୨୨

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଅବକଳନ

ତ୍ରିକୋଣମିତି ଗଣିତର ଏପରି ଏକ ଶାଖା, ଯାହାର ବ୍ୟବହାର ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତର କଳନ ଗଣିତ, ଦିଶାଙ୍କ (vector) ଗଣିତ, ତ୍ରିମାତ୍ରିକ ଜ୍ୟାମିତି, ଫଳନ-ହରାତ୍ମକ ଓ ସରଳ ଫଳନ ଆଦିରେ ଅନିର୍ବାର୍ଯ୍ୟ । କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସୀମା ମଧ୍ୟରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଦେଇଥାଏ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନଉଠେ : ବର୍ତ୍ତମାନ ସୁଦ୍ଧା ଆମେ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେଉଁ ସବୁ ନିୟମ ପାଇଲୁଣି, ତାହା ସବୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ତ ?

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ଖୋଜିବା ଏବଂ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଓ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସୂତ୍ର ସ୍ଥିର କରିବା । ଅନ୍ୟଥା କୁହା ନ ଯିବା ଯାଏ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ ଓ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ରେଡିୟାନ୍ ମାପର ବ୍ୟବହାର କରାଯିବ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହିପାଠ ପଢ଼ିବା ପରେ, ତୁମେ

- ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଓ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ଗୁଣଫଳ ନୀୟମ, ଭାଗଫଳ ନିୟମ ଓ ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ । ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡ଼ର ଅକଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- କୋଣର ଫଳନ ଭାବରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଜ୍ଞାନ
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ମାନକ ସୀମା, ଯଥା :

(i) $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$ (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (iii) $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ (iv) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

- ଅବକଳଜର ସଂଜ୍ଞା ଓ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି ନିୟମ ।

21.1 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଅବକଳଜ

(i) ମନେକରାଯାଉ y = sin x

x ର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ନିଆଯାଉ ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ବୃଦ୍ଧି δy ହେଉ ।

$\therefore\ y + \delta y = \sin(x+\delta x)$

ଏବଂ $\delta y = \sin(x + \delta x) - \sin x$

$$= \cos\left[x+\frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{x}{2} \quad \therefore \frac{\delta y}{\delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = \cos x\cdot 1$$

ଏଣୁ, $\dfrac{dy}{dx} = \cos x \left[\because \lim_{\delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1\right]$

ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(ii) ମନେକରାଯାଉ y = cos x

x ର ମାନରେ δx ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଁ y ର ମାନରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧି δy ହେଉ ।

$\therefore\ y + \delta y = \cos(x+\delta x)$

ଏବଂ $\delta y = \cos(x+\delta x) - \cos x$

$$= -2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = -2\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = -\sin x\cdot 1$$

ଏଣୁ $\dfrac{dy}{dx} = -\sin x$

ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

(iii) ଧରିନିଆଯାଉ $y = \tan x$

xର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ପାଇଁ, yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧି ହେଉ δy ।

$\therefore\ y = \delta y = \tan(x+\delta x)$

ଏବଂ $\delta y = \tan(x+\delta x) - \tan x$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin(x+\delta x)\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x)-x]}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{\sin\delta x}{\cos(x+\delta x)\cdot\cos x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

ବା $$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= 1\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\left[\because \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\delta x}{\delta x} = 1\right]$$

$= \sec^2 x$

ଏଣୁ $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

(iv) ଧରିନିଆଯାଉ $y = \sec x$

x ର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ପାଇଁ, yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧି ହେଉ δy ।

$\therefore\ y + \delta y = \sec(x+\delta x)$

ଏବଂ $\delta y = \sec(x+\delta x) - \sec x$

$$= \frac{1}{\cos(x+\delta x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+\delta x)}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$= \frac{2\sin\left[x+\frac{\delta x}{2}\right]\sin\frac{\delta x}{2}}{\cos(x+\delta x)\cos x}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\cos(x+\delta x)\cos x}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}\cdot 1$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \tan x\cdot\sec x$$

ଏହିପରି, $\frac{dy}{dx} = \sec x\cdot\tan x$

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x\cdot\tan x$

ସେହିପରି ଆମେ ଦର୍ଶାଇ ପାରିବୁ ଯେ,

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

ଏବଂ $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x\cdot\cot x$

ଉଦାହରଣ 22.1 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଦ୍ୱାରା $\cot x^2$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $y = \cot x^2$

x ର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ପାଇଁ yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧି ହେଉ δy,

