୨୦

ସୀମା ଓ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା

ଫଳନ $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ x = 1 ଠାରେ f(x) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ, କାରଣ x–1 ଫଳନର ହରରେ ଅଛି । ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଭଳି xର ମାନ 1 ନ ନେଇ 1ର ଖୁବ୍ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟା ନିଅ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ $x-1 \neq 0$, ଯେହେତୁ $x \neq 1$ ।

∴ ଆମେ ପାଇବା, $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = x + 1$

$x-1 \neq 0$ ହେତୁ, (x–1) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ସମ୍ଭବ ।

ସାରଣୀ - 1

x	f(x)
0·5	1·5
0·6	1·6
0·7	1·7
0·8	1·8
0·9	1·9
0·9	1·91
:	:
:	:
0·99	1·99
:	:
:	:
0·9999	1·9999

ସାରଣୀ - 2

x	f(x)
1·9	2·9
1·8	2·8
1·7	2·7
1·6	2·6
1·5	2·5
:	:
:	:
1·1	2·1
1·01	2·01
1·001	2·001
:	:
:	:
1·00001	2·00001

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରେ, ତୁମେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ xର ମାନ 1ର ଯେତେ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି, f(x)ର ମାନ ସେତେ 2ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି ।

ଯା' ହେଉ, ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x = 1$ ପାଇଁ f(x) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ । ଏହି ଧାରଣାକୁ ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ, କୁହାଯାଇ ପାରେ ଯେ xର ମାନ 1ର ନିକଟତର ହେବାବେଳେ, f(x)ର ସୀମାନ୍ତମାନ 2 ହୁଏ ।

ଆସ ଆଉ ଗୋଟିଏ ଫଳନ $f(x) = 2x$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା । ଆମେ $x = 1$ ବିନ୍ଦୁ ପାଖରେ, ଅର୍ଥାତ୍ $x = 1$ ବେଳେ ଏହି ଫଳନର ପ୍ରକୃତି ଜାଣିବା ପାଇଁ ଆଗ୍ରହୀ । xର ମାନ 1ର ଯେତେ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ, f(x)ର ମାନ ସେତେ 2ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ଏବଂ $x = 1$ ବେଳେ, f(x)ର ମାନ 2 ହେବ ।

ଏଣୁ ଉପରୋକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ x ର ମାନ 2ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଲେ ଓ $x = 2$ ଠାରେ ଫଳନର ପ୍ରକୃତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ କ'ଣ ଅଧିକ କହିପାରିବା ?

ଏହି ପାଠରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁର ସନ୍ନିକଟରେ ଏବଂ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରେ, ଫଳନର ଆଚରଣ କ'ଣ ଜାଣିବା, ଫଳନଟି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହେଉ ବା ନ' ହେଉ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ଲେଖଚିତ୍ର ଓ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ସୀମା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟାକରିପାରିବ ;
- $x = a$ ଠାରେ, $y = f(x)$ ଫଳନର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ସୀମାକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ଏହାର ବ୍ୟାଖ୍ୟାର କରିପାରିବ ;
- $x = a$ ଠାରେ, $y = f(x)$ର ସୀମାକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ;
- ସୀମା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ କହିପାରିବ ଓ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ ;
- ନିମ୍ନ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକ ସିଦ୍ଧ କରିବା ସହ ସେଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କରିପାରିବ :

(i) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n\dot{a}x^{n-1} (x \neq a)$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ ଏବଂ $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (iv) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(v) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ (vii) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1 + x)}{x} = 1$

- ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଏକ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ଏହାର ଜ୍ୟାମିତିକ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବ ।
- ଏକ ଅନ୍ତରାଳରେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ;
- ଏକ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ଅଥବା ଅନ୍ୟଥା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ;
- ଗୋଟିଏ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟ କହିପାରିବ ଓ ଏହାର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଫଳନର ଧାରଣା
- ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ଦକ୍ଷତା

- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଧାରଣା
- ଘାତଙ୍କୀୟ ଓ ଲଗାରିଦ୍‌ମୀୟ ଫଳନର ଧାରଣା ।

20.1 ଫଳନର ସୀମା

ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଆଲୋଚନାରେ ଆମେ $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିଥିଲେ । ଆମେ ଦେଖିଛୁ ଯେ, xର ମାନ 1ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବାବେଳେ, f(x)ର ମାନ 2ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଲା । ସାଧାରଣ ଭାବରେ x ର ମାନ 'a'ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବାବେଳେ, ଯଦି f(x)ର ମାନ 'L'ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ କହୁ f(x)ର ସୀମାନ୍ତମାନ ହେଉଛି L । ସଙ୍କେତରେ ଆମେ ଲେଖୁ

$$\operatorname{Lim}_{x\to a} f(x)=L$$

ବର୍ତ୍ତମାନ xର ମାନ 0ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବାବେଳେ, ଫଳନ 5x–3ର ସୀମାନ୍ତମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\lim_{x\to 0}(5x-3)$

ଏହି ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ x ଲାଗି ଆମେ 0ର ବାମରୁ ଓ ଏହାର ଡାହାଣରୁ ମାନ ନେଉ ।

