୨୧

ଅବକଳନ

ଅବକଳନ ଗଣିତ (differential calculus) ପ୍ରଥମେ 1665 ବା 1666 ସମୟରେ ପ୍ରବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥିଲା । ଯେତେବେଳେ ଆଇଜାକ୍ ନିଉଟନ୍ ପ୍ରଥମ କରି ଏକ ପଦ୍ଧତି ଚିନ୍ତା କରିଥିଲେ ଯାହାକୁ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଅବକଳନ (differentiation) (ଏକ ଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯାହାଦ୍ୱାରା ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳାଫଳକୁ ଅବକଳଜ (derivative କୁହାଯାଏ) ବୋଲି ଜାଣିଛୁ । ନିଉଟନ୍ ଓ ଲିବ୍‌ନିଜ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ହୋଇଥିବା ଉଦ୍ଭାବନ ମଧ୍ୟରେ ଯୌଗିକ ଫଳନ ମାନଙ୍କର ଯୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ଭାଗର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ କରିବାର ନିୟମ ତଥା ଅନେକ ଫଳାଫଳ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଥିଲା ।

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବୁ, ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥା ଭୌତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ପ୍ରଦାନ କରିବୁ, ଅବକଳଜର ବିଭିନ୍ନ ନିୟମ ଆଲୋଚନା କରିବୁ ଓ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନାର ଆରମ୍ଭ କରିବୁ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- $x = a$ ଠାରେ ଏକ ଫଳନ $y = f(x)$ର ଅବକଳଜକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ପ୍ରଦାନ କରିପାରିବ ।
- ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ ଯେ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ $f(x) = c$ ର ଅବକଳଜ ଶୂନ ଅଟେ ।
- ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ $f(x) = x^n, n \in Q$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ଏବଂ ଏହାକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ବିଭିନ୍ନ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- $cf(x), [f(x) \pm g(x)]$ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଫଳନର ତଥା ପଲିନୋମିଆଲ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- ଦୁଇଟି ଫଳନର ଗୁଣନ ଓ ଭାଗ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିୟମ କହିପାରିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ ।
- ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ କହିପାରିବ ଓ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଅବକଳଜ ଲାଗି ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ ।
- ବୀଜଗାଣିତିକ ଫଳନ (ପରିମେୟ ଫଳନ ସହ)ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ, ଏବଂ
- ଏକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଯେକୌଣସି ଘାତାଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦ୍ୱିପଦ - ପ୍ରମେୟ
- ଫଳନ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଲେଖଚିତ୍ର
- ଏକ ଫଳନର ସୀମା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧାରଣା

21.1 ଏକ ଫଳନର ଅବକଳନ

ଗୋଟିଏ ଫଳନ $y = x^2$ ଓ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ (5, 25) କଥା ବିଚାର କର । ଯଦି xର ମାନ 5ରୁ 5·1, 5·01, 5·001, ..., ଆଦିକୁ ବଦଳେ, ତେବେ ଅନୁରୂପ ଭାବେ y ର ମାନ 25ରୁ 26·01, 25·1001, 25·010001, ... କୁ ବଦଳେ । xର ମାନରେ ଏକ ଛୋଟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଯୋଗୁ, yର ମାନରେ ମଧ୍ୟ କିଛି ଛୋଟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିଥାଏ । xର ମାନରେ ଘଟିଥିବା ଛୋଟ ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ δx ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ଏବଂ yର ମାନରେ ଘଟିଥିବା ସମ୍ପୃକ୍ତ ଛୋଟ ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ δy ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇ ଥାଉ ଏବଂ δx ଓ δy ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ଯାହା ହୁଅନ୍ତୁ ପଛେ ଆମେ ସେ ଦୁଇଟିକୁ (ଅର୍ଥାତ୍ δx ଓ δyକୁ) ଆମେ x ଓ yର ମାନର ବୃଦ୍ଧି ବୋଲି କହିଥାଉ । ଏହି ବୃଦ୍ଧି ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ $\frac{\delta y}{\delta x}$ କୁ ବୃଦ୍ଧିର ଅନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ (5, 25) ବିନ୍ଦୁଠାରେ $y = x^2$ ଲାଗି ପ୍ରଦତ୍ତ ସାରଣୀରେ ଆମେ ପାଇବା $\delta x = 0{\cdot}1, 0{\cdot}01, 0{\cdot}001, 0{\cdot}0001, \ldots$ $\delta y = 1{\cdot}01, 1{\cdot}001, 0{\cdot}010001, 0{\cdot}00100001, \ldots$

x	5·1	5·01	5·001	5·0001
δx	·1	·01	·001	·0001
y	26·01	25·1001	25·010001	25·00100001
δy	1·01	0·1001	0·010001	0·00100001
$\frac{\delta y}{\delta y}$	10·1	10·01	10·001	10·0001

ଆମେ ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରୁ ନିମ୍ନ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ କରିବା :

(i) δxର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଲେ, δyର ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇଥାଏ ।

(ii) $\delta x \to 0$ ହେଲେ, $\delta y \to 0$

(iii) ଅନୁପାତ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ଏକ ସଂଖ୍ୟା 10ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୋଇଥାଏ ।

ଏଣୁ, ଏହି ଉଦାହରଣରୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $\delta x \to 0$ ହେଲେ, $\delta y \to 0$, ମାତ୍ର $\frac{\delta y}{\delta y}$ ଏକ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟାର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ ସଂଖ୍ୟାଟି ଶୂନ ନ ହୋଇପାରେ । ଏହାର ସୀମା $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x}$ କୁ ସମତୁଲ୍ୟ ଭାବରେ $\frac{dy}{dx}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । $\frac{dy}{dx}$ କୁ yର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ yର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ସହଗ (differential coefficient of y with respect to x) ବୋଲି ପଢାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx} = 10$ ଯାହାକି ଉପରିସ୍ଥ ଉଦାହରଣରେ ମିଳିଛି । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଯେତେବେଳେ δx ଓ δy ଛୋଟ ଛୋଟ ସଂଖ୍ୟା (ବୃଦ୍ଧି), ସେତେବେଳେ ଏହି ଛୋଟ ଛୋଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ $\frac{\delta y}{\delta x}$ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ 10ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୋଇଥାଏ ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଏକ ଫଳନ କଥା ବିଚାର କରିବା । ଫଳନଟି ହେଉ

$y = f(x)$ ... (i)

ଅବକଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଲାଗି xର ମାନରେ ଛୋଟ ପରିବର୍ତ୍ତନ δx ନିଆଯାଉ । ଫଳରେ xର ନୂତନ ବା ପରିବର୍ତ୍ତିତ ମାନ ହେବ $x + \delta x$ ଯେଉଁଠି $f(x)$ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅଟେ । yର ମାନରେ ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିବ । ଏହି ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ δy ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇଲେ, $y+\delta y$ ହେବ yର ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ନୂତନ ମୂଲ୍ୟ । ଏଣୁ

$y + \delta y = f(x+\delta x)$ ... (ii)

(i) କୁ (ii)ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା,

$(y+\delta y) - y = f(x+\delta x) - f(x)$

ବା, $\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$ ... (iii)

ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ (iii) କୁ (δx) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \quad \text{... (iv)}$$

ଶେଷରେ ଆମେ ଅନୁପାତ $\frac{\delta y}{\delta x}$ $\delta x \to 0$ ବେଳେ କଥା ବିଚାର କରିବା ।

ଯଦି $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$ ... (v)

ଏକ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥାଏ, ତେବେ $f(x)$ କୁ ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସୀମାକୁ $f(x)$ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏବଂ ଏହାକୁ $f'(x)$ ବା $\frac{d}{dx} f(x)$ ବା $\frac{dy}{dx}$ (yର $\frac{d}{dx}$ ଭାବେ ପଢ଼ାଯାଏ) ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଏହିପରି ଭାବେ, $\lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim\limits_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

ଟିପ୍ପଣୀ

(1) ସମୀକରଣ (v)ରେ ସୂଚିତ ସୀମାନ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ହେଉଛି ଏକ ଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା । ଏହି ଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଅବକଳନ (differentiation) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏଥିରୁ ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳାଫଳକୁ ଅବକଳଜ (derivative) କୁହାଯାଏ ।

(2) ଯେଉଁ ଫଳନର ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବକଳଜର ଅବସ୍ଥିତି ଥାଏ, ତାହା ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ଅବକଳନୀୟ (derivable) ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

