୨୩

ଘାତାଙ୍କୀ ଓ ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନର ଅବକଳନ

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଜନସଂଖ୍ୟା ସାଧାରଣତଃ ବୃଦ୍ଧିପାଏ, ମାତ୍ର କେତେକ ସ୍ଥଳେ ଏହା ମଧ୍ୟ ହ୍ରାସ ପାଇଥାଏ । ଅନେକ ଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣ ଅଛି ଯେଉଁଠି ବୃଦ୍ଧି ଓ ହ୍ରାସ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଘଟିଥାଏ । ଅର୍ଥନୀତି, କୃଷି ଓ ବ୍ୟବସାୟ ଆଦି କ୍ଷେତ୍ରର ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଇପାରେ । ଯେଉଁଠି ବୃଦ୍ଧି ଓ ହ୍ରାସ କ୍ରମାନ୍ୱୟୀ ହୋଇଥାଏ । ଆସ ଜୀବାଣୁମାନଙ୍କର ବୃଦ୍ଧିକୁ ବିଚାର କରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ଯଦି 10,00,000 ଜୀବାଣୁ ଅଛନ୍ତି ଏବଂ ଧରନିଆଯାଉ ଯେ ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା 10 ଘଣ୍ଟାରେ ଦୁଇଗୁଣ ହୋଇଥାଏ । ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ସମୟ ପରେ 30,00,000 ହେବ ତାହା ଜାଣିବା ପାଇଁ ଆମେ ଆଗ୍ରହୀ ।

ବୃଦ୍ଧି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (କ୍ରମାନ୍ୱୟୀ ବା ଅନ୍ୟକୌଣସି)ରୁ ଅଥବା କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରୁ ମିଳେ ନାହିଁ । ବାସ୍ତବତଃ ଗଣିତରେ ଅନ୍ୟ ଏକ ନିୟମ ଅଛି ଯାହାକୁ ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ (Exponential function) କୁହାଯାଏ । ଏହି ନିୟମ ଆମକୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରମାନଙ୍କରେ ବୃଦ୍ଧି ଓ ହ୍ରାସ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ । ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ ହେଉଛି ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନର (Logarithimic function) ବିଲୋମ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଉକ୍ତ ନିୟମ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ନିୟମମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

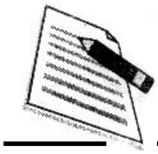
ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବାପରେ, ତୁମେ

- ଘାତାଙ୍କୀ ଓ ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ବୀଜଗାଣିତିକ, ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ, ଘାତାଙ୍କୀ ଓ ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନମାନଙ୍କର ସଂଯୋଗରେ ଗଠିତ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ,
- ଏକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ନିମ୍ନସ୍ଥ ମାନକ ସୀମାର ପ୍ରୟୋଗ :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}} = e$ (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^x-1}{x} = 1$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^x-1}{x} = \log_e a$ (v) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h} = 1$

- ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜର ସଂଜ୍ଞା ଓ ସେଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସୂତ୍ର ।

23.1 ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନର ଅବକଳଜ

ମନେକରାଯାଉ $y = e^x$ ଏକ ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ,... (i)

$\therefore\ y + \delta y = e^{(x+\delta x)}$ (ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି) ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ ପାଇବା

$\delta y = e^{x+\delta x} - e^x$

ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ଏବଂ $\delta x \to 0$ ସୀମା ନେଲେ,

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} e^x\,\frac{[e^{\delta x}-1]}{\delta x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x\cdot 1 = e^x$$

ଏହିପରି, ଆମେ ପାଇବା $\mathbf{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ : $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x\cdot\frac{d}{dx}(x) = e^x$

ତା'ପରେ, ମନେକରାଯାଉ $y = e^{ax+b}$

ତେବେ, $y + \delta y = e^{a(x+\delta x)+b}$ [δx ଓ δy ହେଉଛନ୍ତି ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି]

$\therefore\ \delta y = e^{a(x+\delta x)+b} - e^{ax+b}$

$= e^{ax+b}[e^{a\delta x} - 1]$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = e^{ax+b}\,\frac{[e^{a\delta x}-1]}{\delta x}$$

$$= a\cdot e^{ax+b}\,\frac{e^{a\delta x}-1}{a\delta x}$$ [a ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନକରି ଓ ହରଣ କର]

