୍ୟ ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ (Rolle’s theorem) ଓ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ (Mean value theorem) ପଢିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ସେ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱୟର ପ୍ରୟୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବାପରେ, ତୁମେ

- ଏକ ବକ୍ର(ଫଳନର ଲେଖ)ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସଂଜ୍ଞା କହିପାରିବ;
- ଦତ୍ତ ସର୍ତ୍ତରେ, ଗୋଟିଏ ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ଲାଗ୍ରାଞ୍ଜଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ କହିଦେଇ ପାରିବ; ଏବଂ
- ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବା ସହ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରୟୋଗକରି ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

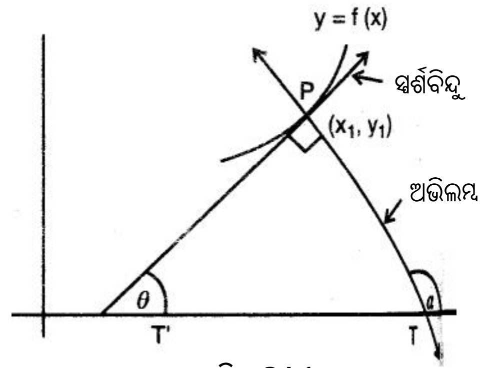
- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ଜ୍ଞାନ :
- ଏକ ବକ୍ରପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ଧାରଣା
- ବିଭିନ୍ନ ଫଳନର ଅବକଳଜର ଧାରଣା
- ଏକ ଫଳନର ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବକଳଜର ଜ୍ୟାମିତିକ ଅର୍ଥ

ମଡ୍ୟୁଲ-V

ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

24.1 ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି



ଚିତ୍ର **24.1**

ମନେକରାଯାଉ, $y = f(x)$ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ବକ୍ର ଏବଂ $P(x_1, y_1)$ ଏହି ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।
ତେବେ $P(x_1, y_1)$ ବିନ୍ଦୁରେ PTର ଆନତି

ହେଉଛି (x_1, y_1) ଠାରେ $\frac{dy}{dx}$ ... (i)

ଏବଂ (i) ହେଉଛି $\tan\theta$ ସହ ସମାନ ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ବକ୍ରର ଅଭିଲମ୍ବ ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$$

$$= -\frac{1}{\tan\theta}$$

$\therefore$ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି $= -\frac{1}{m} = \frac{-1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}(x_1, y_1)$ ଠାରେ

ବା, $-\left(\frac{dx}{dy}\right)(x_1, y_1)$ ଠାରେ

ଟୀକା :

1. ଏକ ବକ୍ରର କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକଟି x-ଅକ୍ଷ ସମାନ୍ତର ହେବ ଯଦି $\theta = 0$ ହୁଏ, ଅର୍ଥାତ୍ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବକଳଜର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ । ଅନ୍ୟକଥାରେ, (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ $\frac{dx}{dy} = 0$ ।

2. ଏକ ବକ୍ର $y = f(x)$ର ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକଟି y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ଯଦି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ $\frac{dy}{dx} = 0$ ।

ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ଆଲୋଚନା କରିବା :

ଉଦାହରଣ 24.1

ବକ୍ର $x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 5$ର $(1, 1)$ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$x^2 + x^3 + 3xy + y^2 = 5$... (i)

(i) ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$2x+3x^2+3\left[x\frac{dy}{dx}+y\cdot 1\right]+2y\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{... (ii)}$$

(ii)ରେ x=1 ଓ y=1 ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$$2\times 1+3\times 1+3\left[\frac{dy}{dx}+1\right]+2\frac{dy}{dx}=0$$

ବା, $5\frac{dy}{dx}=-8 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{8}{5}$

∴ ବକ୍ର (1, 1) ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ହେଉଛି

ଏବଂ ବକ୍ର (1, 1) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନିତ ହେଉଛି $\frac{5}{8}$ ।

ଉଦାହରଣ 24.2

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $y=\frac{1}{6}[3x^5+2x^3-3x]$ ବକ୍ର x = ±3 ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ସ୍ପର୍ଶକଗୁଡ଼ିକ ସମାନ୍ତର

ସମାଧାନ :

ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y=\frac{3x^5+2x^3-3x}{6}$ ... (i)