(3) ଏହା ପ୍ରତିପାଦିତ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ଯଦି ଫଳନ $f(x)$ ଏକ ବିନ୍ଦୁ $x = a$ ଠାରେ ଅବକଳନୀୟ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଫଳନଟି ନିଶ୍ଚୟ ସେହି ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥିବ । ମାତ୍ର ଏହାର ବିପରୀତ କଥନ ସତ୍ୟ ନ ହୋଇପାରେ ।

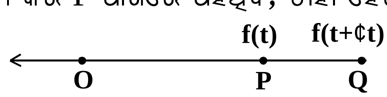
(4) ସଙ୍କେତ δx ସ୍ଥାନରେ Δx ବା h ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ବା

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(5) ଯଦି $y = f(x)$, ତେବେ $\frac{dy}{dx}$ କୁ ମଧ୍ୟ y_1 ବା y' ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

21.2 ପରିବେଗ ଏକ ସୀମା

ମନେକରାଯାଉ ଯେ ଗୋଟିଏ କଣିକା, ଯାହାକି ଆରମ୍ଭରେ O ସ୍ଥାନରେ ସ୍ଥିର ଭାବରେ ଥିଲା ଏବଂ OP ସରଳରେଖାରେ ଗତିକଲା । ଏହା ଯେଉଁ ଦୂରତା ଅତିକ୍ରମ କରି P ପାଖରେ ପହଞ୍ଚିବ, ତାହା ହେଉଛି ସମୟ t ର ଏକ ଫଳନ ।



ଚିତ୍ର 21.1

ଆମେ ଲେଖିପାରୁ, ଦୂରତା OP = s = f(t) ... (i)

ସେହିପରି ଭାବରେ Pର ଖୁବ୍ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ଠାରେ ପହଞ୍ଚିବା ପାଇଁ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତା PQ ଅର୍ଥାତ୍ δS ହେଉଛି ସମୟ δtର ଏକ ଫଳନ ଯେପରିକି

$$OQ = OP + PQ$$
$$= s + \delta s$$
$$= f(t + \delta t) \quad \text{... (ii)}$$

δt ଅନ୍ତରାଳରେ କଣିକାଟିର ହାରାହାରି ପରିବେଗକୁ ନିଆଯାଇପାରେ

$$\frac{\text{ଦୂରତାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ}}{\text{ସମୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ}} \qquad [\text{(i) ଓ (ii)ରୁ}]$$

$$= \frac{(s+\delta s)-s}{(t+\delta t)-t}$$

$$= \frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}$$

(δt ଅନ୍ତରାଳରେ ଦୂରତା ଅତିକ୍ରମ କରିବାର ହାରାହାରି ହାର)

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ P ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ଅନ୍ତରାଳରେ ହାରାହାରି ପରିବେଗ ପାଇବା ପାଇଁ δtକୁ ଅଧିକ କ୍ଷୁଦ୍ର କରିବା । $\delta t \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ହାରାହାରି ପରିବେଗର ସୀମା ହେଉଛି ସମୟ t ବେଳେ (Pବିନ୍ଦୁ ନିକଟରେ) କଣିକାଟିର ତାତ୍କ୍ଷଣିକ ପରିବେଗ ।

$$\therefore \text{ t ସମୟରେ ପରିବେଗ } = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}$$

ଏହାକୁ $\frac{ds}{dt}$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଏଣୁ, t ସମୟରେ ଏକ ଗତିଶୀଳ କଣିକାର ଦୂରତା ଯଦି f(t) ହୁଏ, ତେବେ $t = t_0$ଠାରେ 'f' ର ଅବକଳଜ P ବିନ୍ଦୁରେ କଣିକାଟିର ତାତ୍କ୍ଷଣିକ, ଅର୍ଥାତ୍ $t = t_0$ ସମୟର ବେଗକୁ ସୂଚାଇ ଥାଏ ।

ଏହାକୁ କୌଣସି ଫଳନର ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅବକଳଜର ଭୌତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : ଅବକଳଜ $\frac{dy}{dx}$, yର x ସାପେକ୍ଷ ତାତ୍କ୍ଷଣିକ ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାରକୁ ବ୍ୟକ୍ତ କରିଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 21.1 ଗୋଟିଏ କାର 't' ସେକେଣ୍ଡ ସମୟରେ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତା 's' ମିଟରକୁ ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

$$s = 3t^2$$

t = 4 ସେକେଣ୍ଡକ ବେଳେ କାରର ପରିବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, $f(t) = s = 3t^2$

$$\therefore f(t+\delta t) = s + \delta s = 3(t+\delta t)^2$$

$$\text{ଯେକୌଣସି ସମୟ 't'ରେ, କାରର ପରିବେଗ } = \lim_{\delta t \to 0} \frac{f(t+\delta t)-f(t)}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t+\delta t)^2 - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{3(t^2 + 2t\delta \cdot \delta t + \delta t^2) - 3t^2}{\delta t}$$

$$= \lim_{\delta t \to 0} (6y + 3\delta t)$$

$$= 6t$$

$\therefore$ t = 4 ସେକେଣ୍ଡ ସମୟରେ କାରର ପରିବେଗ = (6 × 4) ମିଟର / ସେକେଣ୍ଡ = 24 ମି/ସେକେଣ୍ଡ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.1

1. ନିମ୍ନରେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଗତିଶୀଳ ଏକ କଣାର ସମୟ-ଦୂରତା ସମ୍ବନ୍ଧରୁ t ଲାଗି ସୂଚିତ ସମୟରେ ଏହାର ପରିବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $s = 2 + 3t;\ t = \frac{1}{3}$ (b) s = 8t – 7; t = 4

(c) $s = t^2 + 3t;\ t = \frac{3}{2}$ (d) $s = 7t^2 - 4t + 1,\ t = \frac{5}{2}$

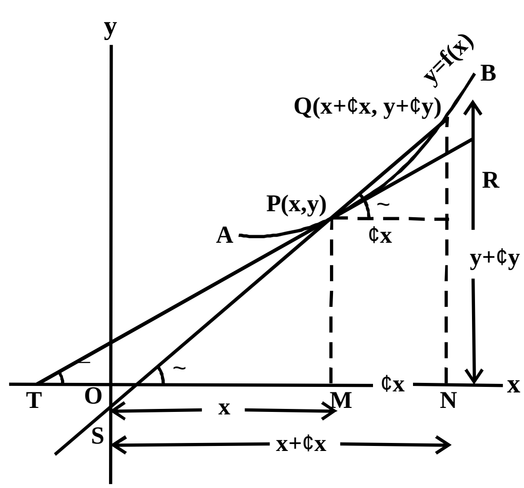
2. ଏକ ଭୂସମତଳୀୟ ସରଳରେଖାରେ ଗତିଶୀଳ ଏକ କଣିକା t ସେକେଣ୍ଡରେ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥିବା ଦୂରତା s ମିଟରକୁ ନିମ୍ନମତେ ଦିଆଯାଇଛି ।

$s = t^4 - 18t^2$ । t = 10 ସେକେଣ୍ଡରେ କଣାଟିର ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଗୋଟିଏ କଣିକା ଏକ ଭୂସମାନ୍ତର ରେଖାରେ ଗତି କରୁଛି । ଏକ ସ୍ଥିର ବିନ୍ଦୁ o ଠାରୁ t ସେକେଣ୍ଡରେ କଣିକାଟି ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତା s ମିଟରକୁ $s = 10 - t^2 + t^3$ ରୂପେ ଦିଆଯାଇଛି । 3 ସେକେଣ୍ଡ ଶେଷରେ କଣିକାଟିର ତାତ୍‌କ୍ଷଣିକ ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

21.2 dy/dx ର ଜ୍ୟାମିତିକ ଅର୍ଥ

ମନେକରାଯାଉ ଯେ y = f(x) ହେଉଛି x ର ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ । ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହାକୁ APQB ରୂପେ ନାମିତ କର ।