$\delta x \to 0$କୁ ସୀମା ନେଇ, ପାଇବା

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = a\cdot e^{ax+b}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{e^{a\delta x}-1}{a\delta x}$$

ବା, $$\frac{dy}{dx} = a\cdot e^{ax+b}\cdot 1\left[\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1\right]$$

$= a\cdot e^{ax+b}$

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ : $\frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = e^{ax+b}\cdot\frac{d}{dx}(ax+b) = e^{ax+b}\cdot a$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{ax+b}) = ae^{ax+b}$$

ଉଦାହରଣ 23.1

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) e^{5x} (ii) e^{ax} (iii) $e^{\frac{3x}{2}}$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ $y = e^{5x}$

ତେଣୁ $y = e^t$ ଯେଉଁଠି $5x = t$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = e^t \text{ ଏବଂ } 5 = \frac{dt}{dx}$$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^t \cdot 5 = 5e^{5x}$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $\frac{d}{dx}(e^{5x}) = e^{5x} \cdot \frac{d}{dx}(5x) = e^{5x} \cdot 5 = 5e^{5x}$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $y = e^{ax}$

ତେବେ $y = e^t$ ଯେଉଁଠି $t = ax$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = e^t \text{ ଏବଂ } \frac{dt}{dx} = a$$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = e^t \cdot a$

ଏଣୁ, $\frac{dy}{dx} = a \cdot e^{ax}$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $y = e^{\frac{-3x}{2}}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = e^{\frac{-3}{2}x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{-3}{2}x\right)$$

ଏଣୁ, $\frac{dy}{dt} = -\frac{3}{2}e^{\frac{-3x}{2}}$

ଉଦାହରଣ 23.2

ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = e^x + 2\cos x$ (ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \frac{5}{3}e^x + 2e$

ସମାଧାନ : (i) $y = e^x + 2\cos x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) + 2\frac{d}{dx}(\cos x) = e^x - 2\sin x$$

(ii) $y = e^{x^2} + 2\sin x - \frac{5}{3}e^x + 2e$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 2\cos x - \frac{5}{3}e^x + 0$ [$\because$ e ଏକ ଧ୍ରୁବକ]

$= 2xe^{x^2} + 2\cos x - \frac{5}{3}e^x$

ଉଦାହରଣ 23.3

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି

(i) $y = e^{x\cos x}$ (ii) $y = \frac{1}{x}e^x$ (iii) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

ସମାଧାନ : (i) $y = e^{x\cos x}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\frac{d}{dx}(x\cos x)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{x\cos x}\left[x\frac{d}{dx}\cos x + \cos x\frac{d}{dx}(x)\right]$

$= e^{x\cos x}[-x\sin x + \cos x]$

(ii) $y = \frac{1}{x}e^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(e^x)$ [ଗୁଣନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି]

$= \frac{-1}{x^2}e^x + \frac{1}{x}e^x$

$= \frac{e^x}{x^2}[-1+x] = \frac{e^x}{x^2}[x-1]$

(iii) $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\frac{1-x}{1+x}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

$= e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-1\cdot(1+x)-(1-x)\cdot 1}{(1+x)^2}\right]$

$= e^{\frac{1-x}{1+x}}\left[\frac{-2}{(1+x)^2}\right] = \frac{-2}{(1+x)^2}\cdot e^{\frac{1-x}{1+x}}$

ଉଦାହରଣ 23.4

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $e^{\sin x}\cdot\sin e^x$ (ii) $e^{ax}\cdot\cos(bx+c)$

ସମାଧାନ :

(i) $y = e^{\sin x}\cdot \sin e^x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin e^x) + \sin e^x \frac{d}{dx}e^{\sin x}$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot\frac{d}{dx}(e^x) + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= e^{\sin x}\cdot\cos e^x\cdot e^x + \sin e^x\cdot e^{\sin x}\cdot\cos x$$

$$= e \sin x\, [e^x\cdot\cos e^x + \sin e^x\cdot\cos x]$$

(ii) $y = e^{ax}\cos(bx+c)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{ax}\cdot\frac{d}{dx}\cos(bx+c) + \cos(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax}$$

$$= e^{ax}[-\sin(bx+c)]\frac{d}{dx}(bx+c) + \cos(bx+c)\, e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)$$