(i)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx}=\frac{15x^4+6x^2-3}{6}$$

x = 3 ରେ, $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{[15(3)^4+6(3)^2-3]}{6}=\frac{1}{6}[15\times 9\times 9+54-3]$

$$=\frac{3}{6}[405+17]=211$$

x = –3 ରେ, $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{6}[15(-3)^4+6(-3)^2-3]=211$

∴ x = ±3 ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ସ୍ପର୍ଶକ ମାନଙ୍କର ଆନତି ସମାନ ହୋଇଥିବାରୁ, ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।

ଉଦାହରଣ 24.3

$6y^3 = px^2 + q$ ବକ୍ରର (2, –2) ଠାରେ ବକ୍ରର ଆନତି ହେଉଛି $\frac{1}{6}$ । p ଓ qର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $6y^3 = px^2 + q$ ... (i)

(i)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ଆମେ ପାଇବା

$$18y^2\frac{dy}{dx} = 2px \;\; ...\text{(ii)}$$

x = 2, y = –2 ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$18(-2)^2\frac{dy}{dx} = 2p\cdot 2 = 4p$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{p}{18}$$

ଏହା $\frac{1}{6}$ ଦତ୍ତ ଅଛି ।

$$\therefore \frac{1}{6} = \frac{p}{18} \Rightarrow p = 3$$

$\therefore$ ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେବ $6y^3 = 3x^2 + q$

ପୁନଶ୍ଚ (2, –2) ବିନ୍ଦୁଟି ମଧ୍ୟ ବକ୍ର ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore 6(-2)^3 = 3(2)^2 + q$

$\Rightarrow -48 - 12 = q$ ବା $q = -60$

$\therefore p = 3$ ଓ $q = -60$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବକ୍ରର ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = x^3 - 2x$, $x = 2$ ଠାରେ (ii) $x^2 + 3y + y^2 = 5$, (1, 1)ଠାରେ

(iii) $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$, $\theta = \frac{\pi}{12}$ ଠାରେ

2. ବକ୍ର $xy + px + qy = 2$ର (1, 1) ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି 2 ହେଲେ, p ଓ qର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ବକ୍ର $x^2 + y^2 = 18$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକ ରେଖା $x + y = 3$ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର

4. ବକ୍ର $y = x^2 - 4x + 5$ ଉପରିସ୍ଥ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକଟି $2y + x - 7 = 0$ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ ?

24.2 ଏକ ବକ୍ରପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଓ m ଆନତି ବିଶିଷ୍ଟ ସରଳ ରେଖାର ସମୀକରଣ ହୁଏ

$y - y_1 = m(x - x_1)$

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଭାଗରେ ହୋଇଥିବା ଆଲୋଚନା ଅନୁଯାୟୀ, ଏକ ବକ୍ର $y = f(x)$ର (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ

ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ହେଉଛି $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ଏବଂ (x_1, y_1) ଠାରେ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି ହେଉଛି $\left(-\frac{dy}{dx}\right)$ ।

$\therefore$ ବକ୍ର $y = f(x)$ ପ୍ରତି, (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y - y_1 = \frac{dy}{dx}_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

ଏବଂ ବକ୍ର $y = f(x)$ ପ୍ରତି, (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y - y_1 = \left(\frac{-1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(x_1, y_1)} [x - x_1]$$

ଟୀକା :

(i) ଏକ ବକ୍ରର ସ୍ପର୍ଶକ ରେଖା, x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୁଏ, ଯଦି $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = 0$ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହୁଏ, $y = y_1$

(ii) ଯଦି $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} \to \infty$, ତେବେ (x_1, y_1) ଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକ y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୁଏ ଏବଂ ଏହାର ସମୀକରଣ ହୁଏ $x = x_1$

ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ନେଇ ଆଲୋଚନା କରିବା :

ଉଦାହରଣ 24.4

ବୃତ୍ତର $x^2 + y^2 = 25$ର $(4, 3)$ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ସ୍ପର୍ଶକର ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ବୃତ୍ତ ସୀମକରଣ ହେଉଛି

$x^2 + y^2 = 25$ ... (1)

(1)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା, ପାଇବା

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,\,3)\text{ ଠାରେ}} = -\frac{4}{3}$$

$\therefore$ $(4, 3)$ ଠାରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y-3=-\frac{4}{3}(x-4)$$