ଚିତ୍ର 21.2

ମନେକରାଯାଉ ଯେ y = f(x)ର ଲେଖଚିତ୍ର ବା y = f(x) କୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରୁଥିବା ବକ୍ର ଉପରେ P(x, y) ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ମନେକରାଯାଉ $Q(x+\delta x, y+\delta y)$ ହେଉଛି ସେହି ବକ୍ର ଉପରେ Pର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । x-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି PM ଓ QN ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର PR ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି PR, QNକୁ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । PQ ଛେଦକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ଏହାକୁ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ S ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର । ଛେଦକ ରେଖା QPS, x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ α କୋଣ ଅଙ୍କନ କରୁଛି ବୋଲି ଧରିନିଆଯାଉ l ବକ୍ରର P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ PT ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ଏବଂ ଏହା x-ଅକ୍ଷ ସହ θ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରୁ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔQPRରେ, $\angle QPR = \alpha$

$$\tan\alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{QN-RN}{MN} = \frac{QN-PM}{ON-OM} = \frac{(y+\delta y)-y}{(x+\delta x)-x} = \frac{\delta y}{\delta x} \quad \ldots (i)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ Q ବିନ୍ଦୁ ବକ୍ର ଉପରେ P ଆଡକୁ ନିକଟରୁ ନିକଟତର ଗତି କରୁଛି ବୋଲି ମନେକରାଯାଉ । ଏଣୁ, ଯେତେବେଳେ $Q \to P, \delta x \to 0, \delta y \to 0, \propto \to 0, (\tan\alpha \to \tan\theta)$ ଏବଂ ଫଳସ୍ୱରୂପ, ଛେଦକ QPS ସ୍ପର୍ଶକ PT ସହ ମିଳିତ ହେବାକୁ ଆଗେଇ ଆସେ ।

(i) ରୁ $\tan\alpha = \dfrac{\delta y}{\delta x}$

ସୀମାନ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $\lim\limits_{\substack{\delta x\to 0\\ \delta y\to 0\\ \alpha\to\theta}} \tan\propto = \lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}$

ବା $\tan\theta = \dfrac{dy}{dx}$

ଏଣୁ ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x, y) ଠାରେ ଅବକଳଜ $\dfrac{dy}{dx}$, P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକର ଆନତିକୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରେ । ଏହା ହେଉଛି $\dfrac{dy}{dx}$ ର ଜ୍ୟାମିତିକ ଉପସ୍ଥାପନା ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ $\dfrac{dy}{dx}$ ର ମାନ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

ଏଣୁ, ବକ୍ରର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରର ସ୍ପର୍ଶକର ପ୍ରବଣତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ବକ୍ରର ସମୀକରଣ y = f(x)ରୁ $\dfrac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ $\dfrac{dy}{dx}$ ରେ ସଂସ୍ଥାପନ କର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1

ଯଦି ବକ୍ରର P ବିନ୍ଦୁରେ ବକ୍ରପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ହୁଏ, ତେବେ $\theta = 0^0$ ବା 180^0, ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{dy}{dx} = \tan 0^0$ ବା $\tan 180^0$, ଅର୍ଥାତ୍ $\dfrac{dy}{dx} = 0$ । ଅନ୍ୟକଥାରେ, y = f(x) ଦ୍ୱାରା ଉପସ୍ଥାପିତ ବକ୍ରର P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2

ଯଦି ବକ୍ରର P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ x-ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଏ, $\theta = 90^0$ ବା $\frac{dy}{dx} = \tan 90^0 = \infty$ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $y = f(x)$ ଦ୍ୱାର ଉପସ୍ଥାପିତ ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ।

21.4 ଧ୍ରୁବକ ଫଳନର ଅବକଳଜ

କଥନ : ଏକ ଧ୍ରୁବକର ଅବକଳଜ ଶୂନ ଅଟେ ।

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ ଯେ $y = c$ ହେଉଛି ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ । ତେବେ $y = c$କୁ

$y = cx^0$ ଭାବେ ଲେଖାଯାଇପାରେ $[\because x^0 = 1]$ ... (i)

ମନେକରାଯାଉ x ର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି ଦେଉଛି δx । ଏହି ବୃଦ୍ଧି ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ yର ମାନରେ ବୃଦ୍ଧିକୁ δy ନିଆଯାଉ । ଫଳରେ

$y + \delta y = c(x+\delta x)^0$ ... (ii)

(ii) ରୁ (i) କୁ ବିୟୋଗକଲେ ପାଇବା

$y + \delta y - y = c(x+\delta x)^0 - cx^0$ $(\because x^0 = 1)$

ବା $\delta y = c - c$ ବା $\delta y = 0$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{0}{\delta x}$

ବା $\frac{\delta y}{\delta x} = 0$

$\delta x \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୀମା ନେଇ ଆମେ ପାଇବା

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 0$$

ବା $\frac{dy}{dx} = 0$

ବା $\frac{dc}{dx} = 0$ [(i)ରୁ $y = c$ ନେଇ]

ଏଥିରୁ ପ୍ରମାଣିତ ଯେ ଏକ ଧ୍ରୁବକର ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର 0 ଅଟେ । ଏଣୁ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ଶୂନ ଅଟେ ।

21.5 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ

ଏକ ଫଳନର ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଏହାର ଅବକଳଜର ସଂଜ୍ଞାକୁ ମନେପକାଇଲେ, ମନେପଡିବ ଯେ ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମମାନ ରହିଛି ।

ପାଦ I : ଦତ୍ତ ଫଳକୁ $y = f(x)$ ରୂପରେ ଲେଖ । ... (i)

ପାଦ II : ମନେକରାଯାଉ x ର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି ହେଉଛି δx ଏବଂ yର ମାନରେ ଅନୁରୂପ ବୃଦ୍ଧି ହେଉଛି δy ଯେପରିକି

$y + \delta y = f(x+\delta x)$ ... (ii)

ପାଦ III : (i) କୁ (ii)ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$\delta y = f(x+\delta x) - f(x)$ ... (iii)

ପାଦ IV : ପାଦ (iii)ରେ ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳାଫଳକୁ δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ପାଇବା

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

ପାଦ V : $\delta x \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସୀମାନେଇ ପାଇବା

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x}$$

ଟୀକା :

ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପଦ୍ଧତିକୁ ଡେଲ୍ଟା ବିଧି ବା ଆଦିତଃ - ଅବକଳନ ପଦ୍ଧତି କୁହାଯାଏ ।

ପରବର୍ତ୍ତୀ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ଆମେ କେତେକ ମାନକ ଓ ସରଳ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

21.6 ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ କେତେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ

ମନେକରାଯାଉ $y = x^n$ ... (i)

xର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ପାଇଁ yର ମାନରେ ଘଟିଥିବା ଅନୁରୂପ ବୃଦ୍ଧି δy ହେଉ । ଫଳରେ

$y + \delta y = (x+\delta x)^n$ ... (ii)

(ii) ରୁ (i) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା,

$(y+\delta y) - y = (x+\delta x)^n - x^n$

$$\delta y = x^n\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - x^n$$

$$= x^n\left[\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n - 1\right]$$

ଯେହେତୁ $\frac{\delta x}{x} < 1$, x ତୁଳନାରେ δx ଅତ୍ୟନ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ହୋଇଥିବାରୁ, ଆମେ ଯେକୌଣସି ଘାତ ପାଇଁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି $\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ ର ବିସ୍ତାର କରିପାରିବା ।

$\left(1+\frac{\delta x}{x}\right)^n$ କୁ ଦ୍ୱିପଦ ଉପପାଦ୍ୟ ସାହାଯ୍ୟରେ ବିସ୍ତାର କଲେ ପାଇବା

$$\delta y = x^n\left[1 + n\left(\frac{\delta x}{x}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{\delta x}{x}\right)^3 + \ldots - 1\right]$$

$$= x^n(\delta x)\left[\frac{n}{x} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\delta x}{x^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3} + \ldots\right]$$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ପାଇବା

$$\frac{\delta y}{\delta x}=x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3}+\ldots\right]$$

$\delta x \to 0$ ସୀମା ନେଲେ $(\delta x)^2$ ଏବଂ δx ର ଉଚ୍ଚତର ଘାତ ମଧ୍ୟ 0 ର ନିକଟତର ହେବ ।

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}\lim_{\delta x\to 0}x^n\left[\frac{n}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{\delta x}{x^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{(\delta x)^2}{x^3}+\ldots\right]$$

ବା $\lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}=\frac{dy}{dx}=x^n\left[\frac{n}{x}+0+0+\ldots\right]$

ବା $\frac{dy}{dx}=x^n\cdot\frac{n}{x}=nx^{n-1}$

$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$ $\quad [\because y=x^n]$

ଟୀକା : ଆମେ ଉପରିସ୍ଥ ସୂତ୍ରକୁ $x, x^2, x^3, \ldots$ ଭଳି ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବା, ଅର୍ଥାତ୍ ଘାତାଙ୍କ n ଯେଉଁଠି 1, 2, 3, ... ଆଦି ।

ଯଥା : $\frac{d}{dx}x=\frac{d}{dx}x^1=1x^{1-1}=1x^0=1\cdot 1=1$

$\frac{d}{dx}x^2=2x^{2-1}=2x$

$\frac{d}{dx}(x^3)=3x^{3-1}=3x^2$, ଇତ୍ୟାଦି ।

ଉଦାହରଣ 21.2

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) x^{10} (ii) x^{50} (iii) x^{91}