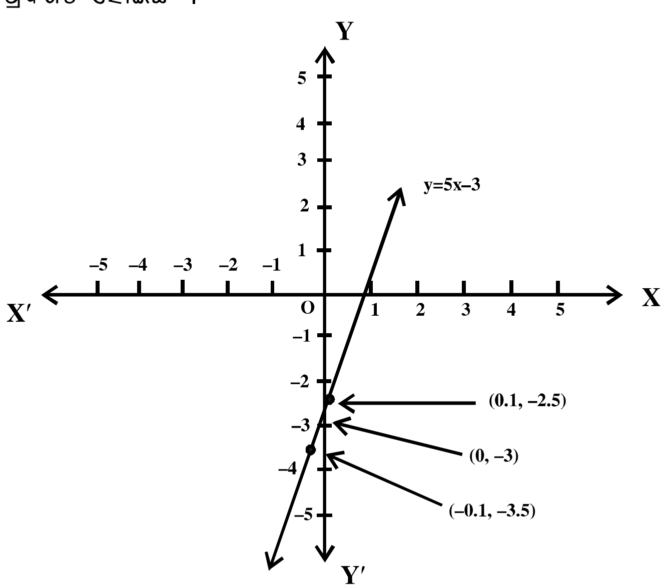
x	–0·1	–0·01	–0·001	–0·0001.........
5x–3	–3·5	–3·05	–3·005	–3·0005.........

x	0·1	0·01	0·001	0·0001.........
5x–3	–2·5	–2·95	–2·995	–2·9995.........

ଉପର ସାରଣୀରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $x \to 3$ କ୍ଷେତ୍ରରେ 5x–3ର ସୀମା ହେଉଛି –3 ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\lim_{x\to 0}(5x-3)=-3$

ନିମ୍ନ ଲେଖଚିତ୍ରରେ ଏହା ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।



ଚିତ୍ର 20.1

କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ, ଚଳରାଶିର ମାନଲାଗି ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ମାନ ନେଇ ଫଳନର ସୀମାନ୍ତମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ସର୍ବଦା ସୁବିଧା ଜନକ ହୁଏ ନାହିଁ ।

ଏଣୁ x (ନିରପେକ୍ଷଚଳ)ର ମାନ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା a ହେବାବେଳେ ଲାଗି କୌଣସି ଫଳନର ସୀମାନ୍ତମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମ ପାଇଁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରଣାଳୀ ଆବଶ୍ୟକ ।

ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ବିଚାର କରିବା : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$$

ସୋପାନ - 1 : ଆମେ x ଲାଗି aର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ମାନ ନେବା । ମନେକର $x = a + h$ ଯେଉଁଠି h ହେଉଛି ଅତ୍ୟନ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $x \to a$ ଯଦି $h \to 0$	$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ ଲାଗି ଆମେ $x = 3 + h$; ଯେପରି $x \to 3$ ଯଦି $h \to 0$
ସୋପାନ - 2 : ସରଳ କର $f(x) = f(a+h)$	ବର୍ତ୍ତମାନ $f(x) = f(3+h)$ $=\frac{(3+h)^2-9}{3+h-3}$ $=\frac{h^2+6h}{h}=h+6$
ସୋପାନ - 3 : $h = 0$ ନିଅ ଏବଂ ଆବଶ୍ୟକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର	$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{h\to 0}(6+h)$ $x \to 0$ ହେତୁ $h \to 0$ ଫଳରେ, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6+0=6$ $h = 0$ ନେଇ

ଟୀକା : ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ f(3) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନ ହେଲେ ମଧ୍ୟ, ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ $x \to 3$ ଲାଗି ଫଳନର ସୀମ ହେଉଛି 6 । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଫଳନ ଲାଗି ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କର : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^2-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$

ଏଠାରେ $x \neq 1$ ଲାଗି $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}$

f(x) ଯଦି $\frac{g(x)}{h(x)}$ ଆକୃତିର ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଗୁଣନୀୟକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସମାଧାନ କରିପାରୁ ।

ଏଭଳି କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣ କରୁ ।

ସୋପାନ - 1 : g(x) ଓ h(x)ଉଭୟକୁ ଗୁଣନୀୟକର ପ୍ରକାଶ କରିବା	ସମାଧାନ : $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ $=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)}$ $(\because x\neq 1, \therefore x-1\neq 0)$ । ଫଳରେ ଏହା କଟିଯିବ ।
ସୋପାନ - 2 : f(x)କୁ ସରଳ କର	$\therefore f(x)=\frac{x^2+x+1}{x+1}$
ସୋପାନ - 3 : xର ମାନ ସଂସ୍ଥାପନ କରି ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ	$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1+1+1}{x+1}=\frac{3}{2}$ f(1) = 1 (ଦତ୍ତ) ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ, $x = a$ ଠାରେ ଫଳନଟିର ମାନ ଯାହା, $x \to a$ କ୍ଷେତ୍ରରେ f(x)ର ସୀମା ତାହାଠାରୁ ଭିନ୍ନ ହୋଇପାରେ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ନେବା ଯାହା ସଂସ୍ଥାପନ ଅଥବା ଗୁଣନୀୟକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସମାଧାନ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$

ଏଠାରେ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ସମାଧାନ କରିଥାଉ :

ପାଦ - 1 : ବର୍ଗମୂଳ ଥିବା ପଦର ପରିମେୟକରଣ କର ।

ପାଦ - 2 : ସରଳ କର ।

ପାଦ - 3 : xର ମାନ ବସାଇ ଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{(1+x)^2}-\sqrt{(1-x)^2}}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{1+x-1+x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$ [$\because x \neq 0$ ଏହାକୁ କାଟି ଦିଆଯାଇପାରେ]

$$\therefore \lim_{x\to 0} = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}$$

$$= \frac{2}{1+1} = 1$$

20.2 ବାମ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାଖ ସୀମା

ତୁମେ ଦେଖିଛ ଯେ $x \to a$ର ଅର୍ଥ ହେଲା x ଲାଗି 'a'ର ଖୁବ୍ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ମାନ ନିଆଯାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ ଯେଉଁ ମାନ ନିଆଯାଏ, ତାହା ହୁଏତ 'a' ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଅଥବା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ।