ବା, $4(x-4)+3(y-3)=0$ ବା, $4x-3y=25$

ପୁନଶ୍ଚ, ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି $=\dfrac{-1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,\,3)}}=\dfrac{3}{4}$

$\therefore$ (4, 3) ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y-3=\frac{3}{4}(x-4)$$

ବା, $4y-12=3x-12 \Rightarrow 3x=4y$

$\therefore$ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି (4, 3) ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $4x+3y=25$

ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି (4, 3) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $3x=4y$ ।

ଉଦାହରଣ 24.6

ବୃତ୍ତ $16x^2+9y^2=144$ର (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $y_1 > 0$ ଓ $x_1 = 2$

ସମାଧାନ :

ବୃତ୍ତର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $16x^2+9y^2=144$ ... (i)

(i)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$32x+18y\frac{dy}{dx}=0$$

ବା $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{16x}{9y}$

$\because$ $x_1=2$ ଏବଂ (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁଟି ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\therefore$ $16(2)^2+9(y^2)=144$

$$\Rightarrow y^2=\frac{80}{9} \Rightarrow y=\pm\frac{4}{3}\sqrt{5}$$

ଯେହେତୁ $y_1>0 \Rightarrow y=\dfrac{4}{3}\sqrt{5}$

$\therefore$ ବକ୍ରର $\left(2, \dfrac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି [x–2]

$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(-\frac{16x}{9y}\right)_{\left(2,\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)}$ ଠାରେ $[x-2]$

ବା, $y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=-\frac{16}{9}\cdot\frac{2\times 3}{4\sqrt{5}}(x-2)$ ବା, $y-\frac{4}{3}\sqrt{5}+\frac{8}{3\sqrt{5}}(x-2)=0$

ବା, $3\sqrt{5}\,y-\frac{4}{3}\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{5}+8(x-2)=0$

ବା $3\sqrt{5}y-20+8x-16=0$ ବା, $3\sqrt{5}y+8x=36$

ପୁନଶ୍ଚ, ବକ୍ରର $\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)$ ଠାରେ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\left(\frac{9y}{16x}\right)_{\left(2,\frac{4}{3}\sqrt{5}\right)\text{ ଠାରେ}}[x-2]$

ବା, $y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{9}{16}\times\frac{2\sqrt{5}}{3}(x-2)$

ବା, $y-\frac{4}{3}\sqrt{5}=\frac{3\sqrt{5}}{8}(x-2)$

ବା, $3\times 8y-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}(x-2)$

ବା, $24y-32\sqrt{5}=9\sqrt{5}x-18\sqrt{5}$ ବା, $9\sqrt{5}x-24y+14\sqrt{5}=0$

ଉଦାହରଣ 24.7

ବକ୍ର $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ଉପରିସ୍ଥ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ଏହା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବେ ?

ସମାଧାନ : ବକ୍ରର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ ... (i)

(i)ର x-ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେବା ଦ୍ୱାରା, ପାଇବା

$\frac{2x}{9}-\frac{2y}{16}\cdot\frac{dy}{dx}=0$

ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{16x}{9y}$

ସ୍ପର୍ଶକ ଯଦି x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୁଏ, ତେବେ $\frac{dy}{dx}=0$

$\Rightarrow\frac{16x}{9y}=0\Rightarrow x=0$

(i)ରେ x = 0 ବସାଇଲେ, ପାଇବା $y^2 = -16$ ବା, $y = \pm 4i$

ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ବକ୍ର ଉପରେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ ଯେଉଁଠି ବକ୍ର $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ, x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 24.7 ଆନତି –4 ହୋଇଥିବା ଯେଉଁ ରେଖା, $y = \frac{1}{x-1}$ ବକ୍ରର ସ୍ପର୍ଶକ ଅଟନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $y = \frac{1}{x-1}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$

ଦତ୍ତ ଅଛି, $m = -4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -4$

$$\therefore \frac{-1}{(x-1)^2} = -4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = 1 \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

(i)ରେ $x = \frac{1}{2}$ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$$y = \frac{1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

ଯେତେବେଳେ $x = \frac{3}{2}, y = 2$

$\therefore$ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, $\left(\frac{3}{2}, 2\right), \left(\frac{1}{2}, -2\right)$