ସମାଧାନ :

(i) $\frac{d}{dx}(x^{10})=10x^{10-1}=10x^9$

(ii) $\frac{d}{dx}(x^{50})=50x^{50-1}=50x^{49}$

(iii) $\frac{d}{dx}(x^{91})=91x^{91-1}=91x^{90}$

ମନ୍ତବ୍ୟ : n ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ନିଉଟନ୍‌ଙ୍କ ଘାତ-ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ଯଥା, ଧରିନିଆଯାଉ $n=\frac{1}{2}$ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

ମନେକରାଯାଉ $y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

ସେତେବେଳେ, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$ ବା $\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ସଂଜ୍ଞାରୁ ଅଥବା ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ କେତେକ ସରଳ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 21.3

ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ x^2ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y = x^2$... (i)

xର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି ପାଇଁ yର ମାନରେ ଅନୁରୂପ ବୃଦ୍ଧି ହେଉ δy ।

$y + \delta y = (x + \delta x)^2$... (ii)

(ii) ରୁ (i)କୁ ବିୟୋଗକଲେ ପାଇବା

$(y+\delta y) - y = (x+\delta x)^2 - x^2$

ବା $\delta y = x^2 + 2x(\delta x) + (\delta x)^2 - x^2$

ବା $\delta y = 2x(\delta x) + (\delta x)^2$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ପାଇବା

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

$\delta x \to 0$ ସୀମା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯାଇ ପାଇବା

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}(2x + \delta x)$$

ବା $\frac{dy}{dx} = 2x + \lim_{\delta x \to 0}(\delta x)$

$= 2x + 0 = 2x$

ବା $\frac{dy}{dx} = 2x$ ବା $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$

ଉଦାହରଣ 21.4

ଡେଲ୍ଟା ପଦ୍ଧତିରେ $x \neq 0$ ନେଇ $\frac{1}{x}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y = \frac{1}{x}$ ... (i)

x ର ମାନରେ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ନେଲେ, y ର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ଅନୁରୂପ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δy ହେଉ ।

$\therefore y + \delta y = \frac{1}{x + \delta x}$ ... (ii)

(ii) ରୁ (i)କୁ ବିୟୋଗ କଲେ ପାଇବା

$$(y + \delta y) - y = \frac{1}{x + \delta x} - \frac{1}{x}$$

ବା $\delta y=\dfrac{x-(x+\delta x)}{(x+\delta x)x}$

$=\dfrac{-\delta x}{x(x+\delta x)}$ ... (iii)

(iii) କୁ δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ପାଇବା

$\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{-1}{x(x+\delta x)}$

$\delta x\to 0$ ସୀମା ନେଇ ପାଇବା

$\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta y}=\lim\limits_{\delta x\to 0}-\dfrac{1}{x(x+\delta x)}$

ବା $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1}{x(x+0)}$ ବା $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$

ଉଦାହରଣ 21.5

ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ $\sqrt{x}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $y=\sqrt{x}$ ... (i)

xର ମାନରେ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ନିଆଯାଉ ଏବଂ yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ଅନୁରୂପ ବୃଦ୍ଧି δy ହେଉ ।

$\therefore y++\delta y=\sqrt{x+\delta x}$ ... (ii)

(ii) ରୁ (i) କୁ ବିୟୋଗ କରିପାଇବା

$(y+\delta y)-y=\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}$

ବା $\delta y=\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}$ ... (iii)

(iii) ର ଡାହାଣ ପାଖର ଲବର ପରିମେୟକରଣ କରିବା ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$\delta y=\dfrac{\sqrt{x+\delta x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}\left(\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}\right)$

$=\dfrac{(x+\delta x)-x}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$ ବା $\delta y=\dfrac{\delta x}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ପାଇବା

$\dfrac{\delta y}{\delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}$

$\delta x\to 0$ ସୀମା ନେଇ ପାଇବା

$\lim\limits_{\delta x\to 0}\dfrac{\delta y}{\delta x}=\lim\limits_{\delta x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sqrt{x+\delta x}+\sqrt{x}}\right]$

ବା $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}$ ବା $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ଉଦାହରଣ 21.6

ଯଦି f(x) ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ, ତେବେ $\phi(x) = cf(x)$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମକୁ ନିମ୍ନ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$$\phi(x) = cf(x) \qquad \text{... (i)}$$

x ମାନରେ ନିଆଯାଇଥିବା ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃଦ୍ଧି δx ଯୋଗୁଁ ଫଳନ $\phi(x)$ର ମାନ $\phi(x+\delta x)$ ଓ f(x)ର ମାନ $f(x+\delta x)$ ହୋଇଛି ବୋଲି ଧରିନିଆଯାଉ ।

$$\therefore\ \phi(x+\delta x) = cf(x+\delta x) \qquad \text{... (ii)}$$

(ii) ରୁ (i)କୁ ବିୟୋଗକଲେ, ପାଇବା

$$\phi(x+\delta x) - \phi(x) = c[f(x+\delta x) - f(x)]$$

δx ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି ପାଇବା

$$\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x} = c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

$x \to 0$ ସୀମାନେଇ ପାଇବା

$$\lim_{\delta x\to 0}\frac{\phi(x+\delta x)-\phi(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0} c\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$$

ବା $\phi'(x) = c\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$ $\phi'(x) = c\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}\right]$

ବା $\phi'(x) = cf'(x)$

ଏହିପରି $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{df}{dx}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.2

1. ଡେଲ୍ଟା ପଦ୍ଧତିରେ ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) 10x (b) 2x+3 (c) $3x^2$

(d) $x^2 + 5x$ (e) $7x^3$

2. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାରକରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\frac{1}{x},\ x \neq 0$ (b) $\frac{1}{ax},\ x \neq 0$ (c) $x + \frac{1}{x},\ x \neq 0$

(d) $\frac{1}{ax+b}, x \neq \frac{-b}{a}$ (e) $\frac{ax+b}{cx+d},\ x \neq \frac{-d}{c}$ (f) $\frac{x+2}{3x+5},\ x \neq \frac{-5}{3}$

3. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\frac{1}{\sqrt{x}},\ x \neq 0$ (b) $\frac{1}{\sqrt{ax+b}},\ x \neq \frac{-b}{a}$ (c) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}},\ x \neq 0$ (d) $\frac{1+x}{1-x},\ x \neq 1$

4. ଡେଲ୍ଟା ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = 3\sqrt{x}$ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f'(2)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (b) $f(r) = \pi r^2$ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f'(2)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) $f(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f'(3)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

21.7 ଅବକଳଜମାନଙ୍କର ବୀଜଗଣିତ

ବହୁତ ଫଳନ ଅନ୍ୟ ଫଳନମାନଙ୍କର ସଂଯୋଗରୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥାଏ । ଏହି ସଂଯୋଗ, ଫଳନମାନଙ୍କର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ବା ଭାଗ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇପାରେ । ଆଉ କେତେକ ପରିସ୍ଥିତି ଆମ ସାମନାକୁ ଆସିପାରେ ଯେଉଁଠି ଗୋଟିଏ ଦତ୍ତ ଫଳନକୁ ଏକ ଫଳନର ଫଳନ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଏହିପରି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଅବକଳଜକୁ ଏକ ସଫଳ ସାଧନୀ (tool) କରିବା ପାଇଁ, ଆମକୁ ଫଳନ ମାନଙ୍କର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ, ଭାଗ ଓ ଫଳନର ଫଳନ ଲାଗି ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ ଲାଗି ନିୟମ ପ୍ରଣୟନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଏହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ଆମକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଓ ବୀଜଗଣିତୀୟ (ପରିମେୟ ସହିତ) ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସହାୟକ ହେବ ।

21.8 ଫଳନମାନଙ୍କର ଯୋଗ ଏବଂ ବିୟୋଗର ନିରୂପଣ

ଯଦି $f(x)$ ଓ $g(x)$ ଉଭୟ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ $h(x) = f(x) + g(x)$ ହୁଏ, ତେବେ $h'(x)$ କେତେ ? ଏଠାରେ, $h(x) = f(x) + g(x)$

ମନେକରାଯାଉ x ର ମାନରେ δx ହେଉଛି ଏକ ବୃଦ୍ଧି ଏବଂ y ର ମାନରେ ଅନୁରୂପ ବୃଦ୍ଧି ହେଉଛି δy ।

$\therefore h(x+\delta x) = f(x+\delta x) + g(x+\delta x)$

ଏଣୁ, $$h'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x) + g(x+\delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{[f(x+\delta x) - f(x)] + [g(x+\delta x) - g(x)]}{\delta x}$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \left[\frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} + \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} + \lim_{\delta x \to 0} \frac{g(x+\delta x) - g(x)}{\delta x}$$