$\therefore\ y + \delta y = \cot(x + dx)^2$

ଏବଂ $\delta y = \cot(x + \delta x)^2 - \cot x^2$

$$= \frac{\cos(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2} - \frac{\cos x^2}{\sin x^2}$$

$$= \frac{\cos(x+\delta x)^2\cdot\sin x^2 - \cos x^2\cdot\sin(x+\delta x)^2}{\sin(x+\delta x)^2\sin x^2}$$

$$= \frac{\sin[x^2-(x+\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2\sin x^2}$$

$$= \frac{\sin[-2x\delta x-(\delta x)^2]}{\sin(x+\delta x)^2\sin x^2}$$

ଟିପ୍ପଣୀ

$$= \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x \sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

$$\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} \lim_{\delta x \to 0} \frac{2x+\delta x}{\sin(x+\delta x)^2 \sin x^2}$$

ବା $\frac{dy}{dx} = -1 \cdot \frac{2x}{\sin x^2 \cdot \sin x^2} \left[\therefore \lim_{\delta x \to 0} \frac{\sin[(2x+\delta x)\delta x]}{\delta x(2x+\delta x)} = 1 \right]$

$$= \frac{-2x}{(\sin x^2)^2} = \frac{-2x}{\sin^2 x^2}$$

$$= -2x \cdot \operatorname{cosec}^2 x^2$$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}(\cot x^2) = -2x \cdot \operatorname{cosec}^2 x^2$

ଉଦାହରଣ 22.2 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ $\sqrt{\operatorname{cosec} x}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଧରିନିଆଯାଉ $y = \sqrt{\operatorname{cosec} x}$

ଏବଂ $y + \delta y = \sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)}$

$$\therefore \delta y = \frac{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} - \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$= \frac{\operatorname{cosec}(x+\delta x) - \operatorname{cosec} x}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin(x+\delta x)} - \frac{1}{\sin x}}{\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}}$$

$$= \frac{\sin x - \sin(x+\delta x)}{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]\left[\sin(x+\delta x)\sin x\right]}$$

$$= -\frac{2\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)\sin\frac{\delta x}{2}}{\left(\sqrt{\operatorname{cosec} x} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right)\sin(x+\delta x)}$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\lim_{\delta x \to 0} \frac{\cos\left(x+\frac{\delta x}{2}\right)}{\left[\sqrt{\operatorname{cosec}(x+\delta x)} + \sqrt{\operatorname{cosec} x}\right]} \times \frac{\frac{\sin \delta x/2}{\delta x/2}}{[\sin(x+\delta x) \cdot \sin x]}$$

ବା $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos x}{\left(2\sqrt{(\operatorname{cosec} x)}(\sin x)^2\right)}$

$$= -\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x \cot x)$$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\operatorname{cosec} x}\right) = -\frac{1}{2}(\operatorname{cosec} x)^{-\frac{1}{2}}(\operatorname{cosec} x \cot x)$

ଉଦାହରଣ 22. 3 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ $\sec^2 x$ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y = \sec^2 x$

ଏବଂ $y + \delta y = \sec^2(x+\delta x)$

ତେଣୁ, $\delta y = \sec^2(x+\delta x) - \sec^2 x$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2(x+\delta x)}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin[(x+\delta x)+x]\sin[(x+\delta x)-x]}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x}$$

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x\cdot\delta x}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}\frac{\sin(2x+\delta x)\sin\delta x}{\cos^2(x+\delta x)\cos^2 x\cdot\delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{\cos^2 x\cos^2 x}$$

$$= \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x\cos^2 x} = 2\tan x\cdot\sec^2 x$$

$= 2 \sec x (\sec x\cdot\tan x)$

$= 2 \sec x (\sec x \tan x)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.1

1. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) cosec x (b) cot x (c) cos 2x

(d) cot 2x (e) cosec x^2 (f) $\sqrt{\sin x}$

2. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) 2 $\sin^2 x$ (b) $\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $\tan^2 x$

22.2 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ

ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ କିପରି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ, ତାହା ଆମେ ଶିଖିଛୁ । ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତିରେ ଏହି ଫଳନଗୁଡ଼ିକୁ ଫଳନର ଫଳନ ରୂପେ ନେଇ କିପରି ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ କାର୍ଯ୍ୟ କରାଯାଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ଦେଖିଛୁ । ଏହି ଅବକଳଜମାନଙ୍କର କିଛି ଅଧିକ ଉଦାହରଣ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା ।