ଏଣୁ ସ୍ପର୍ଶକମାନଙ୍କର ସମୀକରଣ ହେଲା

(a) $y - 2 = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow y - 2 = -4x + 6$ ବା $4x + y = 8$

(b) $y + 2 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow y + 2 = -4x + 2$ ବା $4x + y = 0$

ଉଦାହରଣ 24.8 ବକ୍ର $y = x^3$ର (2, 8) ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ର ପ୍ରତି ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$y = x^3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2 \text{ ଠାରେ}} = 12$$

$\therefore$ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି $= -\frac{1}{12}$

$\therefore$ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

$$y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2)$$

ବା, $12(y-8) + (x-2) = 0$ ବା $x + 12y = 98$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.2

1. ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = x^4 - 16x^3 + 13x^2 - 10x$; (0, 5) ଠାରେ

(ii) $y = x^2$; (1, 1) ଠାରେ ।

(iii) $y = x^3 - 3x + 2$; ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁର x-ସ୍ଥାନାଙ୍କ = 3, ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ।

2. ଏଲିପ୍ସ (ଉପବୃତ୍ତ) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ପ୍ରତି (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

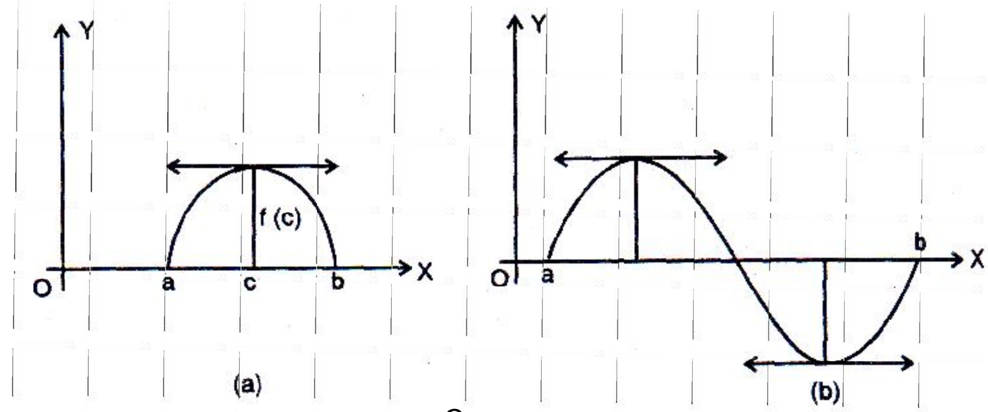
3. ହାଇପର୍ ବୋଲା $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ର (x_0, y_0) ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ହାଇପର୍‌ବୋଲା ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ବକ୍ର $y = x^3 + 2x + 6$ ପ୍ରତି ଯେଉଁ ଅଭିଲମ୍ବ, $x + 14y + 4 = 0$ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର, ସେଗୁଡ଼ିକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $8k^2 = 1$ ହେଲେ, $x = y^2$ ଏବଂ $xy = k$ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରିବେ ।

24.3 ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ

ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ ଆଲୋଚନା କରିବା, ଯେଉଁଥିରୁ ଜଣାପଡେ ଯେ $y = f(x)$ ଲେଖ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ a ଓ b, ଯାହାର କୋଟି f(a) ଓ f(b) ପରସ୍ପର ସମାନ, ସେ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ୟୂନ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ c ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି [c, f(c)] ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର (ଚିତ୍ର 24.2 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର 24.2

24.3.1 ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ଗାଣିତିକ ସୂତ୍ରଣ

ମନେକରାଯାଉ ଯେ f ଏକ ବାସ୍ତବ ଫଳନ ଯାହାକି ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ

(i) [a, b] ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳରେ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ

(ii) ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ f ଅବକଳନୀୟ

(iii) $f(a) = f(b)$

ତେବେ, ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ଅନ୍ୟୂନ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ c ଅଛି ଯେପରିକି $f'(c) = 0$

ମନ୍ତବ୍ୟ

(i) ମନ୍ତବ୍ୟ ''ଅନ୍ୟୂନ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ''ରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଗୋଟିଏରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁ $c \in (a, b)$ ଥାଇପାରେ ଯେପରିକି $f'(x) = 0$ ।