ବା $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦୁଇଟି ଫଳନର ଯୋଗଫଳର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଫଳନଦ୍ୱୟର ଅବକଳଜମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ସହ ସମାନ ।

ଏହାକୁ **ଯୋଗଫଳ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଯେପରି $y = x^2 + x^3$

ତେଣୁ $$y' = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^3) = 2x + 3x^2$$

ଏହିପରି, $y' = 2x + 3x^2$

ଯୋଗ ନିୟମରୁ ବିୟୋଗ ନିୟମ ମଧ୍ୟ ସହଜରେ ମିଳିପାରିବ, କାରଣ

ଯଦି $h(x) = f(x) - g(x)$

ତେବେ, $h(x) = f(x) + [-g(x)]$

$\therefore h'(x) = f'(x) + [-g'(x)]$

$= f'(x) - g'(x)$

ଅର୍ଥାତ୍, ଦୁଇଟି ଫଳନର ବିୟୋଗଫଳର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ଫଳନ ଦ୍ୱୟର ଅବକଳଜ ଦ୍ୱୟର ବିୟୋଗଫଳ ସହ ସମାନ ।

ଏହାକୁ **ବିୟୋଗଫଳ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଏଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ

ଯୋଗ ନିୟମ : $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] + \frac{d}{dx}[g(x)]$

ବିୟୋଗ ନିୟମ : $\frac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] - \frac{d}{dx}[g(x)]$

ଉଦାହରଣ 21.7

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $y = 10t^2 + 20t^3$

(ii) $y = 2x^3 - 3x^2$

(iii) $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$

ସମାଧାନ :

(i) ଆମର ଅଛି : $y = 10t^2 + 20t^3$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = 10(2t) + 20(3t^2) = 20t + 60t^2$$

(ii) $y = 2x^3 - 3x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x$$

(iii) $y = x^3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \qquad x \neq 0$

$$= x^3 + x^{-2} - x^{-1}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 + (-2)x^{-3} - (-1)x^{-2} = 3x^2 - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$$

ଉଦାହରଣ 21.8

ସୂଚିତ ମାନ (ବା ମାନଗୁଡ଼ିକ) ଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $s = 4.9t^2 + 2.4, t = 1, t = 5$ (ii) $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5, x = 1$

ସମାଧାନ :

(i) ଆମର ଅଛି $s = 4.9t^2 + 2.4$

$$\therefore \frac{ds}{dt} = 4.9(2t) = 9.8t$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=1} = 9.8(1) = 9.8$$

$$\left.\frac{ds}{dt}\right]_{t=5} = 9.8(5)\,49$$

(ii) ଆମର ଅଛି $y = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[x^3 + 3x^2 + 4x + 5] = 3x^2 + 6x + 4$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 3(1)^2 + 6(1) + 4 = 13$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.3

1. y' ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେତେବେଳେ :

(a) $y = 12$ (b) $y = 12x$ (c) $y = 12x + 12$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = 20x^9 + 5x$ (b) $f(x) = -50x^4 - 20x^2 + 4$

(c) $f(x) = 4x^3 - 9 - 6x^2$ (d) $f(x) = \frac{5}{9}x^9 + 3x$

(e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - \frac{2}{5}$ (f) $f(x) = \frac{x^8}{8} + \frac{x^4}{4} - 2$

(g) $f(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{2}{3}} - 5^{\frac{-4}{5}} + \frac{3}{x^2}$ (h) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

3. (a) ଯଦି $f(x) = 16x+2$ ହୁଏ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $f'(0), f'(3), f'(8)$

(b) ଯଦି $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 16$ ହୁଏ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $f'(-1), f'(0), f'(1)$

(c) ଯଦି $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3}{7}x^7 + 2x - 5$ ହୁଏ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $f'(-2)$

(d) ଦତ୍ତ $V = \frac{4}{3}\pi r^3, \frac{dV}{dr}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ତା'ପରେ $\left.\frac{dV}{dr}\right]_{r=2}$

ମଡ୍ୟୁଲ-V

ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

21.9 ଫଳନମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜ

ତୁମେମାନେ ପାଟୀଗଣିତର ମୌଳିକ ଚାରି ପ୍ରକ୍ରିୟା, ଯଥା : ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ପରିଚିତ । ଅବକଳନର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିସାରିବା ପରେ, ଆମେମାନେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇଟି ଫଳନର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜ ସଂକ୍ରାନ୍ତରେ ବିଚାର କରିବା ।

$y = (x^2+1)^2$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର

ଏହା ହେଉଛି $y = (x^2+1)\,(x^2+1)$

ମନେକରାଯାଉ ଯେ δx ହେଉଛି x ର ମାନରେ ଏକ ବୃଦ୍ଧି ଏବଂ y ର ମାନରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧିକୁ δy ନିଆଯାଉ । ତେଣୁ

$$y + \delta y = [(x+\delta x)^2 + 1]\,[(x+\delta x)^2 + 1]$$

$$\Rightarrow \delta y = [(x+\delta x)^2 + 1]\,[(x+\delta x)^2 + 1] - (x^2 + 1)\,(x^2 + 1)$$

$$= [(x+\delta x)^2 + 1]\,[(x+\delta x)^2 - x^2] + (x^2 + 1)\,[(x + \delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1)\,(x^2+1)]$$

$$= [(x+\delta x)^2 + 1]\,[(x + \delta x)^2 - x^2] + (x^2 + 1)\,[(x + \delta x)^2 + 1 - (x^2 + 1)]$$

$$= [(x + \delta x)^2 + 1]\,[(x + \delta x)^2 - x^2] + (x^2 + 1)\,[(x + \delta x^2 - x^2)]$$

$$\therefore \frac{\delta y}{\delta x} = [(x+\delta x)^2+1]\left[\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}\right] + (x^2+1)\left[\frac{(x+\delta x)^2 - x^2}{\delta x}\right]$$

$$= [(x+\delta x)^2+1]\cdot\left[\frac{2x\delta x + (\delta x)^2}{\delta x}\right] + (x^2+1)\left[\frac{2x\,\delta x + (\delta x)^2}{\delta x}\right]$$

$$= [(x+\delta x)^2 + 1]\,(2x + \delta x) + (x^2 + 1)\,(2x + \delta x)$$

$$\therefore \lim_{\delta x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x\to 0}[(x+\delta x)^2+1]\cdot[2x+\delta x] + \lim_{\delta x\to 0}(x^2+1)\,(2x+\delta x)$$

ବା $\dfrac{dy}{dx} = (x^2+1)\,(2x) + (x^2+1)(2x)$

$= 4x\,(x^2+1)$

ଆସ ଆମେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବା : $\dfrac{dy}{dx} = (x^2+1)\quad (2x) \quad + (x^2+1) \quad (2x)$

$x^2 + 1$ ର ଅବକଳଜ — $x^2 + 1$ ର ଅବକଳଜ

ବିଚାର କର : $y = x^3 \cdot x^2$

$\dfrac{dy}{dx} = x^3\cdot(2x) + x^2(3x^2)$ ଅଟେ କି ?

ଆସ ପରୀକ୍ଷା କରିବା, $x^3(2x) + x^2(3x^2) = 2x^4 + 3x^4 = 5x^4$

ଆମ ପାଖରେ ଅଛି $y = x^3 \cdot x^2 = x^5$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଯଦି f(x) ଓ g(x) ହେଉଛି x ର ଦୁଇଟି ଫଳନ, ତେବେ ସେ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

= [ପ୍ରଥମ ଫଳନ] [$\frac{d}{dx}$ (ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ)] + [ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ] [$\frac{d}{dx}$ (ପ୍ରଥମ ଫଳନ)]

ଏହାକୁ ଆମେ ପଢୁ, ଦୁଇଟି ଫଳନର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜ

= [ପ୍ରଥମ ଫଳନ] [ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନର ଅବକଳଜ] + [ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ] [ପ୍ରଥମ ଫଳନର ଅବକଳଜ]

ଏହାକୁ **ଗୁଣଫଳ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 21.9

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $y = 5x^6 (7x^2+4x)$

ପଦ୍ଧତି I : ଏଠାରେ y ହେଉଛି ଦୁଇଟି ଫଳନର ଗୁଣଫଳ ।

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (5x^6) \cdot \frac{d}{dx}(7x^2 + 4x) + (7x^2 + 4x)\frac{d}{dx}(5x^6)$$