ଉଦାହରଣ 22. 4 ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin 2x$ (ii) $\tan\sqrt{x}$ (iii) $\operatorname{cosec}(5x^3)$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ $y = \sin 2x = \sin t$ ଯେଉଁଠି $t = 2x$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \cos t \text{ ଏବଂ } \frac{dt}{dx} = 2$$

ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \cos t(2) = 2\cdot\cos t = 2\cos 2x$$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $y = \tan\sqrt{x}$

$= \tan t$ ଯେଉଁଠି $t = \sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \sec^2 t \text{ ଏବଂ } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 t\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

ଏଣୁ, $\frac{d}{dx}\left(\tan\sqrt{x}\right) = \frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି : ମନେକରାଯାଉ $y = \tan\sqrt{x}$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $y = \operatorname{cosec}(5x^3)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}(5x^3)\cdot\cot(5x^3)\cdot\frac{d}{dx}(5x^3)$$

$= -15x^2 \operatorname{cosec}(5x^3)\cot(5x^3)$

ବା ତୁମେ $t = 5x^3$ ନେଇ ମଧ୍ୟ ସମାଧାନ କରିପାର ।

ଉଦାହରଣ 22. 5 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = x^4 \sin 2x$ (ii) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

ସମାଧାନ : (i) $y = x^4 \sin 2x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x^4 \frac{d}{dx}(\sin 2x) + \sin 2x \frac{d}{dx}(x^4)$$ [ଗୁଣଫଳ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କର]

$= x^4 (2 \cos 2x) + \sin 2x (4x^3)$

$= 2x^4 \cos 2x + 4x^3 \sin 2x$

$= 2x^3[x \cos 2x + 2 \sin 2x]$

(ii) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec^2\frac{x}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି : ତୁମେ ଭାଗଫଳ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ମଧ୍ୟ ଏହି ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାର ।

ମନେକରାଯାଉ $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\cdot\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x + 1)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

ଉଦାହରଣ 22. 6 ନିମ୍ନଫଳନମାନଙ୍କର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\cos^2 x$ (ii) $\sqrt{\sin^3 x}$

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y = \cos^2 x$

$= t^2$ ଯେଉଁଠି $t = \cos x$

$\therefore \frac{dy}{dt} = 2t$ ଏବଂ $\frac{dt}{dx} = -\sin x$

ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x \cdot (-\sin x)$$

$$= -2\cos x \sin x = -\sin 2x$$

(i) ମନେକରାଯାଉ $y = \sqrt{\sin^3 x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\sin^3 x)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(\sin^3 x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sin^3 x}} \cdot 3\sin^2 x \cdot \cos x$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\cos x$$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\sin^3 x}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{\sin x}\cos x$

ଉଦାହରଣ 22. 7 $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ

(i) ଦତ୍ତ ଅଛି : $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$ (ii) $y = a(1-\cos t)$, $x = a(t + \sin t)$

ସମାଧାନ : (i) $y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \frac{(-\cos x)(1+\sin x) - (1-\sin x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} \cdot \left(\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}} \cdot \frac{\sqrt{1-\sin^2 x}}{(1+\sin x)^2}$$

$$= -\frac{\sqrt{1+\sin x}\sqrt{1+\sin x}}{(1+\sin x)^2} = \frac{-1}{1+\sin x}$$

ଏଣୁ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\sin x}$

ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତି : ଏଭଳି ବର୍ଗମୂଳ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ସୁବିଧା ଉପାୟ ହେଉଛି ହରର ପରିମେୟକରଣ

$$y = \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}} \times \frac{\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1-\sin x}}$$

$$= \frac{1-\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$$

$$= \frac{1-\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x - \tan x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \sec x \tan x - \sec^2 x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x - 1}{1-\sin^2 x} = -\frac{1}{1+\sin x}$$

(ii) $x = a(t+\sin t),\ y = a(1-\cos t)$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = a(1+\cos t), \frac{dy}{dt} = a(\sin t)$$

ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ଉପଯୋଗ କରି, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a(\sin t)}{a(1+\cos t)}$$

$$= \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}} = \tan\frac{t}{2}$$

ଉଦାହରଣ 22. 8 ପ୍ରଶ୍ନରେ ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ନିମ୍ନ ଫଳନ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = \sin 2x + (2x-5)^2, x = \frac{\pi}{2}$ ଠାରେ