(ii) [a, b]ରେ fର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାର ସର୍ତ୍ତ ଅନିବାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଏଥିରେ କୋହଳ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

(iii) (a, b)ରେ fର ଅବକଳନୀୟ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ମଧ୍ୟ ଅନିବାର୍ଯ୍ୟ ଏବଂ ଏଥିରେ କୋହଳ କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ :

$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$ ହେଉଛି [–1, 1]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ (–1, 1)ରେ ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ ଏଠାରେ ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ବୈଧ ଅଟେ ।

ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣ ନେଇ ଆଲୋଚନା କରିବା

ଉଦାହରଣ 24.9

ନିମ୍ନ ଫଳନ ଲାଗି ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

$f(x) = x(x-1)(x-2), x \in [0, 2]$

ସମାଧାନ :

$f(x) = x(x-1)(x-2)$
$= x^3 - 3x^2 + 2x$

(i) f(x) ହେଉଛି ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନ । ଏଣୁ [0, 2]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(ii) (0, 2)ରେ x ଅବକଳନୀୟ ଅଟେ ।

(iii) ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(0) = 0$ ଏବଂ $f(2) = 0$

$\therefore$ f(0) = f(2)

$\therefore$ ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହୋଇଛି ।

ପୁନଶ୍ଚ, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f'(c) = 0$ ରୁ ମିଳେ $3c^2 - 6c + 2 = 0 \Rightarrow c = \dfrac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6}$

$$\Rightarrow c = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ଆମେ ଦେଖୁ ଯେ cର ଉଭୟ ମାନ (0, 2) ରେ ରହିଛି ।

ଉଦାହରଣ 24.10

ନିମ୍ନ ଫଳନରେ ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ-ଯୋଗ୍ୟତା (applicability)ର ଆଲୋଚନା କର ।

$f(x) = \sin x - \sin 2x,\ x\ [0, \pi]$ ... (i)

(i) ହେଉଛି ଏକ sine ଫଳନ । ଏହା ($(0, \pi)$ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଅବକଳନୀୟ ।

ପୁନଶ୍ଚ, ଆମେପାଉ f(0) = 0 ଏବଂ $f(\pi) = 0$

$\Rightarrow f(\pi) = f(0) = 0$

$\therefore$ ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହୋଇଛି

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(c) = 2[\cos^2 c - 1] - \cos c = 0$

ବା, $4 \cos^2 c - \cos c - 2 = 0$

$$\therefore \cos c = \frac{1 \pm \sqrt{1+32}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$$

ଯେହେତୁ $\sqrt{33} < 6$

$$\therefore \cos c < \frac{7}{8} = 0 \cdot 875$$

ଏଥିରୁ ଜଣାପଡେ ଯେ c, 0 ଓ π ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.3

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଲାଗି ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(i) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{3} + 2x,\ x \in [0, 3]$

(ii) $f(x) = x^2 - 1$, [–1, 1]ରେ

(iii) $f(x) = \sin x + \cos x - 1, \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ରେ

(iv) $f(x) = (x^2-1)(x-2)$, [–1, 2]ରେ

24.4 ଲାଂଗ୍ରାଞ୍ଜେଙ୍କ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟ

ଏହି ପ୍ରମେୟ ଦ୍ୱାରା ରୋଲେଙ୍କ ପ୍ରମେୟର କିଛି ଉନ୍ନତି ଘଟିଛି । ଏହି ପ୍ରମେୟ କହେ ଯେ ସ୍ପର୍ଶକ, x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହେବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ । ଏହି ପ୍ରମେୟ କହେ ଯେ ସ୍ପର୍ଶକ, ବକ୍ରର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର । ଅନ୍ୟ କଥାରେ, ଏହି ପ୍ରମେୟ କହେ ଯେ ଲେଖ ଉପରେ ସର୍ବଦା ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକ, ଲେଖର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ।

24.4.1 ଉପପାଦ୍ୟର ଗାଣିତିକ ସୂତ୍ରଣ

f ଏକ ବାସ୍ତବମାନ ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନ ହେଉ ଏବଂ ଏହା ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହେଉ ।

(a) [a, b]ରେ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ,

(b) (a, b)ରେ f ଅବକଳନୀୟ ଏବଂ

(c) $f(b) \neq f(a)$

ତେବେ ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ c ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