$= (5x^6)(14x+4) + (7x^2 + 4x)(30x^5)$

$= 70x^7 + 20x^6 + 10x^7 + 120x^6$

$= 280x^7 + 140x^6$

ପଦ୍ଧତି : II : $y = 5x^6 (7x^2 + 4x)$

$= 35x^8 + 20x^7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 35 \times 8x^7 + 20x^6 = 280x^7 + 140x^6$$

ଏଠାରେ ମିଳିଥିବା ଫଳ, ପଦ୍ଧତି Iରୁ ମିଳିଥିବା ଫଳ ସହ ସମାନ । ଏହି ନିୟମକୁ ବିସ୍ତାର କରି ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଫଳନର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଯଦି f(x), g(x) ଏବଂ h(x), xର ତିନୋଟି ଦତ୍ତ ଫଳନ ହୋଇଥାନ୍ତି, ତେବେ

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = f(x)g(x)\frac{d}{dx}h(x) + g(x)h(x)\frac{d}{dx}f(x) + h(x)f(x)\frac{d}{dx}g(x)$$

ଉଦାହରଣ 21.10

[f(x) g(x) h(x)]ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି $f(x) = x$, $g(x) = x-3$ ଏବଂ $h(x) = x^2 + x$

ସମାଧାନ :

ମନେକରାଯାଉ $y = x(x-3)(x^2+x)$

yର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ଡାହାଣ ପାଖରେ ଥିବା ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଫଳନକୁ ଏକତ୍ର ନେଇ ଗୁଣଫଳ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରୁ ଅଥବା ଉପରିସ୍ଥ ମନ୍ତବ୍ୟରେ ଥିବା ଫଳାଫଳକୁ ବ୍ୟବହାର କରିପାରୁ ।

ଅନ୍ୟକଥାରେ, ଆମେ ଲେଖିପାରୁ

$y = [x(x-3)](x^2+x)$

ମନେକରାଯାଉ $u(x) = f(x)\,g(x)$

$= x(x-3)$

$= x^2-3x$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $h(x) = x^2+x$

$\therefore\ y = u(x)\,h(x)$

ଏଣୁ $\dfrac{dy}{dx} = x(x-3)\dfrac{d}{dx}(x^2+x) + (x^2+x)\dfrac{d}{dx}(x^2-3x)$

$= x(x-3)(2x+1) + (x^2+x)(2x-3)$

$= x(x-3)(2x+1) + (x^2+x)(x-3) + x(x^2+x)$

$= [f(x)g(x)]\cdot h'(x) + [g(x)h(x)]\,f'(x) + [h(x)f(x)]g'(x)$

ଏଣୁ $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)] = [f(x)g(x)]\cdot\dfrac{d}{dx}[h(x)]$

$$+[g(x)h(x)]\frac{d}{dx}[f(x)] + h(x)\,f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]$$

ଅନ୍ୟପକ୍ଷ, ଆମେ ଦତ୍ତ ତିନୋଟି ଫଳନର ଗୁଣଫଳର ଅବକଳଜ ପ୍ରତ୍ୟକ୍ଷ ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବୁ ।

$$\frac{dy}{dx} = [x(x-3)]\frac{d}{dx}(x^2+x) + [(x-3)(x^2+x)]\frac{d}{dx}(x) + [(x^2+x)\cdot x]\frac{d}{dx}(x-3)$$

$= x(x-3)(2x+1) + (x-3)(x^2+x)\cdot 1 + (x^2+x)\cdot x\cdot 1$

$= 4x^3 - 6x^2 - 6x$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.4

1. ଗୁଣଫଳ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $f(x) = (3x+1)(2x-7)$ (b) $f(x) = (x+1)(-3x-2)$

(c) $f(x) = (x+1)(-2x-9)$ (d) $y = (x-1)(x-2)$

(e) $y = x^2(2x^2+3x+8)$ (f) $y = (2x+3)(5x^2-7x+1)$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(r) = r(1-r)(\pi r^2+r)$ (b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$

(c) $f(x) = (x^2+2)(x^3-3x^2+4)(x^4-1)$

(d) $f(x) = (3x^2+7)(5x-1)(3x^2+9x+8)$

21.10 ଭାଗ ନିୟମ

ଯୋଗଫଳ, ବିୟୋଗଫଳ ବା ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପକାଶିତ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ତୁମେ ଯଥାକ୍ରମେ ଯୋଗଫଳ ନିୟମ, ବିୟୋଗଫଳ ନିୟମ ଓ ଗୁଣଫଳ ନିୟମ ଶିଖିଛ । ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ ଆଉ ଗୋଟିଏ ପାଦ ଆଗକୁ ଯାଇ ଦୁଇଟି ଫଳନର ଭାଗଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶିତ ଏକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ''ଭାଗଫଳ ନିୟମ'' ଶିଖିବା ।

ମନେକରାଯାଉ $g(x) = \dfrac{1}{r(x)}\ [r(x) \neq 0]$

ଆସ ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତିରେ $g(x)$ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$$g(x) = \frac{1}{r(x)}$$

$$\therefore g'(x) = \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{\dfrac{1}{r(x+\delta x)} - \dfrac{1}{r(x)}}{\delta x}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{r(x) - r(x+\delta x)}{\delta(x)\, r(x)\, r(x+\delta x)}\right]$$

$$= \lim_{\delta x \to 0}\left[\frac{r(x) - r(x+\delta x)}{\delta x}\right] \lim_{\delta x \to 0}\frac{1}{r(x)\cdot r(x+\delta x)}$$

$$= -r'(x)\frac{1}{[r(x)]^2} = -\frac{r'(x)}{[r(x)]^2}$$

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଫଳନ $f(x)$ ଓ $g(x)$ କଥା ବିଚାର କର ଯେପରିକି $\phi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)},\ g(x) \neq 0$

ଆମେ ଲେଖିପାରିବା $\phi(x) = f(x)\cdot\dfrac{1}{g(x)}$

$$\therefore \phi'(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{g(x)}\right]$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x)\left[\frac{-g'(x)}{[g(x)]^2}\right]$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$= \frac{(\text{ହର})\ (\text{ଲବର ଅବକଳଜ}) - (\text{ଲବ})\ (\text{ହରର ଅବକଳଜ})}{(\text{ହର})^2}$$

ଏଣୁ $\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

ଏହାକୁ ଭାଗଫଳ ନିୟମ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 21.11

$f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1},\ x \neq \frac{1}{2},$

ସମାଧାନ :

$$f'(x) = \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(4x+3) - (4x+3)\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)\cdot 4 - (4x+3)\cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{-10}{(2x-1)^2}$$

ଆସ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା :

ମନେକରାଯାଉ $f(x) = \frac{1}{2x-1},\ x \neq \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right] = \frac{(2x-1)\frac{d}{dx}(1) - 1\frac{d}{dx}(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-1)\times 0 - 2}{(2x-1)^2} \quad \left[\because \frac{d}{dx}(1) = 0\right]$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2x-1}\right] = -\frac{2}{(2x-1)^2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.5

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = \dfrac{2}{5x-7}, x \neq \dfrac{7}{5}$ (b) $y = \dfrac{3x-2}{x^2+x-1}$ (c) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2-3}$ (e) $f(x) = \dfrac{x^5-2x}{x^7}$ (f) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

(g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3+4}$

2. $f'(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = \dfrac{x(x^2+3)}{x-2}, \quad [x \neq 2]$

(b) $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}, \quad \begin{bmatrix} x \neq 3, \\ x \neq 4 \end{bmatrix}$

21.11 ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ

ପୂର୍ବରୁ ଆମେ $\sqrt{4x^4+8x^2+1}$ ରୂପକ ଫଳନ ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସିଛୁ । ଏହି ଫଳନକୁ ଦୁଇଟି ଫଳନର ଯୋଗଫଳ, ବିୟୋଗଫଳ, ଗୁଣଫଳ ବା ଭାଗଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ । ଏଣୁ, ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯେଉଁ ସବୁ କୌଶଳ ଆମେ ଶିଖିଛୁ, ସେଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ଏହି ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବୁ ନାହିଁ । ଫଳରେ ଆମକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ନିୟମ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେବ, ଯାହାଦ୍ୱାରା ଏପରି ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବ । ଆସ ଆମେ ଲେଖିବା $y = \sqrt{x^4+8x^2+1}$ ବା $y = \sqrt{t}$ ଯେଉଁଠି $t = x^4 + 8t^2 + 1$ ଅର୍ଥାତ୍ y ହେଉଛି t ର ଏକ ଫଳନ ଏବଂ t ହେଉଛି x ର ଏକ ଫଳନ ।