$$= -e^{ax}\sin(bx+c)\cdot b + \cos(bx+c)e^{ax}\cdot a$$

$$= e^{ax}[-b\sin(bx+c)\ a\cos(bx+c)]$$

ଉଦାହରଣ 23.5

$y = \dfrac{e^{ax}}{\sin(bx+c)}$ ହେଲେ, $\dfrac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(bx+c)\frac{d}{dx}e^{ax} - e^{ax}\frac{d}{dx}[\sin(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$

$$= \frac{\sin(bx+c)e^{ax}\cdot a - e^{ax}\cos(bx+c)\cdot b}{\sin^2(bx+c)}$$

$$= \frac{e^{ax}[a\sin(bx+c) - b\cos(bx+c)]}{\sin^2(bx+c)}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) e^{5x} (b) b^{7x+4} (c) $e^{\sqrt{2}x}$ (d) $e^{\frac{-7}{2}x}$ (e) e^{x^2+2x}

2. $\dfrac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $y = \frac{1}{3}e^x - 5e$ (b) $y = \tan x + 2\sin x + 3\cos x - \frac{1}{2}e^x$

(c) $y = 5\sin x - 2e^x$ (d) $y = e^x + e^{-x}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$ (b) $f(x) = e^{\sqrt{\cot x}}$

(c) $f(x) = e^{x\sin^2 x}$ (d) $f(x) = e^{x\sec^2 x}$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = (x-1)e^x$ (b) $f(x) = e^{2x}\sin^2 x$

5. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର, ଯଦି

(a) $y = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $y = \frac{e^{2x}\cdot\cos x}{x\sin x}$

23.2 ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନର ଅବକଳଜ

ପ୍ରଥମେ ଆମେ ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ।

ମନେକରାଯାଉ $y = \log x$... (i)

$\therefore\ y + \delta y = \log(x+\delta x)$ ... (ii) (δx ଓ δy ହେଉଛନ୍ତି x ଓ yର ଅନୁରୂପ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି)

(i) ଓ (ii)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$\delta y = \log(x+\delta x) - \log x$

$$= \log\frac{x+\delta x}{x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\delta x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]$$ [x ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଓ ହରଣକରି]

$$= \frac{1}{x}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$\delta x \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମା ନେଇ, ଆମେ ପାଇବା

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{x}\lim_{\delta x\to 0}\log\left[1+\frac{\delta x}{x}\right]^{\frac{x}{\delta x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\cdot\log\left\{\lim_{\delta x\to 0}\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}}\right\}$$

$$= \frac{1}{x} \log e \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} \left(1 + \frac{\delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\delta x}} = e \right]$$

ଏଣୁ, $\mathbf{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$

ଏହାପରେ ଆମେ ବିଚାର କରିବା ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନ

$y = \log(ax+b) \qquad \ldots \text{(i)}$

$\therefore\ y + \delta y = \log[a(x+\delta x)+b] \qquad \ldots \text{(ii)}$

[δx ଓ δy ହେଉଛନ୍ତି ଅନୁରୂପ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି]

(i) ଓ (ii)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$\delta y = \log[a(x+\delta x) + b] - \log(ax+b)$

$$= \log \frac{a(x+\delta x)+b}{ax+b}$$

$$= \log \frac{(ax+b)+a\delta x}{ax+b} = \log\left[1 + \frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{1}{\delta x} \log\left[1 + \frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$

$$= \frac{a}{ax+b} \cdot \frac{ax+b}{a\delta x} \log\left[1 + \frac{a\delta x}{ax+b}\right]$$ [$\frac{a}{ax+b}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ଓ ହରଣ କରି]

$$= \frac{a}{ax+b} \log\left[1 + \frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

$\delta x \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମା ନେଇ

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{a}{ax+b} \lim_{\delta x \to 0} \log\left[1 + \frac{a\delta x}{ax+b}\right]^{\frac{ax+b}{a\delta x}}$$

ବା, $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b} \log e \qquad \left[\because \lim_{\delta x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \right]$

ବା, $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ :

$$\frac{d}{dx}\log(ax+b) = \frac{1}{ax+b} \frac{d}{dx}(ax+b)$$

$$= \frac{1}{ax+b} \times a = \frac{a}{ax+b}$$

ଉଦାହରଣ 23.6

ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = \log x^5$ (ii) $y = \log\sqrt{x}$ (iii) $y = (\log x)^3$

ସମାଧାନ :

(i) $y = \log x^5 = 5 \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5 \cdot \frac{1}{x} = \frac{5}{x}$$