ଆମେ ଯଦି x ଲାଗି 'a' ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏବଂ ଏହାର ଖୁବ୍ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ମାନ ନେଉ, ତେବେ ଆମେ କହୁ, x ବାମପାଖରୁ 'a'ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ ଏବଂ ଆମେ ଲେଖୁ $x \to a^-$ । ସେହିପରି xର ମାନ ଯଦି 'a' ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ଓ ଏହାର ଖୁବ୍ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ କହୁ, x ଡାହାଣପାଖରୁ 'a'ର ନିକଟତର ହୁଏ ଏବଂ ଆମେ ଲେଖୁ $x \to a^+$ ।

ଏହିପରି, ଯଦି x ବାମପାଖରୁ 'a'ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବା ଦ୍ୱାରା ଏକ ଫଳନ f(x) ଏକ ସୀମା l_1ର ନିକଟତର ହୁଏ, ଆମେ କହୁ ଯେ f(x)ର ବାମପାଖ ସୀମା ହେଉଛି l_1 ଯେତେବେଳେ $x \to a$ ।

ଆମେ ଏହାକୁ ସଙ୍କେତରେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରୁ ।

$\lim_{x\to a^-} f(x) = l_1$ ବା $\lim_{h\to 0} f(a-h) = l_1, h > 0$

ସେହିପରି, ଯଦି x ଡାହାଣପାଖରୁ 'a'ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବାଦ୍ୱାରା ଯଦି f(x) ଏକ ସୀମା l_2ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ କହୁ f(x)ର ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା ହେଉଛି l_2 ଯେତେବେଳେ $x \to a$ ।

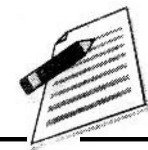
ଏହାକୁ ଆମେ ସଙ୍କେତରେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରୁ ।

$\lim_{x\to a^+} f(x) = l_2$ ବା $\lim_{h\to 0} f(a+h) = l_2, h > 0$

କାର୍ଯ୍ୟକାରୀ ନିୟମ :

ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା	ବାମପାଖ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା
$\lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a^-} f(x)$
$x = a + h$ ନିଅ	$x = a - h$ ନିଅ
$\lim_{h\to 0} f(a+h)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।	$\lim_{h\to 0} f(a-h)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଟୀକା : ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ, hର ମାନ ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥାଏ ।



20.3 x=a ଠାରେ ଫଳନ y=f(x)ର ସୀମା :

ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ବିଚାର କରିବା :

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି $f(x) = x^2 + 5x + 3$

ଏଠାରେ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}[(1+h)^2 + 5(1+h) + 3]$

$= \lim\limits_{h\to 0}[1 + 2h + h^2 + 5 + 5h + 3]$

$= 1 + 5 + 3 = 9$ ... (i)

ଏବଂ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}[(1-h)^2 + 5(1-h) + 3]$

$= \lim\limits_{h\to 0}[1 - 2h + h^2 + 5 - 5h + 3]$

$= 1 + 5 + 3 = 9$ ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ ମିଳିଲା $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ଆଉ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ଆଲୋଚନା କରିବା :

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|x-3|}{x-3}$

ଏଠାରେ $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{|(3+h)-3|}{(3+h)-3}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{h}$ ($\because h > 0$, ଏଣୁ $|h| = h$)

$= 1$ ...(iii)

ଏବଂ $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{|(3-h)-3|}{(3-h)-3}$

$= \lim\limits_{h\to 0}\frac{|-h|}{-h}$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{h}{-h}$ [$\because h > 0$, ଏଣୁ $|-h| = h$]

$= -1$ ... (iv)

(iii) ଓ (iv)ରୁ ପାଇଲେ, $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{|x-3|}{x-3} \neq \lim\limits_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3}$

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ

ପ୍ରଥମ ଉଦାହରଣରେ, ବାମପାଖ ସୀମା = ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା

ମାତ୍ର ଦ୍ୱିତୀୟ ଉଦାହରଣରେ, ବାମପାଖ ସୀମା ≠ ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା । ଏଣୁ ବାମପାଖ ସୀମା ଓ ଡାହାଣପାଖ ସୀମା ସର୍ବଦା ସମାନ ନ ହୋଇପାରେ ।

ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିପାରୁ ଯେ $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+5x+3)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି (ଏହା ହେଉଛି 9) ଏବଂ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

ଟୀକା :

I. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=l \\ \text{ଏବଂ } \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=l$

II. $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\,l=l_1 \\ \text{ଏବଂ } \lim\limits_{x\to a^-} f(x)=l_2\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

III. $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ବା $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

20.4 ସୀମା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ

1. $\lim\limits_{x\to a} cx = c\lim\limits_{x\to a} x$, ଯେଉଁଠି c ଏକ ଧ୍ରୁବକ । ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ, $f(x)=5x$ ଫଳନର ବିଚାର କର ।

   ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ $\lim\limits_{x\to 0} 5x$ ରେ, 5 ଏକ ଧ୍ରୁବକ ହୋଇଥିବାରୁ, ସୀମା ଏହାଦ୍ୱାରା ପ୍ରଭାବିତ ହୁଏ ନାହିଁ ।

   $\lim\limits_{x\to 2} 5x = 5\lim\limits_{x\to 2} x = 5\times 2 = 10$

2. $\lim\limits_{x\to a}[g(x)+h(x)+p(x)+\ldots] = \lim\limits_{x\to a} g(x)+\lim\limits_{x\to a} h(x)+\lim\limits_{x\to a} p(x)+\ldots$