ଏଣୁ y ହେଉଛି ଏକ ଫଳନର ଫଳନ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଫଳନ ଲାଗି ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ମନେକରାଯାଉ δt ହେଉଛି tର ମାନରେ ଏକ ବୃଦ୍ଧି ଏବଂ δy ହେଉଛି yର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃଦ୍ଧି ।

ତେବେ $\delta y \to 0$ ଯଦି $\delta t \to 0$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta t} \qquad \text{... (i)}$$

ସେହିପରି t ହେଉଛି x ର ଏକ ଫଳନ ।

$\delta t \to 0$ ଯଦି $\delta x \to 0$

$$\therefore \frac{dt}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x} \qquad \text{... (ii)}$$

ଏଠାରେ y ହେଉଛି tର ଏକ ଫଳନ ଓ t ହେଉଛି x ର ଏକ ଫଳନ । ଏଣୁ $\delta y \to 0$ ଯଦି $\delta x \to 0$

(i) ଓ (ii)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta t}\right]\left[\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta t}{\delta x}\right]$$

ଏହିପରି $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

ଏହାକୁ **ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 21.12 ଯଦି $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}, \frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଆମକୁ ଦିଆଯାଇଛି ଯେ $y = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}$

$y = \sqrt{t}$ ଆମେ ଏହାକୁ ଲେଖିପାରିବା ଯେଉଁଠି $t = x^4 + 8x^2 + 1$ ... (i)

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ ଏବଂ $\frac{dt}{dx} = 4x^3 + 16x$

ଏଠାରେ, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot (4x^3 + 16x)$

$= \frac{4x^3 + 16x}{2\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}} = \frac{2x^3 + 8x}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 1}}$ [(i) ର ଫଳାଫଳକୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ଉଦାହରଣ 21.13 $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 7}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ପାଇଛୁ $y = \sqrt[3]{x^2 + 5x - 7}$

$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2 + 5x - 7} = \frac{d}{dx} t^{\frac{1}{3}}$ ଯେଉଁଠି $t = x^2 + 5x - 7$ ... (i)

$= \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{dt}{dx}$ (ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି)

$= \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 5)$

$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x^2 + 5x - 7} = \frac{1}{3}[x^2 + 5x - 7]\frac{2}{3} \cdot (2x + 5)$ [(i) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ଉଦାହରଣ 21.14 ଫଳନ $y = \frac{5}{(x^2 - 3)^7}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{5(x^2 - 3)^{-7}\}$

$= 5[(-7)(x^2 - 3)^{-8} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 3)$ [ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି]

$= -35(x^2-3)^{-8}\cdot(2x)$

$$= \frac{-70x}{(x^2-3)^8}$$

ଉଦାହରଣ 21.15

$\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି $y = \frac{1}{4}v^4$ ଏବଂ $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$

ସମାଧାନ :

ଆମେ ପାଇଛୁ $y = \frac{1}{4}v^4$ ଏବଂ $v = \frac{2}{3}x^3 + 5$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{4}(4v^3) = v^3 = \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 \quad \ldots \text{(i)}$$

ଏବଂ $\frac{dv}{dx} = \frac{2}{3}(3x^2) = 2x^2 \quad \ldots$ (ii)

ଏହିପରି, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$

$= \left(\frac{2}{3}x^3 + 5\right)^3 (2x^2)$ [(i) ଓ (ii)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ମନ୍ତବ୍ୟ :

ଆମେ ପୂର୍ବ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କରେ ଦେଖିଛୁ ଯେ ଅବକଳଜର ନିରୂପଣର ବିଭିନ୍ନ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ବୀଜଗଣିତୀୟ ଫଳନମାନଙ୍କର ଅବକଳଜ ନିରୂପଣ କରିପାରିବା ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.6

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $f(x) = (5x-3)^7$ (b) $f(x) = (3x^2-15)^{35}$

(c) $f(x) = (1-x^2)^{17}$ (d) $f(x) = \frac{(3-x)^5}{7}$

(e) $y = \frac{1}{x^2+3x+1}$ (f) $y = \sqrt[3]{(x^2+1)^5}$

(g) $y = \frac{1}{\sqrt{7-3x^2}}$ (h) $y = \left[\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{16}\right]^5$

(i) $y = (2x^2 + 5x - 3)^{-4}$ (j) $y = x + \sqrt{x^2+8}$

2. $\frac{dy}{dx}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି (a) $y = \frac{3-v}{2+v}$, $v = \frac{4x}{1-x^2}$ (b) $y = at^2$, $t = \frac{x}{2a}$

21.12 ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଫଳନର ଅବକଳଜ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ y ହେଉଛି xର ଏକ ଫଳନ, ମନେକରାଯାଉ f(x) । ଯଦି ଅବକଳଜ $\frac{dy}{dx}$ ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ $\frac{dy}{dx}$ ର ଅବକଳଜକୁ x ସାପେକ୍ଷ $y = f(x)$ ର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ସଙ୍କେତ ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । yର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ଲାଗି ବ୍ୟବହୃତ ଭିନ୍ନ ସଙ୍କେତଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, D^2, f'', y'', y_2 ଇତ୍ୟାଦି ।

ମନ୍ତବ୍ୟ :

ଏହିପରି x ଠାରେ f'' ର ମାନକୁ ନିମ୍ନମତେ ଦିଆଯାଏ :

$$f''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h) - f'(h)}{h}$$

ତୃତୀୟ ଅର୍ଡର, ଚତୁର୍ଥ ଅର୍ଡର ...କୁ ସେହିପରି ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇପାରେ । ଏହିପରି, yର x ସାପେକ୍ଷ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅବକଳଜ ବା ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ହେଉଛି

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ଉଦାହରଣ 21.16

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) x^2 (ii) $x^3 + 1$ (iii) $(x^2+1)(x-1)$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ ଯେ $y = x^2$, ତେବେ $\frac{dy}{dx} = 2x$

ଏବଂ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(2x) = 2\cdot\frac{d(x)}{dx} = 2\cdot 1 = 2$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $y = x^3 + 1$, ତେବେ

$\frac{dy}{dx} = 3x^2$ [ଯୋଗ ନିୟମ ଏବଂ, ଧ୍ରୁବକର ଅବକଳଜ ଶୂନ ଯୋଗୁ]

ଏବଂ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2) = 3\cdot 2x = 6x$

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $y = (x^2+1)(x-1)$, ତେବେ

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+1)\cdot\frac{d}{dx}(x-1) + (x-1)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)$$

$= (x^2+1)\cdot 1 + (x-1)\cdot 2x$ = ବା $\frac{dy}{dx} = x^2+1+2x^2-2x = 3x^2-2x+1$

ଏବଂ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(3x^2-2x+1) = 6x-2$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 6x-2$$

(iv) ମନେକରାଯାଉ $y = \frac{x+1}{x-1}$, ତେବେ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-1)\cdot 1-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

ଏବଂ $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{-2}{(x-1)^2}\right] = -2\cdot -2\cdot\frac{1}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{(x-1)^3}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.7

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) x^3 (b) $x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 10x + 1$

(c) $\frac{x^2+1}{x+1}$ (d) $\sqrt{x^2+1}$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଫଳନ $f(x)$ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ

$$f'(x) = \lim_{\delta x\to 0}\frac{f(x+\delta x)-f(x)}{\delta x}, \delta x > 0$$

- ଏକ ଧ୍ରୁବକର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଶୂନ, ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{dc}{dx} = 0$, ଯେଉଁଠି c ଏକ ଧ୍ରୁବକ
- ନିଉଟନ୍‌ଙ୍କ ଘାତ ନିୟମ

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$$

- ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପରେ, ବିନ୍ଦୁ P (x, y) ଠାରେ, $y = f(x)$ର ଅବକଳଜ $\frac{dy}{dx}$ ହେଉଛି $y = f(x)$ର ବକ୍ର ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ରେଖାର ଆନତି ।
- yର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ ହେଉଛି yର ତାତ୍କ୍ଷାଣିକ x ସାପେକ୍ଷ ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର ।
- ଯଦି f(x) ଏକ ଅବକଳନୀୟ ଫଳନ ଏବଂ c ଏକ ଧ୍ରୁବକ, ତେବେ $\frac{d}{dx}[cf(x)] = cf'(x)$, ଯେଉଁଠି f′(x) ସଙ୍କେତ f(x)ର ଅବକଳଜକୁ ସୂଚାଏ ।
- 'ଫଳନର ଯୋଗଫଳ ବା ବିୟୋଗଫଳ ନିୟମ' :

  $$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

  ଦୁଇଟି ଫଳନର ଯୋଗଫଳ ବା ବିୟୋଗଫଳର ଅବକଳଜ ହେଉଛି ଯଥାକ୍ରମେ ଉକ୍ତ ଫଳନ ଦୁଇଟିର ଅବକଳଜର ଯୋଗଫଳ ବା ବିୟୋଗଫଳ ।
- **ଗୁଣଫଳ ନିୟମ :** $\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\frac{d}{dx}f(x)$