(ii) $y = \log\sqrt{x} = \log x^{\frac{1}{2}}$ ବା $y = \frac{1}{2}\log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$$

(iii) $y = (\log x)^3$

$\therefore\ y = t^3$ ଯେଉଁଠି $t = \log x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3t^2 \text{ ଏବଂ } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = 3t^2 \cdot \frac{1}{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x}(\log x)^2$$

ଉଦାହରଣ 23.7

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି

(i) $y = x^3 \log x$ (ii) $y = e^x \log x$

ସମାଧାନ :

(i) $y = x^3 \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx}(x^3) + x^3 \frac{d}{dx}(\log x)$$ [ଗୁଣନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି]

$$= 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x}$$

$= x^2(3 \log x + 1)$

(ii) $y = e^x \log x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \frac{d}{dx}(\log x) + \log x \cdot \frac{d}{dx}(e^x)$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{x} + e^x \cdot \log x = e^x \left[\frac{1}{x} + \log x \right]$$

ଉଦାହରଣ 23.8

ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) log tan x (ii) log [cos (log x)]

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ y = log tan x

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\tan x)$$

$$= \frac{1}{\tan x} \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{cosec} x \cdot \sec x$$

(ii) ମନେକରାଯାଉ y = log [cos(log x)]

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \frac{d}{dx}[\cos(\log x)]$$

$$= \frac{1}{\cos(\log x)} \cdot \left[-\sin \log x \cdot \frac{d}{dx}(\log x) \right]$$

$$= \frac{-\sin(\log x)}{\cos(\log x)} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \tan(\log x)$$

ଉଦାହରଣ 23.9

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି y = log(sec x + tan x)

ସମାଧାନ : y = log(sec x + tan x)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot [\sec x \tan x + \sec^2 x]$$

$$= \frac{1}{\sec x + \tan x} \cdot \sec x [\sec x + \tan x]$$

$$= \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x$$

ଉଦାହରଣ 23.10

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $y = \frac{(4x^2 - 1)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3 (x - 7)^{\frac{3}{4}}}$

ସମାଧାନ : ଯଦି ଓ ତୁମେ ହରଣ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ସିଧାସଳଖ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ (ଗୁଣନ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମଧ୍ୟ), କିନ୍ତୁ ତୁମେ ଯଦି ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନିଅ, ତେବେ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ପରିଣତ ହୋଇଯିବ ଏବଂ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ପରିଣତ ହେବ । ଏହାଦ୍ୱାରା କାର୍ଯ୍ୟ ସରଳ, ହେବ ।

$$y=\frac{(4x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3(x-7)^{3/4}}$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଘୁଗଣକ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\log y=\log\left[\frac{(4x^2-1)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{x^3(x-7)^{3/4}}\right]$$

ବା $\log y=\log(4x^2-1)+\frac{1}{2}\log(1+x^2)-3\log x-\frac{3}{4}\log(x-7)$

[ଲଗାରିଦିମ୍ ନିୟମାବଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରି]

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳଜ ନେଇ, ପାଇବା

$$\frac{d}{dx}(\log y)=\frac{1}{4x^2-1}\cdot 8x+\frac{1}{2(1+x^2)}\cdot 2x-\frac{3}{x}-\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-7}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{3}{4(x-7)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=y\left[\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{3}{4(x-7)}\right]$$

$$=\frac{(4x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{x^3(x-7)^{3/4}}\left[\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{3}{x}-\frac{1}{4(x-7)}\right]$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.2

1. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = 5 \sin x - 2 \log x$ (b) $f(x) = \log \cos x$

2. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : ଯଦି

(a) $y=e^{x^2}\log x$ (b) $y=\frac{e^{x^2}}{\log x}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = \log(\sin \log x)$ (b) $y = \log\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$

(c) $y = \log\left[\frac{a+b\tan x}{a-b\tan x}\right]$ (d) $y = \log(\log x)$

4. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି

(a) $y=(1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}}$

(b) $y=\dfrac{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}$

23.3 ଲଗାରିଦିମ୍ ଫଳନର ଅବକଳଜ (କ୍ରମଶଃ)

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ x^nର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ହେଉଛି nx^{n-1}, ଯେଉଁଠି n ଏକ ଧ୍ରୁବକ । ଘାତାଙ୍କ ଏକ ଚଳରାଶି ହେଲେ, ଏ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଆମେ ଫଳନର ଲଘୁଗଣକ ନେଇ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥାଉ ।