   ଯେଉଁଠି g(x), h(x), p(x) ଆଦି ଯେକୌଣସି ଫଳନ ।

3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

   ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ $f(x)=5x^2+2x+3$ ଏବଂ $g(x)=x+2$ ଫଳନକୁ ବିଚାର କର ।

   ତେବେ, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(5x^2+2x+3)$

   $= 5\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 2\lim\limits_{x\to 0} x + 3 = 3$

   $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x+2) = \lim\limits_{x\to 0} x + 2 = 2$

$\lim\limits_{x\to 0}(5x^2+2x+3)\lim\limits_{x\to 0}(x+2)=6$ ... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)(x+2)]$

$=\lim\limits_{x\to 0}(5x^3+12x^2+7x+6)$

$=5\lim\limits_{x\to 0}x^3+12\lim\limits_{x\to 0}x^2+7\lim\limits_{x\to 0}x+6$

$=6$ ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ ପାଇଲେ,

$\lim\limits_{x\to 0}[(5x^2+2x+3)(x+2)]=\lim\limits_{x\to 0}(5x^2+2x+3)\lim\limits_{x\to 0}(x+2)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\right\}$ ଯଦି $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$

ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ ପାଇଁ, $f(x)=\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

ଆମେ ଜାଣୁ : $\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x+6)=(-1)^2+5(-1)+6$

$=1-5+6$

$=2$

ଏବଂ $\lim\limits_{x\to -1}(x+2)=-1+2$

$=1$

$\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x-6)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}=\dfrac{2}{1}=2$ ... (i)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+3)(x+2)}{x+2}$

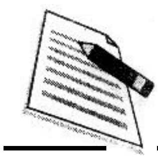
$$\left[\begin{array}{c}\because x^2+5x+6\\ =x^2+3x+2x+6\\ =x(x+3)+2(x+3)\\ =(x+3)(x+2)\end{array}\right]$$

$=\lim\limits_{x\to -1}(x+3)$

$=-1+3=2$ ... (ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ ପାଇଲେ

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+6}{x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x+6)}{\lim\limits_{x\to -1}(x+2)}$



ଆମେ ଉପରେ ଦେଖିଲେ ଯେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରେ ଦୁଇଟି ଫଳନକୁ ଏକତ୍ର କରାଯାଇ ଗୋଟିଏ ଫଳନରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରେ । ଦତ୍ତ ଫଳନମାନଙ୍କର ସୀମାରୁ $x \to a$ ନେଇ ସମ୍ମିଳିତ ଫଳନର ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ । ଶେଷରେ କୁହାଯାଇପାରେ ଯେ ନିମ୍ନରେ ସୀମା ସମ୍ପର୍କୀୟ କେତେକ ମୌଳିକ ତଥ୍ୟ ଦିଆଯାଇଛି ଯାହାର ବ୍ୟବହାର କରି ସରଳ ପ୍ରକ୍ରିୟାମାନଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ସମ୍ମିଳିତ ହୋଇଥିବା ଫଳନମାନଙ୍କର ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x) = l$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x) = m$, ତେବେ

(i) $\lim_{x\to a} kf(x) = k\lim_{x\to a} f(x) = kl$ ଯେଉଁଠି k ଏକ ଧ୍ରୁବକ ।

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l \pm m$

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x) = l\cdot m$

(iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{m}$ ଯଦି $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ଦୁଇରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଫଳନ ଲାଗି ମଧ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ 20.1 :

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେଉଁଠି $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

ସମାଧାନ :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= x + 1 \qquad [\because x \neq 1]$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+1)$$

$$= 1 + 1 = 2$$

ଟୀକା : $\frac{x^2-1}{x-1} x = 1\ \frac{x^2-1}{x-1}$ ଫଳନ, $x = 1$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

$\lim_{x\to 1} f(x)$ ର ମାନ, $x = 1$ ଠାରେ $f(x)$ ର ମାନ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 20.2 :

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{(x-2)}$

ସମାଧାନ : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$

$=\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x+4) \qquad [\because x\neq 2]$

$= 2^2+2\times 2+4=12$

ଉଦାହରଣ 20. 3

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-}x-1}{2-x}$

ସମାଧାନ : ଲବର ପରିମେୟ କରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\frac{\sqrt{3-x-1}}{2-x}\times\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{3-x}+1}$$

$$=\frac{3-x-1}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}=\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{3-x}-1}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{(2-x)\left(\sqrt{3-x}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\left(\sqrt{3-x}+1\right)}\ (\because x\neq 2)$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{3-2}+1\right)}$$

$$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

ଉଦାହରଣ 20.4

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3}$

ସମାଧାନ : ଉଭୟ ହର ଏବଂ ଲବର ପରିମେୟ କରଣ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{12-x}-x}{\sqrt{6+x}-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{12-x}-x\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)\cdot\left(\sqrt{6+x}+3\right)}{\left(\sqrt{6+x}-3\right)\left(\sqrt{6+x}+3\right)\left(\sqrt{12-x}+x\right)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{(12-x-x^2)}{6+x-9}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{-(x+4)(x-3)}{(x-3)}\cdot\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{6+x}+3}{\sqrt{12-x}+x}\;[\because x\neq 3]$$

$$= -(3+4)\cdot\frac{6}{6} = -7$$

ଟୀକା : ଯେତେବେଳେ ଏକ ଫଳନର ଲବ ଓ ହର ଉଭୟ ଶୂନ ହୁଏ, ତୁମେ ତାକୁ ଏପରି ଭାବରେ ସରଳ କରିବ, ଯେପରି ଉତ୍ପନ୍ନ ଫଳରେ ହର ଶୂନ ହେବ ନାହିଁ । ତେବେ ଯାହା ହେଉ, ଯେତେବେଳେ ହରର ସୀମା 0 ହୁଏ ଏବଂ ଲବର ସୀମା ଅଣଶୂନ୍ୟ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଫଳନର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନ ଥାଏ ।

ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କର :

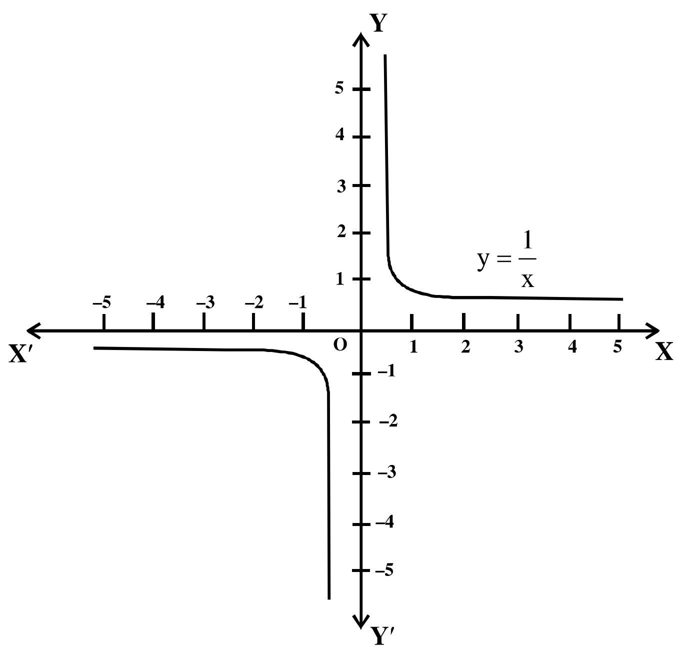
ଉଦାହରଣ 20.5 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ର ଯଦି ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ତେବେ ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ x ଲାଗି ଏପରି ମାନ ନେବା ଯେପରିକି ତାହା ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରୁ 0ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ଏବଂ xର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ଲାଗି $\frac{1}{x}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଓ ଏହାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖିବା ।

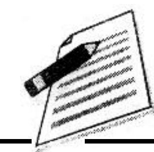
x	−0·1	−·01	−·001	−·0001
$\frac{1}{x}$	−10	−100	−1000	−10000

x	0·1	·01	0·001	0·0001
$\frac{1}{x}$	10	100	1000	10,000

ଆମେ ଦେଖିଲେ, $x\to 0$ ବେଳେ, $\frac{1}{x}$ ର ମାନ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉନାହିଁ । ଏଣୁ $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ । ଏହା ଲେଖଚିତ୍ର 20.2 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।



ଚିତ୍ର 20.2



ଉଦାହରଣ 20.6

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim_{x\to 0}(|x|+|-x|)$

ସମାଧାନ :

$x \geq 0$ ଏବଂ $x < 0$ ପାଇଁ $|x|$ର ଭିନ୍ନ ମାନ ଥିବାରୁ ଆମକୁ ବାମ ତଥା ଡାହାଣ ଉଭୟ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$\lim_{x\to 0^-}(|x|+|-x|) = \lim_{x\to 0}(|-h|+|-(0-h)|)$

$= \lim_{h\to 0}(|-h|+|-(-h)|)$

$= \lim_{h\to 0} h + h = \lim_{h\to 0} 2h = 0$ ... (i)

ଏବଂ $\lim_{x\to 0^+}(|x|+|-x|) = \lim_{h\to 0}(|0+h|+|-(0+h)|)$

$= \lim_{x\to 0} h + h = \lim_{h\to 0} 2h = 0$ ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ ପାଇଲେ,

$\lim_{x\to 0^-}(|x|+|-x|) = \lim[|x|+|-x|]$

ଏଣୁ $\lim_{h\to 0}[|x|+|-x|] = 0$

ଟୀକା : ଆମେ ମନେରଖିବା, ଯେତେବେଳେ (a) ଆଲୋଚନା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଫଳନ, ମଡୁଲସ୍ (ପରମମାନ) ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ (b) ଫଳନକୁ ଏକାଧିକ ନିୟମଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥାଏ, ସେତେବେଳେ ବାମ ଓ ଡାହାଣ ସୀମା ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 20.7

'a'ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି, $\lim_{x\to 1} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଯେଉଁଠି $f(x)\begin{cases} 3x+5, & x \leq 1 \\ 2x+a, & x > 1 \end{cases}$

ସମାଧାନ :

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(3x+5)$ [$\because$ f(x) = 3x + 5, x ≤ 1 ପାଇଁ]

$= \lim_{h\to 0}[3(1-h)+5]$

$= 3 + 5 = 8$ ... (i)

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x+a)$ [$\because$ f(x) = 2x+a, x>1 ପାଇଁ]

$= \lim(2(1+h)+1)$

$= 2 + a$ ... (ii)