  =(ପ୍ରଥମ ଫଳନ ($\frac{d}{dx}$ ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ)) + (ଦ୍ୱିତୀୟ ଫଳନ) ($\frac{d}{dx}$ପ୍ରଥମ ଫଳନ)
- **ଭାଗଫଳ ନିୟମ :** ଯଦି $\phi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, ତେବେ

  $$\phi'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

  $$= \frac{(\text{ହର})\left(\frac{d}{dx}(\text{ଲବ})\right) - \text{ଲବ}\left(\frac{d}{dx}(\text{ହର})\right)}{(\text{ହର})^2}$$
- **ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ :**

  $$\frac{d}{dx}[f\{g(x)\}] = f'[g(x)]\cdot\frac{d}{dx}[g(x)]$$

  f(x)ର g(x) ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ × g(x)ର x ସାପେକ୍ଷ ଅବକଳଜ
- yର xସାପେକ୍ଷ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ହେଉଛି

  $$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ଟିପ୍ପଣୀ

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଗୋଟିଏ କାର t ସେକେଣ୍ଡ ସମୟରେ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତା s ମିଟରକୁ ସମ୍ବନ୍ଧ $s = t^2$ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି । ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
   (a) ସମୟ t ସାପେକ୍ଷ, ଦୂରତାର ପରିବର୍ତ୍ତନର ହାର । (b) $t = 3$ ସେକେଣ୍ଡ ସମୟରେ କାରର ବେଗ ।

2. ଦତ୍ତ ଅଛି $f(t) = 3 - 4t^2$ ଡେଲ୍ଟା ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି $f'(t)$, $f'\left(\frac{1}{3}\right)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି $f(x) = x^4$ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳରୁ $f'(0)$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

4. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତି ଦ୍ୱାରା ଫଳନ $\sqrt{2x+1}$ ର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ପ୍ରଥମ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ପଦ୍ଧତିଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
   (a) $ax + b$ ଯେଉଁଠି a ଓ b ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଧ୍ରୁବକ । (b) $2x^2 + 5$
   (c) $x^3 + 3x^2 + 5$ (d) $(x-1)^2$

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
   (a) $f(x) = px^4 + qx^2 + 7x - 11$ (b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (d) $f(x) = \frac{x^2 - a}{a-2}, a \neq 2$

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ଦୁଇଟି ପଦ୍ଧତି ବ୍ୟବହାର କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ପ୍ରଥମେ ଗୁଣନ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ଏବଂ ପରେ ଗୁଣନକୁ ବିସ୍ତାର କରି (ଅର୍ଥାତ୍ ସରଳ କରି) । ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେ ଦୁଇଟିଯାକ ଉତ୍ତର ସମାନ ହୋଇଛି ।
   (a) $y = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ (b) $y = x^{\frac{3}{2}}\left(2 + 5x + \frac{1}{x}\right)$

8. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
   (a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ (b) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{10}{x^3}$ (c) $f(x) = \frac{1}{(1+x^4)}$
   (d) $f(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{\sqrt{x}}$ (e) $f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{x}$ (f) $f(x) = \frac{x-4}{2\sqrt{x}}$
   (g) $f(x) = \frac{(x^2+1)(x-2)}{x^2}$

9. ଶୃଙ୍ଖଳ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
   (a) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (c) $\sqrt[3]{x^2(x^2+3)}$

10. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅର୍ଡର ଅବକଳଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :
    (a) $\sqrt{x+1}$ (b) $x\sqrt{x-1}$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.1

1. (a)3 (b) 8 (c) 6 (d) 31
2. 3640 ସେକେଣ୍ଡ ପ୍ରତି ମି. 3.21 ସେକେଣ୍ଡ ପ୍ରତି ମି.

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.2

1. (a) 10 (b) 2 (c) 6x (d) 2x + 5 (e) $21x^2$
2. (a) $-\frac{1}{x^2}$ (b) $-\frac{1}{ax^2}$ (c) $1-\frac{1}{x^2}$ (d) $\frac{-a}{(ax+b)^2}$ (e) $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

   (f) $-\frac{1}{(3x+5)^2}$
3. (a) $-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$ (b) $\frac{-a}{2(ax+b)\left(\sqrt{ax+b}\right)}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)$

   (d) $\frac{2}{(1-x)^2}$
4. (a) $\frac{3}{2\sqrt{x}}; \frac{3}{2\sqrt{2}}$ (b) $2\pi r; 4\pi$ (c) $2\pi r^2; 36\pi$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.3

1. (a) 0 (b) 12 (c) 12
2. (a) $180x^8 + 5$ (b) $-200x^3 - 40x$ (c) $12x^2 - 12x$

   (d) $5x^8 + 3$ (e) $3x^2 - 6x + 3$ (f) $x^7 - x^5 + x^3$

   (g) $\frac{4}{15}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{-9}{5}} - 6x^{-3}$ (h) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$
3. (a) 16, 16, 16 (b) 3, 1, 1

   (c) 186 (d) $4\pi r^2$, 16π

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.4

1. (a) $12x-19$ (b) $-6x - 5$ (c) $4x - 11$

   (d) $2x - 3$ (e) $8x^3 + 9x^2 + 16x$ (f) $30x^2 + 2x - 19$

   (g) $5x^4 - 16x^3 + 15x^2 - 4x + 8$
2. (a) $-4\pi r^3 + 3(\pi-1)r^2 + 2r$

   (b) $3x^2 - 12x + 11$

(c) $9x^8 - 28x^7 + 14x^6 - 12x^5 - 5x^4 + 44x^3 - 6x^2 + 4x$

(d) $(5x-1)(3x^2+9x+8)\cdot 6x + 5(3x^2+7)(3x^2+9x+8) + (3x^2+7)(5x-1)(6x+9)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.5

1. (a) $\frac{-10}{(5x-7)^2}$ (b) $\frac{-3x^2+4x-1}{(x^2+x+1)^2}$ (c) $\frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(d) $\frac{2x^5-12x^3}{(x^2-3)^2}$ (e) $\frac{-2x^4+12}{x^7}$ (f) $\frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$ (g) $\frac{4-5x^3}{2\sqrt{x}(x^3+4)^2}$

2. (a) $\frac{2x^3-6x^2-6}{(x-2)^2}$ (b) $\frac{-4x^2+20x-22}{(x-3)^2(x-4)^2}$

(c) $-34x(1-x^2)^{16}$ (d) $\frac{-5}{7}(3-x)^4$

(e) $-(2x+3)(x^2+3x+1)^{-2}$ (f) $\frac{10x}{3}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}$

(g) $3x(7-3x^2)^{\frac{-3}{2}}$ (h) $5(x^5+2x^3)\left(\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+\frac{1}{16}\right)^4$

(i) $-4(4x+5)(2x^2+5x-3)^{-5}$ (j) $1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}$

2. (a) $\frac{-5(1+x^2)}{(1+2x-x^2)^2}$ (b) $\frac{x}{2a}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.6

1. (a) $35(5x-6)$ (b) $210x(3x^2-15)^{34}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 21.7

1. (a) $6x$ (b) $12x^2 + 18x + 18$ (c) $\frac{4}{(x+1)^3}$ (d) $\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (a) $2t$ (b) 6 ସେକେଣ୍ଡ

2. $-8t, -\frac{8}{3}$ 3. $0, \frac{-1}{2}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

5. (a) a (b) $4x$ (c) $3x^2 + 6x$ (d) $2(x-1)$

6. (a) $4px^3 + 2qx + 7$ (b) $3x^2 - 6x + 5$

(c) $1-\frac{1}{x^2}$ (d) $\frac{2x}{a-2}$

7. (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (b) $3\sqrt{x}+\frac{25}{2}\times\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

8. (a) $\frac{-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$ (b) $\frac{-6}{(x-1)^3}-\frac{30}{x^4}$

(c) $\frac{-4x^3}{(1+x^4)^2}$ (d) $\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x^{3/2}}$

(e) $3+\frac{5}{x^2}$ (f) $\frac{1}{4\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$

(g) $3x^2-2-\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}$

9. (a) $1-\frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1+x}\cdot(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ (c) $\frac{4x^3+6x}{3(x^4+3x^2)^{\frac{2}{3}}}$

10. (a) $\frac{-1}{4(x+1)^{\frac{3}{2}}}$ (b) $\frac{2+x-x^2}{4(x-1)^{\frac{1}{2}}}$