ମନ୍ତବ୍ୟ

ଯେତେବେଳେ $f(b) = f(a)$, $f'(c) = 0$, ତେବେ ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ, ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ପରିଣତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 24.11

ନିମ୍ନ ଫଳନ ଲାଗି ଲାଂଗ୍ରାଞ୍ଜେଙ୍କ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

$f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$, [3, 5]ରେ

ସମାଧାନ :

$f(x) = (x-3)(x-6)(x-9)$,

$= (x-3)(x^2 - 15x + 54)$

ବା, $f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162 \quad \ldots \text{(i)}$

(i) ହେଉଛି ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଫଳନ । ଏଣୁ ଏହା ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ତଥା ଅବକଳନୀୟ ।

ଏଠାରେ, $f(3) = 0$, $f(5) = (2)(-1)(-4) = 8$

$\therefore f(3) \neq f(5)$

$\therefore$ ମାଧମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ସମସ୍ତ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ।

$$\therefore f'(c) = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{8 - 0}{2} = 4$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $f'(x) = 3x^2 - 36x + 99$

$\therefore 3c^2 - 36c + 99 = 4$ ବା $3c^2 - 36c + 95 = 0$

$$\therefore c = \frac{36 \pm \sqrt{1296 - 1140}}{6} = \frac{36 \pm 12.5}{6}$$

$= 8.08$ ବା 3.9

$c = 3.9 \in (3, 5)$

$\therefore$ ଲାଂଗ୍ରାଞ୍ଜେଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦିତ ।

ଉଦାହରଣ 24.12

ପାରାବୋଲା $y = (x-4)^2$ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକ, (4, 0) ଓ (5, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ଜ୍ୟା ସହ ସମାନ୍ତର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ବକ୍ରର ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଉକ୍ତ ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତି ହେଉଛି ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ $(f'(x))$ ।

$f'(x) = 2(x-4)$

(4, 0) ଓ (5, 1) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ଜ୍ୟାର ଆନତି ହେଉଛି

$$\frac{1-0}{5-4} = 1 \left[\because m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right]$$

$\therefore$ ମାଧ୍ୟମାନ ପ୍ରମେୟ ଅନୁଯାୟୀ

$2(x-4) = 1$ ବା, $x - 4 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{9}{2}$, ଯାହାକି 4 ଓ 5ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ

ବର୍ତ୍ତମାନ $y = (x-4)^2$

ଯେତେବେଳେ, $x = \frac{9}{2}, y = \left(\frac{9}{2} - 4\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\left(\frac{9}{2}, \frac{1}{4}\right)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.4

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ ଯୋଗ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର :

(i) $f(x) = 3x^2 - 4$, [2, 3]ରେ (ii) $f(x) = \log x$, [1, 2]ରେ

(iii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, [1, 3] ରେ (iv) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$, [0, 1]ରେ

2. ପାରାବୋଲା $y = (x+3)^2$ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି (3, 0) ଓ (–4, 1) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ଜ୍ୟା ସହ ସମାନ୍ତର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ବକ୍ର $y = f(x)$ର (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ, ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

  $$y - y_1 = [f'(x)]_{(x_1, y_1)\text{ ରେ}} \{x - x_1\}$$

- ବକ୍ର $y = f(x)$ର (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ, ବକ୍ର ପ୍ରତି ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ହେଉଛି

  $$y - y_1 = \left[\frac{-1}{f'(x)}\right]_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$$

- ବକ୍ର $y = f(x)$ପ୍ରତି, ଏହାର (x_1, y_1) ବିନ୍ଦୁରେ, x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $y = y_1$ ଏବଂ y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ହେଉଛି $x = x_1$

- **ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ କହେ :** ଯଦି $f(x)$ ଏକ ଫଳନ, ଯାହାକି

  (i) ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ

  (ii) ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ଅବକଳନୀୟ

  (iii) $f(a) = f(b)$

  ତେବେ, (a, b)ରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ c ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି $f'(c) = 0$

- ଲାଂଗ୍ରାଞ୍ଜେଙ୍କ ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ କହେ ଯେ ଯଦି $f(x)$ ଏକ ଫଳନ ଯାହାକି

  (i) ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ

  (ii) ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ଅବକଳନୀୟ

  (iii) $f(b) \neq f(a)$

  ତେବେ, (a, b) ରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ c ଅବସ୍ଥିତ ଯେପରିକି