ଆମେ ଜାଣିଛୁ ଯେ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ଯଦି

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^{+1}} f(x)$

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ ପାଇଲେ

$2 + a = 8$

ବା $a = 6$

ଉଦାହରଣ 20.8

ଯଦି ଫଳନ f(x) ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୁଏ,

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ପରୀକ୍ଷା କର

ସମାଧାନ :

$$\text{ଏଠାରେ } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{1}{2} & \ldots(i) \\ 0, & x = \frac{1}{2} \\ x-1, & \frac{1}{2} < x \le 1 & \ldots(ii) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} - h\right)$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{2} - h\right) [\because \frac{1}{2} - h < \frac{1}{2} \text{ ଏବଂ (i) ରୁ } f\left(\frac{1}{2} - h\right) = \frac{1}{2} - h]$$

$$= \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \qquad \ldots (iii)$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{1}{2} + h\right)$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[\left(\frac{1}{2} + h\right) - 1\right] [\because \frac{1}{2} + h > \frac{1}{2} \text{ ଏବଂ (ii)ରୁ } f\left(\frac{1}{2} + h\right) = \left(\frac{1}{2} + h\right) - 1]$$

$$= \frac{1}{2} + -1 = -\frac{1}{2} \qquad \ldots (iv)$$

(iii) ଓ (iv) ରୁ ପାଇଲେ, ବାମ ପାଖ ସୀମା $\neq$ ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା

$\therefore \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୀମା ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 2}[2(x+3)+7]$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+3x+7)$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}[(x+3)^2-16]$

(d) $\lim\limits_{x\to -1}[(x+1)^2+2]$ (e) $\lim\limits_{x\to 0}[(2x+1)^3-5]$ (f) $\lim\limits_{x\to 1} 3x+1\ (x+1)$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2}{x+1}$ (c) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x+5}{x-10}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{px+q}{ax+b}$ (e) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ (f) $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-25}{x+5}$

(g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$ (h) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{3x-1}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+7x}{x^2+2x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{6}}{x-3}$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-x}{2-\sqrt{6-x}}$

5. (a) ଯଦି $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ତେବେ ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ଯଦି $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}$, ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ତେବେ ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସୀମାଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5-|x|}$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x+2|}$ (c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{|x-2|}$

(d) ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x-5|}{x-5}$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

7. (a) ନିମ୍ନ ଫଳନର ବାମପାଖ ସୀମା ଓ ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$f(x)=\begin{cases}-2x+3, & x\le 1\\ 3x-5, & x>1\end{cases}$$ ଯଦି $x\to 1$

(b) ଯଦି $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ 1, & x>1\end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(c) ଯଦି ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ତେବେ $\lim\limits_{x\to 4}f(x)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x<4\\ 3x+7, & x\ge 4\end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥିଲେ 'a'ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେଉଁଠି $f(x)=\begin{cases}ax+5, & x<2\\ x-1, & x\ge 2\end{cases}$

9. ମନେକରାଯାଉ $f(x)=\begin{cases}x, & x<1\\ 1, & x=1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କର ।

10. ଯଦି $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଥାଏ, ତେବେ ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଯେଉଁଠି $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<2\\ 1, & x=2\\ x+1, & x>2\end{cases}$

20.5 କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଫଳନର ସୀମା ନିରୂପଣ

(i) n ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

ପ୍ରମାଣ :

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left(a^n+na^{n-1}h+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2+\ldots+h^n\right)-a^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h+\ldots+h^{n-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \ldots h^{n-1}\right]$$

$$= na^{n-1} + 0 + 0 + \ldots + 0$$

$$= na^{n-1}$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{x^n - a^n}{x-a} = n\cdot a^{n-1}$$

ଟୀକା : ଏହି ଫଳାଫଳ nର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ଲାଗି ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (a) $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ (b) $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$

ପ୍ରମାଣ : ଗୋଟିଏ ଏକକ ବୃତ୍ତ କଥା ବିଚାର କର ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ର B, ଯେଉଁଥିରେ $\angle C$ ଏକ ସମକୋଣ ଏବଂ $\angle ABC = x$ ର ରେଡିୟାନ୍ । ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin x = AC$ ଏବଂ $\cos x = BC$ । xର ମାନ କମିବା ସହ, A ବିନ୍ଦୁଟି C ବିନ୍ଦୁର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍, ଯେତେବେଳେ $x \to 0, A \to C$

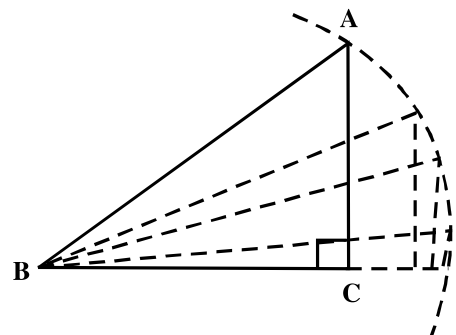
କିମ୍ବା, ଯେତେବେଳେ $x \to 0, AC \to 0$ ତଥା $BC \to AB$ ଅର୍ଥାତ୍

$BC \to 1$ ଯେତେବେଳେ, $x \to 0$ $\sin x \to 0$

ଏବଂ $\lim_{x\to 0}\cos x \to 1$

ଏଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ

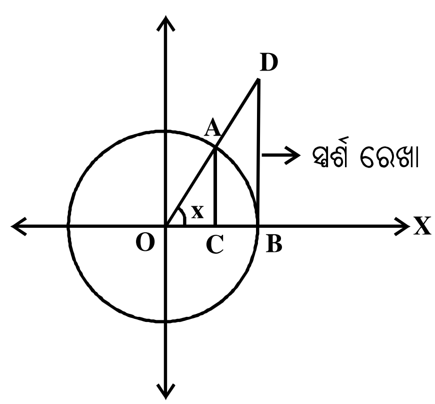
$\lim_{x\to 0}\sin x = 0$ ଏବଂ $\cos x = 1$