(ii) $y = \cot x + \sec^2 x + 5$, $x = \pi/6$ ଠାରେ

ସମାଧାନ : (i) $y = \sin 2x + (2x-5)^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos 2x \frac{d}{dx}(2x) + 2(2x-5)\frac{d}{dx}(2x-5)$$

$= 2\cos 2x + 4(2x-5)$

$x = \frac{\pi}{2}$ ଠାରେ, $\frac{dy}{dx} = 2\cos\pi + 4(\pi - 5)$

$= -2 + 4\pi - 20$

$= 4\pi - 22$

(ii) $y = \cot x + \sec^2 x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x + 2\sec x(\sec x \tan x)$$

$= -\operatorname{cosec}^2 x + 2\sec^2 x \tan x$

$x = \frac{\pi}{6}$ ଠାରେ, $\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6} + 2\sec^2\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{6}$

$$= -4 + 2\cdot\frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= -4 + \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

ଉଦାହରଣ 22.9 ଯଦି $\sin y = x\sin(a+y)$, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ

$\sin y = x\sin(a+y)$ ବା $x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$ ... (1)

(1)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ । ଆମେ ପାଇବା

$$1 = \left[\frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y\cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

ବା $$1 = \left[\frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}\right]\frac{dy}{dx}$$

ମଡ୍ୟୁଲ-V
ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

ବା $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

ଉଦାହରଣ 22. 10 ଯଦି $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}}$ ଅସୀମ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ

$y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \ldots}}$ ଅସୀମ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

ବା $y = \sqrt{\sin x + y}$ ବା $y^2 = \sin x + y$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$2y\frac{dy}{dx} = \cos x + \frac{dy}{dx}$ ବା $(2y-1)\frac{dy}{dx} = \cos x$

ଏଣୁ $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y-1}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.2

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = 3\sin 4x$ (b) $y = \cos 5x$ (c) $y = \tan\sqrt{x}$

(d) $y = \sin\sqrt{x}$ (e) $y = \sin x^2$ (f) $y = \sqrt{2}\tan 2x$

(g) $y = \pi\cot 3x$ (h) $y = \sec 10x$ (i) $y = \operatorname{cosec} 2x$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$ (b) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ (c) $f(x) = x\sin x$

(d) $f(x) = (1+x^2)\cos x$ (e) $f(x) = x\operatorname{cosec} x$ (f) $f(x) = \sin 2x\cos 3x$

(g) $f(x) = \sqrt{\sin 3x}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = \sin^3 x$ (b) $y = \cos^2 x$ (c) $y = \tan^4 x$

(d) $y = \cot^4 x$ (e) $y = \sec^5 x$ (f) $y = \operatorname{cosec}^3 x$

(g) $y = \sec\sqrt{x}$ (h) $y = \sqrt{\frac{\sec x + \tan x}{\sec x - \tan x}}$

4. ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right),\ x=\frac{\pi}{3}$ (b) $y=\frac{1+\sin x}{\cos x}, x=\frac{\pi}{4}$

5. ଯଦି $y=\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x+\sqrt{\tan x \ldots \text{ଅସୀମ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ}}}}$

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(2y-1)\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$

6. ଯଦି cos y = x cos (a+y),

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{dy}{dx}=\frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}$

22.3 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ମାନକ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ, ଯଥା : $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$ ମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

(i) ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଦ୍ୱାରା $\sin^{-1}x$ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ହେବ

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

ମନେକରାଯାଉ $y=\sin^{-1}x$ । ତେବେ $x=\sin y$ ଏବଂ ଫଳରେ $x+\delta x=\sin(y+\delta y)$

ଯେହେତୁ $\delta x\to 0,\ \delta y\to 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $\delta x=\sin(y+\delta y)-\sin y$

$$\therefore 1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}$$ [ଉଭୟ ପକ୍ଷକୁ δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି]

ବା $$1=\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\therefore 1=\lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta y}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$$ [∵ δy → 0 ଯେତେବେଳେ δx → 0]

$$=\left[\lim_{\delta y\to 0}\frac{2\cos\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{1}{2}\delta y\right)}{\delta y}\right].$$

$$=(\cos y)\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{(1-\sin^2 y)}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

(ii) $$\mathbf{\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}}$$

$\sin^{-1}x$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଥିଲା, ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ ସେପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ।