  $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବକ୍ର ପ୍ରତି, ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁରେ, ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ଆନତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $x = \sqrt{x},\ x = 9$ ରେ (ii) $y = x^3 + x,\ x = 2$ ରେ

(iii) $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1 + \cos\theta), \theta = \frac{\pi}{2}$ ରେ

(iv) $y = 2x^2 + \cos x,\ x = 0$ରେ (v) $xy = 6,\ (1, 6)$ରେ

2. ନିମ୍ନ ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta,\ \theta = \frac{\pi}{4}$ ରେ

3. ବକ୍ର $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ।

4. ବକ୍ର $y = x^2 - 2x + 5$ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) ଯାହାକି $2x + y + 7 = 0$ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର

(ii) ଯାହାକି $5(y-3x) = 12$ ରେଖା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ବକ୍ର $y = 7x^3 + 11$ର $x = 2$ ଏବଂ $x = -2$ ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ ଉକ୍ତ ବକ୍ର ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ ସମାନ୍ତର ।

6. ବକ୍ର $ay^2 = x^3$ର (am^2, am^3) ବିନ୍ଦୁରେ, ବକ୍ର ପ୍ରତି ଅଭିଲମ୍ବର ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଲାଗି ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟର ପରୀକ୍ଷା କର :

(i) $f(x) = (x^2-1)(x-2),\ [-1, 2]$ରେ

(ii) $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}, [0, 1]$ ରେ

(iii) $f(x) = \frac{8x^2}{3} - 2x,\ x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$

8. ଯଦି $f(x) = x^3 + bx^2 + ax,\ x \in [1, 3]$ ଏବଂ $c = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ ଲାଗି ରୋଲେଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୁଏ, a ଓ bର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି ମାଧ୍ୟମାନ ଉପପାଦ୍ୟ ପରୀକ୍ଷା କର :

(i) $f(x) = ax^2 + bx^2 + cx + d,\ [0, 1]$ରେ (ii) $f(x) = \frac{1}{4x+1}, [-1, 4]$ ରେ

(iii) $y = (x+3)^2,\ [-4, 3]$ରେ

10. ପାରାବୋଲା $f(x) = (x-3)^2$ର ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି ସ୍ପର୍ଶକଟି (3, 0) ଓ (4, 1) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ଜ୍ୟା ସହ ସମାନ୍ତର ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.1

1.(i) $10, -\frac{1}{10}$ (ii) $-\frac{2}{5}, \frac{5}{2}$ (iii) 1, –1

2. p = 5, q = –4 3. (3, 3), (–3, –3) 4. (3, 2)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.2

1.	ସ୍ପର୍ଶକ	ଅଭିଲମ୍ବ
(i)	y + 10x = 5	x – 10y + 50 = 0
(ii)	2x – y = 1	x + 2y – 3 = 0
(iii)	24x – y = 52x + 24y = 483	

2. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ 3. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

4. x + 14y – 254 = 0, x + 14y + 86 = 0

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.3

(i) $c = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3}$ (ii) c = 0 (iii) $c = \frac{\pi}{4}$ (iv) $c = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 24.4

1.(i) c = 2.5 (ii) $c = \frac{1}{\log_e 2}$ (iii) $c = \sqrt{3}$ (iv) $c = \frac{1}{3}$

2. $\left(-\frac{43}{14}, \frac{1}{196}\right)$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1.(i) $\frac{1}{6}, -6$ (ii) $13, -\frac{1}{13}$ (iii) 1, –1 (iv) 0, ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ (v) $-6, \frac{1}{6}$

2. $2\sqrt{2}(x+y) = a;\ x + y = 0$ 3. (3, 0) (–3, 0)

4.(i) 2x + y – 5 = 0 (ii) 12x + 36y = 155

6. $2x + 3my - am^2(2+3m^2) = 0$

7. $c = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$ (ii) କୌଣସି ବାସ୍ତବ ବିନ୍ଦୁରେ ନୁହେଁ (iii) $c = \frac{3}{8}$ 8. a = 11, b = –6

9.(i) $c = \frac{1}{2}$ (ii) ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ (iii) $c = -\frac{1}{2}$ 10. $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$