ଚିତ୍ର 20.3

(iii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

ପ୍ରମାଣ : ମୂଳବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଏକ ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ବୃତ୍ତ ଉପରେ B(1, 0) ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । ବୃତ୍ତ ଉପରେ A ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । AC ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $AC \perp OX$ । ମନେକରାଯାଉ $\angle AOX = x$ ରେଡିୟାନ୍, ଯେଉଁଠି $0 < x < \frac{\pi}{2}$ । B ବିନ୍ଦୁଠାରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହା ବର୍ଦ୍ଧିତ OAକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । BD ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $BD \perp OX$ । ΔAOCର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ < ବୃତ୍ତକଳା OBA ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ < ΔOBDର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ



ଚିତ୍ର 20.4

ବା $\frac{1}{2}OC \times AC < \frac{1}{2}x(1)^2 < \frac{1}{2}OB \times BD$

[$\because$ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= \frac{1}{2}$ ଭୂମି × ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ବୃତ୍ତକଳାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ$= \frac{1}{2}\theta r^2$]

$$\therefore \frac{1}{2}\cos x \sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \tan x$$

$$\because \left[\cos x = \frac{OC}{OA}, \sin x = \frac{AC}{OA} \text{ ଓ } \tan x = \frac{BD}{OB}, OA = 1 = OB\right]$$

ଅର୍ଥାତ୍ $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$ [ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ $\frac{1}{2}\sin x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଦ୍ୱାରା]

ବା $\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

ବା $\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

ଅର୍ଥାତ୍ $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$

$x \to 0$ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ, ପାଇବା

$$\lim_{x\to 0}\cos x < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$$

ବା $1 < \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} < 1$ $\left[\because \lim_{x\to 0}\cos x = 1 \text{ ଏବଂ } \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1\right]$

ଏହିପରି, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

ଟୀକା : ଏହି ଫଳାଫଳରେ x କୁ ରେଡିୟାନ୍‌ରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯିବ, ଏକଥା ମନେରଖିବା ଉଚିତ ।

(iv) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

ପ୍ରମାଣ : ଯେତେବେଳେ $|x| < 1$, ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ପାଇବା

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left[1 + \frac{1}{x}\cdot x + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{x}-2\right)}{3!}x^3 + \ldots\infty\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{1-x}{2!} + \frac{(1-x)(1-2x)}{3!} + \ldots\infty\right]$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left[1 + 1 + \frac{1-x}{2!} + \frac{(1-x)(1-2x)}{8!} + \ldots\infty\right]$$

$$= \left[1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\infty\right]$$

$= e$ (ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ)

ଏହିପରି, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

(v) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$= \log e$ $\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \text{ ବ୍ୟବହାର କରି}\right]$

$= 1$

(vi) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

ପ୍ରମାଣ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $e^x = \left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right)$

$\therefore e^x - 1 = \left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\ldots-1\right)$

$= \left(x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots\right)$

$\therefore \dfrac{e^x-1}{x} = \left(\dfrac{x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$ (ଉଭୟ ପକ୍ଷକୁ x ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି)

$= \dfrac{x\left(1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\ldots\right)}{x}$

$= \left[1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^2}{3!}+\ldots\ldots\right]$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{x}{2!}+\dfrac{x^2}{3!}+\ldots\right)$

$= 1 + 0 + 0 + \ldots 2\,! = 1$

ଏହିପରି, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$

ଉଦାହରଣ 20.9

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ ... (i)

$\therefore$ (i) ରେ $x=-x$ ବସାଇଲେ, ପାଇବା

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}=1$ ... (ii)

ଦତ୍ତ ସୀମାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$ [(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗ କରି]

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{1-e^{-x}}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}$$

$=1+1$

$=2$ [(i) ଓ (ii) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

ଏହିପରି, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}=2$

ଉଦାହରଣ 20.10

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-e}{x-1}$

ସମାଧାନ : $x=1+h$ ନିଅ, ଯେଉଁଠି $h\to0$

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=\lim_{h\to0}\frac{e^{1+h}-e}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e^1\cdot e^h-e}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{e(e^h-1)}{h}$$

$$=e\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=e\times1=e$$

ଏହିପରି, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x - e}{x-1} = e$

ଉଦାହରଣ 20.11

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$

ସମାଧାନ :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3$ [3 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଓ ଭାଗକରି]

$= 3\lim\limits_{3x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}$

$= 3 \times 1$ $\left[\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1\right]$

$= 3$

ଏହିପରି, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x} = 3$

ଉଦାହରଣ 20.12

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$

ସମାଧାନ :

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2x^2}$ $\left[\begin{array}{c}\because \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x\\ \therefore 1-\cos 2x = 2\sin^2 x\\ 1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}\end{array}\right]$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\times\frac{x}{2}}\right)^2$ [ହରକୁ 2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି ଓ 2 ଦ୍ୱାରା ଭାଗକରି]

$= \dfrac{1}{4}\lim\limits_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\times 1 = \dfrac{1}{4}$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2} = \dfrac{1}{4}$

ଉଦାହରଣ 20.13 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta}$

ସମାଧାନ : $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos 4\theta}{1-\cos 6\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{2\sin^2 2\theta}{2\sin^2 3\theta}$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\times 2\theta\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3\theta}\right)^2\right)$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2\frac{4\theta^2}{9\theta^2}$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)\lim_{2\theta\to 0}\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\lim_{3\theta\to 0}\left(\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\right)^2 = \frac{4}{9}\times 1\times 1 = \frac{4}{9}$$

ଉଦାହରଣ 20.14

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2}$

ସମାଧାନ : $x = \frac{\pi}{2}+h$ ନିଅ, ଯେଉଁଠି $x\to\frac{\pi}{2}, h\to 0$

$\therefore\ 2x = \pi + 2h$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{1+\cos 2\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{[\pi-(\pi+2h)]^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1+\cos(\pi+2h)}{4h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos 2h}{4h^2}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2 h}{4h^2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{(\pi-2x)^2} = \frac{1}{2}$$