(iii) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦର୍ଶାଇବା ଯେ

$$\mathbf{\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

ମନେକରାଯାଉ $y = \tan^{-1}x$, ତେବେ $x = \tan y$

ଏଣୁ $x + \delta x = \tan(y \pm \delta y)$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\delta x = \tan(y + \delta y) - \tan y$

$$\therefore 1 = \frac{\tan(y+\delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \frac{\delta y}{\delta x}$$

$$\therefore 1 = \lim_{\delta y \to 0} \frac{\tan(y+\delta y) - \tan y}{\delta y} \cdot \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$$

[$\because$ $\delta y \to 0$, ଯେବେ $\delta x \to 0$]

$$= \left[\lim_{\delta y \to 0} \left\{ \frac{\sin(y+\delta y)}{\cos(y+\delta y)} - \frac{\sin y}{\cos y} \right\} \Big/ \delta y \right] \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \frac{\sin(y+\delta y)\cos y - \cos(y+\delta y)\sin y}{\delta y \cdot \cos(y+\delta y)\cos y}$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin(y+\delta y - y)}{\delta y \cdot \cos(y+\delta y) \cdot \cos y} \right]$$

$$= \frac{dy}{dx} \cdot \lim_{\delta y \to 0} \left[\frac{\sin \delta y}{\delta y} \cdot \frac{1}{\cos(y+\delta y)\cos y} \right]$$

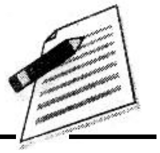
$$= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{dy}{dx} \cdot \sec^2 y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

(iv) $$\mathbf{\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

$\tan^{-1}x$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଥିଲା ସେପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ।



(v) ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ଆମେ ପାଇବା $\dfrac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

ମନେକରାଯାଉ $y = \sec^{-1}x$ । ତେବେ $x = \sec y$

ଏଣୁ $x + \delta x = \sec(y + \delta y)$

ଯେହେତୁ $\delta x \to 0$, ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $\delta y \to 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\delta x = \sec(y + \delta y) - \sec y$

$$\therefore 1 = \frac{\sec(y+\delta y)-\sec y}{\delta y}\cdot\frac{\delta y}{\delta x}$$

$$1 = \lim_{\delta y\to 0}\frac{\sec(y+\delta y)-\sec y}{\delta y}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} \qquad [\because\ y \to 0 \text{ ଯେବେ } \delta x \to 0]$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\lim_{\delta y\to 0}\frac{2\sin\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta y\cdot\cos y\cos(y+\delta y)}$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\lim_{\delta y\to 0}\left[\frac{\sin\left(y+\frac{1}{2}\delta y\right)}{\cos y\cos(y+\delta y)}\cdot\frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}}\right]$$

$$= \frac{dy}{dx}\cdot\frac{\sin y}{\cos y\cos y} = \frac{dy}{dx}\cdot\sec y\tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\tan y} = \frac{1}{\sec y\sqrt{(\sec^2 y-1)}} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = (\sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

(vi) $\dfrac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1}x) = \dfrac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}$

$\sec^{-1}x$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯେପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଥିଲା, ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରିବ ।

ଉଦାହରଣ 22. 11 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ $\sin^{-1}(x^2)$ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ମନେକର $y = \sin^{-1}x^2$

$\therefore\ x^2 = \sin y$

ବର୍ତ୍ତମାନ $(x+\delta x)^2 = \sin(y+\delta y)$

$$\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x} = \frac{\sin(y+\delta y)-\sin y}{\delta x}$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{(x+\delta x)^2-x^2}{(x+\delta x)-x}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\delta y}{2}}{\frac{\delta y}{2}}\cdot\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\ [\because\ \delta x\to 0 \text{ ବେଳେ } \delta y\to 0]$$

$$\Rightarrow 2x=\cos y\cdot\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\cos y}=\frac{2x}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

ଉଦାହରଣ 22. 12 ଡେଲ୍ଟା ପଦ୍ଧତିରେ $\sin^{-1}\sqrt{x}$ ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ମନେକର $y=\sin^{-1}\sqrt{x}$

$$\Rightarrow \sin y=\sqrt{x} \qquad \ldots (1)$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $\sin(y+\delta y)=\sqrt{x+\delta x}$ ... (2)

(1) ଓ (2)ରୁ ପାଇବା

$$\sin(y+\delta y)-\sin y=\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}$$

ବା $2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)=\frac{\left(\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$

$$\therefore \frac{2\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\delta x}=\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$$