ଏଣୁ $[f(x)]^{g(x)}$ ଭଳି ଫଳନରେ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀର ଉପଯୋଗ କରାଯାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ,

a^x, x^x ଆଦି ଫଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ।

ଟୀକା : ଏଠାରେ f(x) ଏକ ଧ୍ରୁବକ ହୋଇପାରେ ।

a^x ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ

ମନେକରାଯାଉ $y = a^x$ $a > 0$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଘୁଗଣକ ନେଇ, ଆମେ ପାଇବା

$\log y = \log a^x = x \log a$ [$\log m^n = n \log m$ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା]

$\therefore \frac{d}{dx}[\log y]=\frac{d}{dx}(x\log a)$ ବା, $\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx}=\log a\times\frac{d}{dx}(x)$

ବା, $\frac{dy}{dx}=y\log a=a^x\log a$

ଏଣୁ, $\mathbf{\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log a, a>0}$

ଉଦାହରଣ 23.11

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = x^x$ (ii) $y = x^{\sin x}$

ସମାଧାନ : (i) $y = x^x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

$\log y = x \log x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \log x \frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(\log x) \quad \text{[ଗୁଣନ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା]}$$

$$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = 1\cdot\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y[\log x + 1]$$

ଏଣୁ, $\dfrac{dy}{dx} = x^x(\log x + 1)$

(ii) $y = x^{\sin x}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

$\log y = \sin x \log x$

$$\therefore \frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \log x)$$

ବା, $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \cos x\cdot\log x + \sin x\cdot\dfrac{1}{x}$

ବା, $\dfrac{dy}{dx} = y\left[\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right]$

ଏଣୁ, $\dfrac{dy}{dx} = x^{\sin x}\left[\cos x \log x + \dfrac{\sin x}{x}\right]$

ଉଦାହରଣ 23.12

ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

$y = (\log x)^x + (\sin^{-1}x)^{\sin x}$

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ କୌଣସି ସୁବିଧା ହେବ ନାହିଁ, କାରଣ ଏହାଦ୍ୱାରା $(\log x)^x + (\sin^{-1}x)^{\sin x}$ କୁ କୌଣସି ସରଳ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କରିହେବ ନାହିଁ । ତେଣୁ ଆମେ ନେବା

$u = (\log x)_x$ ଏବଂ $v = (\sin^{-1}x)^{\sin x}$

ଫଳରେ, $y = u + v$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \qquad \text{... (i)}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $u = (\log x)^x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

$\log u = \log (\log x)^x$

$\therefore \log u = x \log(\log x) \qquad [\because \log m^n = n \log m]$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx} = 1\cdot\log(\log x) + x\frac{1}{\log x}\cdot\frac{1}{x}$$

ଏଣୁ, $\frac{du}{dx} = u\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right]$

ଏଣୁ, $\frac{du}{dx} = (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right]$ ... (ii)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ, $v = (\sin^{-1}x)^{\sin x}$

$\therefore \log v = \sin x \log(\sin^{-1}x)$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d}{dx}(\log v) = \frac{d}{dx}[\sin x \log(\sin^{-1}x)]$$

$$\frac{1}{v}\cdot\frac{dv}{dx} = \sin x\cdot\frac{1}{\sin^{-1}x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \cos x\cdot\log(\sin^{-1}x)$$

ବା, $\frac{dv}{dx} = v\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \cos x\cdot\log\sin^{-1}x\right]$

$= (\sin^{-1}x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \cos x\log(\sin^{-1}x)\right]$ ... (iii)

(i), (ii) ଓ (iii)ରୁ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = (\log x)^x\left[\log(\log x) + \frac{1}{\log x}\right] + (\sin^{-1}x)^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}} + \cos x\log\sin^{-1}x\right]$$

ଉଦାହରଣ 23.13

ଯଦି $x^y = e^{x-y}$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି, $x^y = e^{x-y}$ ... (i)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

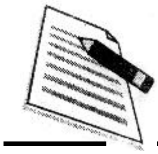
$y \log x = (x-y)\log e$

$= x-y \qquad [\because \log e = 1]$

ବା, $y \log x + y = x$

ବା, $y(1+\log x) = x$

ବା, $y = \frac{x}{1+\log x}$ ... (ii)