ବା $\frac{\delta y}{\delta x}\cdot\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\cdot\lim_{\delta y\to 0}\cos\left(y+\frac{\delta y}{2}\right)\cdot\lim_{\delta y\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\delta y}{2}\right)}{\frac{\delta y}{2}}$$

$=\lim_{\delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$ $(\therefore\ y\to 0,$ ଯେବେ $\delta x\to 0)$

ବା $\frac{dy}{dx}\cos y=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ବା $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\cos y}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.3

1. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\cos^{-1}x^2$ (ii) $\dfrac{\cos^{-1}x}{x}$ (iii) $\cos^{-1}\sqrt{x}$

(iv) $\tan^{-1}x^2$ (v) $\dfrac{\tan^{-1}x}{x}$ (vi) $\tan^{-1}\sqrt{x}$

22.4 ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ, ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଶିଖିଥିଲୁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ସେହି ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଅନ୍ୟ ବିକଳ୍ପ ପଦ୍ଧତିରେ କରିବାକୁ ଶିଖିବା । ଆମେ ମାନକ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ, ଯଥା : $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$ ଆଦିରୁ ଆରମ୍ଭ କରିବା ।

(i) $\sin^{-1}x$ର ଅବକଳଜ

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y = \sin^{-1}x$

$\therefore\ x = \sin y$ ... (i)

y ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ କରି

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sqrt{1-\sin^2 y} \qquad \text{... [(i) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]}$$

ବା $$\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left[\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}\right]$$

ଏଣୁ $$\frac{d}{dx}[\sin^{-1}x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ସେହପରି ଦର୍ଶାଯାଇପାରିବ ଯେ

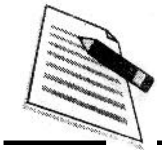
$$\frac{d}{dx}[\cos^{-1}x] = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ii) $\tan^{-1}x$ ର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ :

ସମାଧାନ : ମନେକର $\tan^{-1}x = y$

$\therefore\ x = \tan y$

y ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ କରି



$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

ଏବଂ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$

$= \frac{1}{1+\tan^2 y}$ [$\because$ ଆମେ tan y କୁ x ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିଛୁ]

$= \frac{1}{1+x^2}$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$

ସେହିପରି, $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

(iii) $\sec^{-1}x$ ର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ :

ସମାଧାନ : ମନେକର $\sec^{-1}x = y$

$\therefore\ x = \sec y$ ଏବଂ $\frac{dy}{dx} = \sec y \tan y$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}$

$= \frac{1}{\sec y[\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}]}$

$= \frac{1}{\pm\sec y\sqrt{\sec^2 y - 1}}$

$= \frac{1}{|x|\sqrt{\sec^2 y - 1}}$

ଟୀକା : (i) ଯେତେବେଳେ $x > 1$, sec y ହେଉଛି ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ tan y ଧନାତ୍ମକ, $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(ii) ଯେତେବେଳେ, $x < -1$, sec y ଋଣାତ୍ମକ ଓ tan y ଋଣାତ୍ମକ, $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

ସେହିପରି $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

ଉଦାହରଣ 22. 13 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin^{-1}\sqrt{x}$ (ii) $\cos^{-1}x^2$ (iii) $(\operatorname{cosec}^{-1}x)^2$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର $y = \sin^{-1}\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

(ii) ମନେକର $y = \cos^{-1}x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot (2x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{coses}^{-1} x^2) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

(iii) ମନେକର $y = (\text{cosec}^{-1}x)^2$

$$\frac{dy}{dx} = 2(\text{cosec}^{-1} x) \cdot \frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x)$$

$$= 2(\text{cosec}^{-1} x) \cdot \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \frac{-2\,\text{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\text{coses}^{-1} x) = \frac{-2\,\text{cosec}^{-1} x}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

ଉଦାହରଣ 22. 14 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\tan^{-1} \frac{\cos x}{1+\sin x}$ (ii) $\sin(2 \sin^{-1}x)$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର $y = \tan^{-1} \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$$= \tan^{-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$= \tan^{-1} \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}$$

(ii) $y = \sin(2\sin^{-1}x)$

ସମାଧାନ : ମନେକର $y = \sin(2\sin^{-1}x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{d}{dx}(2\sin^{-1}x)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cos(2\sin^{-1}x)\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{2\cos(2\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

ଉଦାହରଣ 22. 15 ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ର $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ହେଉଛି 1

ସମାଧାନ : ମନେକର $y = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$ ଓ $z = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$

ମନେକର $x = \tan\theta$

$$\therefore y = \tan^{-1}\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \text{ ଏବଂ } z = \sin^{-1}\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$$

$\Rightarrow y = \tan^{-1}(\tan 2\theta)$ ଏବଂ $z = \sin^{-1}(\sin 2\theta)$

$\Rightarrow y = 2\theta$ ଏବଂ $z = 2\theta$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = 2 \text{ ଏବଂ } \frac{dz}{d\theta} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dz} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$ (ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.4

ନିମ୍ନଫଳନଗୁଡ଼ିକର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ (1–3)ର ଫଳାଫଳକୁ ସରଳତମ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

1. (a) $\sin^{-1}x^2$ (b) $\cos^{-1}\frac{x}{2}$ (c) $\cos^{-1}\frac{1}{x}$

2. (a) $\tan^{-1}(\text{cosec } x - \cot x)$ (b) $\cot^{-1}(\sec x + \tan x)$ (c) $\tan^{-1}\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$

3. (a) $\sin(\cos^{-1}x)$ (b) $\sec(\tan^{-1}x)$ (c) $\sin^{-1}(1-2x^2)$

(d) $\cos^{-1}(4x^3-3x)$ (e) $\cot^{-1}\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$

4. ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$\dfrac{\tan^{-1}x}{1+\tan^{-1}x}$ ର $\tan^{-1}x$ ଅବକଳଜ ସାପେକ୍ଷ ।

22.5 ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଫଳନଟିର ପ୍ରଥମ ଅବକଳଜର ଅବକଳଜ । ଏହି ଭାଗରେ, ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଏବଂ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନମାନଙ୍କର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ କରିବା । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ଆମେ ଗୁଣନ ନିୟମ, ଭାଗ ନିୟମ ଓ ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମର ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ଆସ କିଛି ଉଦାହରଣର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 22. 16 ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin x$ (ii) $x\cos x$ (iii) $\cos^{-1}x$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର, $y = \sin x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ, x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କଲେ, ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx}=\cos x$$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=-\sin x$$

(ii) ମନେକର, $y = x\cos x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx}=x(-\sin x)+\cos x\cdot 1$$

$$\frac{dy}{dx}=-x\sin x+\cos x$$

ପୁନଶ୍ଚ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(-x\sin x+\cos x)$$

$= -(x\cos x + \sin x) - \sin x$

$= -x\cos x - 2\sin x$

$$\therefore\frac{d^2y}{dx^2}=-(x\cos x+2\sin x)$$

(iii) ମନେକର $y = \cos^{-1}x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-1}{(1-x^2)^{1/2}} = -(1-x^2)^{-1/2}$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{-1}{2}\cdot(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)\right]$$

$$= -\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-x}{(1-x^2)^{3/2}}$$

ଉଦାହରଣ 22. 17 ଯଦି $y = \sin^{-1}x$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$ ଯେଉଁଠି y_2 ଓ y_1 ଯଥାକ୍ରମେ yର x ସାପେକ୍ଷ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡରର ଓ ପ୍ରଥମ ଅର୍ଡରର ଅବକଳଜକୁ ସୂଚିତ କରନ୍ତି ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $y = \sin^{-1}x$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

ବା $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{1}{1-x^2}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଇ)

ବା $(1-x^2)y_1^2 = 1$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$(1-x^2)\cdot 2y_1\frac{d}{dx}(y_1) + (-2x)\cdot y_1^2 = 0$$

ବା $(1-x^2)\cdot 2y_1y_2 - 2xy_1^2 = 0$

ବା $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.5

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\sin(\cos x)$ (b) $x^2 + \tan^{-1}(x)$

2. ଯଦି $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ ହୁଏ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$

3. ଯଦି $y = \sin(\sin x)$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{d^2y}{dx^2} + \tan x \frac{dy}{dx} + y\cos^2 x = 0$

4. ଯଦି $y = x + \tan x$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\cos^2 x \frac{d^2y}{dx^2} - 2y + 2x = 0$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\mathrm{cosec}^2 x$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (vi) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, x) = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$

- ଯଦି x ର ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ u ହୁଏ, ତେବେ

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot u) = -\mathrm{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}\, u) = -\mathrm{cosec}\, u \cot u \frac{du}{dx}$