(ii) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(1+\log x)\cdot 1-x\left(\frac{1}{x}\right)}{(1+\log x)^2}$$

$$=\frac{1+\log x-1}{(1+\log x)^2}=\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$$

ଉଦାହରଣ 23.14

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

$e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $e^x \log y = \sin^{-1}x + \sin^{-1}y$, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$e^x\left(\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}\right)+e^x\log y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{dy}{dx}$$

ବା, $\left[\frac{e^x}{y}-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\right]\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-e^x\log y$

ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{y\sqrt{1-y^2}\left[1-e^x\sqrt{1-x^2}\log y\right]}{\left[e^x\sqrt{1-y^2}-y\right]\sqrt{1-x^2}}$

ଉଦାହରଣ 23.15 $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $y=(\cos x)^{(\cos x)^{\cos x\ldots\infty}}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ, $y=(\cos x)^{(\cos x)^{(\cos x)\ldots\infty}}=(\cos x)^y$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

$\log y = y \log \cos x$

(i)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=y\cdot\frac{1}{\cos x}(-\sin x)+\log(\cos x)\cdot\frac{dy}{dx}$$

ବା, $\left[\frac{1}{y}-\log(\cos x)\right]\frac{dy}{dx}=-y\tan x$

ବା, $[1-y\log(\cos x)]\frac{dy}{dx}=-y^2\tan x$

ବା, $\frac{dy}{dx}=\frac{-y^2\tan x}{1-y\log(\cos x)}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.3

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = 5^x$ (b) $y = 3^x + 4^x$ (c) $y = \sin(5^x)$

2. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $y = x^{2x}$ (b) $y = (\cos x)^{\log x}$ (c) $y = (\log x)^{\sin x}$

(d) $y = (\tan x)^x$ (e) $y = (1+x^2)^{x^2}$ (f) $y = x^{(x^2+\sin x)}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^x$ (b) $y = x^{\log x} + (\sin x)^{\sin^{-1} x}$

(c) $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$ (d) $y = (x)^{x^2} + (\log x)^{\log x}$

4. ଯଦି $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)\ldots\infty}}$ ହୁଏ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y\log(\sin x)}$$

5. $y = \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \sqrt{\log x + \ldots\infty}}}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(2x-1)}$$

23.4 ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ

ପୂର୍ବପାଠ 21ରେ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଏବଂ ପ୍ରତିଲୋମୀ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସୂତ୍ର, ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ବିଭିନ୍ନ ନିୟମ, ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ, ଘାତ-ନିୟମ ଆଦିର ବ୍ୟବହାର କରି ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଓ ପ୍ରତିଲୋମୀ-ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ପ୍ରଣାଳୀ ଆଲୋଚନା କରିଥିଲେ । ସେହିପରି ଭାବରେ, ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ଘାତାଙ୍କୀ ଓ ଲଘୁଗଣକୀୟ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 23.16

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) e^x (ii) $\cos(\log x)$ (iii) x^x

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକରାଯାଉ $y = e^x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା $\frac{dy}{dx} = e^x$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

(ii) ମନେକରାଯାଉ, $y = \cos(\log x)$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(\log x) \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\sin(\log x)}{x}$$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{x}\left[-\frac{\sin(\log x)}{x}\right]$$

$$= \frac{x \cdot \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x} - \sin(\log x)}{x^2}$$

$$\therefore \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{\sin(\log x) - \cos(\log x)}{x^2}$$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $y = x^x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦିମ୍ ନେଲେ, ପାଇବା

$\log y = \log x^x = x \log x$ ... (i)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \log x = 1 + \log x$$

ବା, $\frac{dy}{dx} = y(1 + \log x)$ ... (ii)

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}[y(1 + \log x)]$$

$$= y \cdot \frac{1}{x} + (1 + \log x)\frac{dy}{dx}$$

$= \frac{y}{x} + (1 + \log x)y(1 + \log x)$ [(ii) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

$$= \frac{y}{x} + (1 + \log x)^2 \cdot y$$

$$= y\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = x^x\left[\frac{1}{x} + (1+\log x)^2\right]$$

ଉଦାହରଣ 23.17

$y = e^{a\cos^{-1}x}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅଛି, $y = e^{a\cos^{-1}x}$ ... (i)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{a\cos^{-1}x} \cdot \frac{-a}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{ay}{\sqrt{1-x^2}}$$ [(i) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ବା, $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{a^2y^2}{1-x^2}$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(1-x^2) - a^2y^2 = 0 \quad ...(ii)$$