- (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

- ଯଦି xର ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ u ହୁଏ, ତେବେ

  (i) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$ (ii) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$

  (iii) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} u) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$ (iv) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} u) = \frac{-1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$

  (v) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$ (vi) $\frac{d}{dx}(\mathrm{cosec}^{-1} u) = \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$

- ଏକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଫଳନର ପ୍ରଥମ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜର ଅବକଳଜ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଯଦି $y = x^3 \tan^2 \frac{x}{2}, \frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. $x = \frac{\pi}{2}$ ଏବଂ 0 ଠାରେ $\frac{d}{dx}\sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

3. ଯଦି $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{(1-x)^2}} + \cos^2(2x+1)$ ହୁଏ, $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଯଦି $\sec^{-1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \sin^{-1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{dy}{dx} = 0$

5. ଯଦି x= a $\cos^3\theta$, y = a $\sin^3\theta$ ହୁଏ, ତେବେ $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଯଦି $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots}}}, \frac{dy}{dx}$ ହୁଏ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. $\sin^{-1}x$ର $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଯଦି y = cos (cos x) ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{d^2y}{dx^2} - \cot x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot \sin^2 x = 0$

9. ଯଦି $y = \tan^{-1}x$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $(1+x)^2 y_2 + 2xy_1 = 0$

10. ଯଦି $y = (\cos^{-1}x)^2$ ହୁଏ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(1-x^2)y_2 - xy_1 - 2 = 0$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.1

1. (a) $-\operatorname{cosec} x \cot x$ (b) $-\operatorname{cosec}^2 x$ (c) $-2\sin 2x$

   (d) $-2\operatorname{cosec}^2 2x$ (e) $-2x \operatorname{cosec} x^2 \cot x^2$ (f) $\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

2. (a) $2\sin 2x$ (b) $-2\operatorname{cosec}^2 x \cot x$ (c) $2\tan x \sec^2 x$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.2

1. (a) $12\cos 4x$ (b) $-5\sin 5x$ (c) $\dfrac{\sec^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ (d) $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   (e) $2x\cos x^2$ (f) $2\sqrt{2}\sec^2 2x$ (g) $-3\pi\operatorname{cosec}^2 3x$

   (h) $10\sec 10x \tan 10x$ (i) $-2\operatorname{cosec} 2x \cot 2x$

2. (a) $\dfrac{2\sec x\tan x}{(\sec x+1)^2}$ (b) $\dfrac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$ (c) $x\cos x+\sin x$

   (d) $2x\cos x-(1+x)^2\sin x$ (e) $\operatorname{cosec} x(1-x\cot x)$

   (f) $2\cos 2x\cos 3x-3\sin 2x\sin 3x$ (g) $\dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$

3. (a) $3\sin^2 x\cos x$ (b) $-2\sin x$ (c) $4\tan^3 x\sec^2 x$ (d) $-4\cot^3 x\operatorname{cosec}^2 x$

   (e) $5\sec^5 x\tan x$ (f) $-3\operatorname{cosec}^3 x\cot x$ (g) $\dfrac{\sec\sqrt{x}\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   (h) $\sec x(\sec x+\tan x)$

4. (a) 1 (b) $\sqrt{2}+2$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.3

1. (i) $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (ii) $\dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{-\cos^{-1}x}{x^2}$ (iii) $\dfrac{-1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}}$

   (iv) $\dfrac{2x}{1+x^4}$ (v) $\dfrac{1}{x(1+x^2)}-\dfrac{\tan^{-1}x}{x^2}$ (vi) $\dfrac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.4

1. (a) $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\dfrac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$ (c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

2. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) -1

3. (a) $-\frac{\cos(\cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\frac{x}{1+x^2}\sec(\tan^{-1} x)$

(c) $\frac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\frac{-1}{2(1+x^2)}$

4. $\frac{1}{(1+\tan^{-1} x)^2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 22.5

1. (a) $-\cos x \cos(\cos x) - \sin^2 x \sin(\cos x)$

(b) $\frac{2x(2+x^2)}{(1+x^2)^2} + 2\tan^{-1} x$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $x^3 \tan\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2} + 3x^2\tan^2\frac{x}{2}$ 2. 0, 0

3. $\frac{5(3-x)}{3(1-x)^{\frac{5}{3}}} - 2\sin(4x+2)$ 5. $|\sec\theta|$

6. $\frac{1}{2y-1}$ 7. $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$