(ii)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଅବକଳଜ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) + 2(1-x^2) \times \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} - a^2 \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

ବା, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - a^2y = 0$ [ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱକୁ $2 \cdot \frac{dy}{dx}$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି]

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.4

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) x^4e^{5x} (b) $\tan(e^{5x})$ (c) $\frac{\log x}{x}$

2. y = a cos (log x) + b sin (log x) ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

3. $y = e^{\tan^{-1}x}$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $(1+x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} + (2x-1)\dfrac{dy}{dx} = 0$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- (i) $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ (ii) $\dfrac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a; a > 0$
- ଯଦି μ, x ର ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ହୁଏ, ତେବେ

  (i) $\dfrac{d}{dx}(e^{\mu}) = e^{\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{dx}$

  (ii) $\dfrac{d}{dx}(a^{\mu}) = a^{\mu} \cdot \log a \cdot \dfrac{d\mu}{dx}; a > 0$

  (iii) $\dfrac{d}{dx}(e^{ax+b}) = e^{ax+b} \cdot a = a\, e^{ax+b}$
- (i) $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}$

  (ii) $\dfrac{d}{dx}(\log \mu) = \dfrac{1}{\mu} \cdot \dfrac{d\mu}{dx}$, ଯଦି μ, x ର ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ହୋଇଥାଏ ।

  (iii) $\dfrac{d}{dx}\log(ax+b) = \dfrac{1}{ax+b} \cdot a = \dfrac{a}{ax+b}$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $(x^x)^x$ (b) $x^{(x^x)}$

2. $\dfrac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

   (a) $y = a^{x \log \sin x}$ (b) $y = (\sin x)^{\cos^{-1} x}$

(c) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$ (d) $y=\log\left[e^x\left(\frac{(x-4)}{(x+4)}\right)^{\frac{3}{4}}\right]$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x)=\cos x\log(x)e^{x^2}x^x$ (b) $f(x) = (\sin^{-1}x)^2\cdot x^{\sin x}\cdot e^{2x}$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = (\tan x)^{\log x} + (\cos x)^{\sin x}$ (b) $y = x^{\tan x} + (\sin x)^{\cos x}$

5. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $y=\frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}$ (b) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

6. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $y = a^x\cdot x^a$ (b) $y=7^{x^2+2x}$

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = x^2e^{2x}\cos 3x$ (b) $y=\frac{2^x\cot x}{\sqrt{x}}$

8. $y=x^{x^{x^{x\ldots\infty}}}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{1-y\log x}$$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.1

1. (a) $5e^{5x}$ (b) $7e^{7x+4}$ (c) $\sqrt{2}\,e^{\sqrt{2}x}$ (d) $-\frac{7}{2}e^{-\frac{7}{2}x}$ (e) $2(x+1)e^{x^2+2x}$

2. (a) $\frac{1}{3}e^x$ (b) $\sec^2 x + 2\cos x - 3\sin x - \frac{1}{2}e^x$
   (c) $5\cos x - 2e^x$ (d) $e^x - e^{-x}$

3. (a) $\frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}}$ (b) $e^{\sqrt{\cot x}}\left[\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{2\sqrt{\cot x}}\right]$
   (c) $e^{x\sin^2 x}[\sin x + 2x\cos x]\sin x$
   (d) $e^{x\sec^2 x}[\sec^2 x + 2x\sec^2 x\tan x]$

4. (a) xe^x (b) $2e^{2x}\sin x(\sin x + \cos x)$

5. (a) $\frac{2x^2 - x + 2}{(x^2+1)^{3/2}}e^{2x}$ (b) $\frac{e^{2x}[(2x-1)\cot x - x\operatorname{cosec}^2 x]}{x^2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.2

1. (a) $5\cos x - \frac{2}{x}$ (b) $-\tan x$

2. (a) $e^{x^2}\left[2x\log x + \frac{1}{x}\right]$ (b) $\frac{2x^2\log x - 1}{x(\log x)^2}\cdot e^{x^2}$

3. (a) $\frac{\cot(\log x)}{x}$ (b) $\sec x$
   (c) $\frac{2ab\sec^2 x}{a^2 - b^2\tan^2 x}$ (d) $\frac{1}{x\log x}$

4. (a) $(1+x)^{\frac{1}{2}}(x-x)^{\frac{2}{3}}(x^2+5)^{\frac{1}{7}}(x+9)^{-\frac{3}{2}}\times\left[\frac{1}{2(1+x)} - \frac{2}{3(2-x)} + \frac{2x}{7(x^2-5)} - \frac{3}{2(x+9)}\right]$
   (b) $\frac{\sqrt{x}(1-2x)^{3/2}}{(3+4x)^{\frac{5}{4}}(3-7x^2)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{1}{2x} - \frac{3}{1-2x} - \frac{5}{3+4x} + \frac{7x}{2(3-7x^2)}\right]$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.3

1. (a) $5^x \log 5$ (b) $3^x \log 3 + 4^x \log 4$ (c) $\cos 5^x\, 5^x \log 5$

2. (a) $2x^{2x}(1+\log x)$ (b) $(\cos x)^{\log x}\left[\frac{\log \cos x}{x} - \tan x \log x\right]$

(c) $(\log x)^{\sin x}\left[\cos x \log(\log x) + \frac{\sin x}{x \log x}\right]$

(d) $(\tan x)^x\left[\log \tan x + \frac{x}{\sin x \cos x}\right]$

(e) $(1+x)^{x^2}\left[2x\log(1+x^2) + 2\frac{x^3}{1+x^2}\right]$

(f) $x^{(x^2+\sin x)}\left[\frac{x^2+\sin x}{x} + (2x+\cos x)\log x\right]$

3. (a) $\operatorname{cosec}^2 x(1 - \log \tan x)(\tan x)^{\cot x} + (\log \cot x - x \operatorname{cosec}^2 x \tan x)(\cot x)^x$

(b) $2x^{(\log x - 1)} \log x + (\sin x)^{\sin^{-1} x}\left[\cot x \sin^{-1} x + \frac{\log \sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $x^{\tan x}\left(\frac{\tan x}{x} + \sec^2 x \log x\right) + (\sin x)^{\cos x}[\cos x \cot x - \sin x \log \sin x]$

(d) $x^{x^2} \cdot x(1+2\log x) + (\log x)^{\log x}\left[\frac{1+\log(\log x)}{x}\right]$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 23.4

1. (a) $e^{5x}(25x^4 + 40x^3 + 12x^2)$

(b) $25e^{5x} \sec^2(e^{5x})(1+2e^{5x} \tan e^{5x})$

(c) $\frac{2\log x - 3}{x^3}$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (a) $(x^x)^x\,[x+2x\log x]$ (b) $x^{(x)^x}[x^{x-1} + \log x(\log x + 1)x^x]$

2. (a) $a^{x \log \sin x}[\log \sin x + x \cot x] \log a$

(b) $(\sin x)^{\cos^{-1} x}\left[\cos^{-1} x \cot x - \frac{\log \sin x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

(c) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}\left[2x\log\left(x+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]$ (d) $1+\frac{3}{4(x-4)}-\frac{3}{4(x+4)}$

3. (a) $\cos x\log(x)e^{x^2}\cdot x^x\left[-\tan x+\frac{1}{x\log x}+2x+1+\log x\right]$

(b) $(\sin^{-1}x)^2\cdot x^{\sin x}e^{2x}\left[\frac{2}{\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x}+\cos x\log x+\frac{\sin x}{x}+2\right]$

4. (a) $(\tan x)^{\log x}\left[2\operatorname{cosec}2x\log x+\frac{1}{x}\log\tan x\right]+(\cos x)^{\sin x}[-\sin x\tan x+\cos x\log(\cos x)]$

(b) $x^{\tan x}\left[\frac{\tan x}{x}+\sec^2 x\log x\right]+(\sin x)^{\cos x}[\cot x\cos x+\sin x\log(\sin x)]$

5. (a) $\frac{x^4\sqrt{x+6}}{(3x+5)^2}\left[\frac{4}{x}+\frac{1}{2(x+6)}-\frac{6}{(3x+5)}\right]$ (b) $\frac{-4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2}$

6. (a) $a^x\cdot x^{a-1}[a+x\log_e a]$ (b) $7^{x^2+2x}(2x+2)\log_e 7$

7. (a) $x^2e^{2x}\cos 3x\left\{\frac{2}{x}+2-3\tan 3x\right\}$

(b) $\frac{2^x\cot x}{\sqrt{x}}\left[\log 2-2\operatorname{cosec}2x-\frac{1}{2x}\right]$