ଉଦାହରଣ 20.15

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\tan bx}$

ସମାଧାନ :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\sin ax}{ax} \times a}{\dfrac{\tan bx}{bx} \times b}$$

$$= \frac{a}{b} \frac{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{ax}}{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan bx}{bx}}$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.2

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{-x} - e^{-1}}{x - 1}$ (b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e - e^{x}}{x - 1}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{2x}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{5x^2}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x^2}{x}$ (d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ (b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 8x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x(1 - \cos 2x)}{x^3}$

(d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 2x}{3\tan^2 x}$

5. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3\cot x}{1-\cos x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec} x-\cot x}{x}$

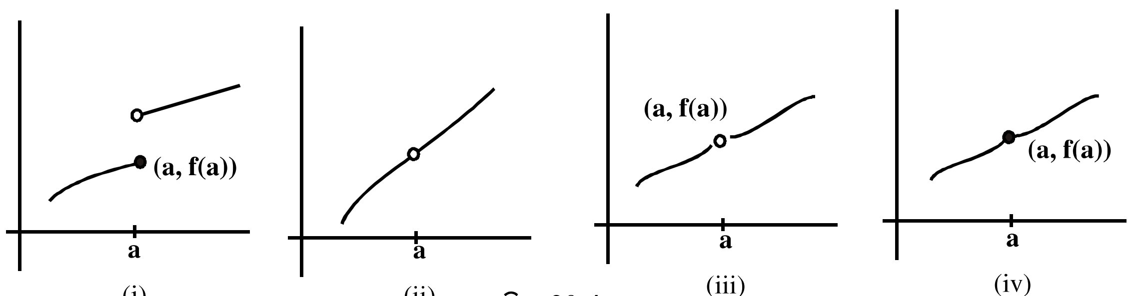
6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\pi - x}$ (b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 3x}$ (b) $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{\tan 7\theta}{\sin 4\theta}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\tan 3x}{4x-\tan 5x}$

20.5 ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଏକ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା



ଚିତ୍ର 20.4

ଉପରେ ଥିବା ଏକ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଆସ ।

ଆମେ (iv) ନମ୍ବର ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ଅଙ୍କନ କଲାବେଳେ ପେନ୍‌ସିଲ୍‌କୁ ଉଠାଇବାକୁ ପଡିବ ନାହିଁ । ମାତ୍ର ଲେଖଚିତ୍ର (i), (ii) ଓ (iii) ଅଙ୍କନ କଲାବେଳେ, ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ ପେନସିଲ୍‌କୁ ଉଠାଇବାକୁ ପଡିବ ।

ଲେଖଚିତ୍ର (iv) କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଆମେ କହୁ $x = a$ ଠାରେ ଫଳନଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ । ଅନ୍ୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x = a$ ଠାରେ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ । ଅର୍ଥାତ୍ $x = a$ ଠାରେ, ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(i) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $x = a$ ଠାରେ ଫଳନର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

(ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $x = a$ ଠାରେ ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି, ମାତ୍ର ଫଳନଟି ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

(iii) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $x = a$ ଠାରେ ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି, ମାତ୍ର ଏହା $x = a$ ଠାରେ ଫଳନର ଯେଉଁମାନ ଅଛି ତାହା ସମାନ ନୁହେଁ ।

(iv) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $x = a$ ଠାରେ ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଏବଂ ଏହା x ଠାରେ ଫଳନର ଯେଉଁମାନ ଅଛି ତାହା ସହ ସମାନ ।

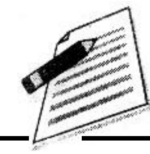
ଉଦାହରଣ 20.16 $x = a$ ଠାରେ ଫଳନ $f(x) = x - a$ ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$

$=\lim\limits_{h\to 0}[(a+h)-a]$

$= 0$ ... (i)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(a) = a - a = 0$ ... (ii)



(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇଲେ, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

ଏହିପରି x = a ଠାରେ f(x) ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଉଦାହରଣ 20.17 ଦର୍ଶାଅ ଯେ f(x) = c ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ 'c' ର ପରିସର R । 'a' ଯେକୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଉ ।

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = c$ ଏବଂ $f(a) = c$

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

∴ x = a ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ । ମାତ୍ର 'a' ଯାଦୃଚ୍ଛିକ (ଯେକୌଣସି) ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା । ଏଣୁ f(x) = c ହେଉଛି ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ ।

ଉଦାହରଣ 20.18 ଦର୍ଶାଅ ଯେ f(x) = cx + d ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

ସମାଧାନ :

ଏକଘାତୀ ଫଳନ f(x) = cx + d ର ପରିସର ହେଉଛି R; ଏବଂ 'a' ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ (ଯେକୌଣସି) ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଉ ।

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

$= \lim_{h\to a}[c(a+h)+d] = ca+d$ ... (i)

ପୁନଶ୍ଚ f(a) = ca + d ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

∴ x = a ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଏବଂ ଯେହେତୁ 'a' ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ, ଏଣୁ f(x) ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

ଉଦାହରଣ 20.19 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ f(x) = sin x ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

ସମାଧାନ : f(x) = sin x ମନେକରାଯାଉ ।

sin xର ପରିସର ହେଉଛି R । a ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଉ ।

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

$= \lim_{h\to 0} \sin(a+h)$

$= \lim_{h\to 0}[\sin a \cos h + \cos a \sin h]$

$= \sin a \lim_{h\to 0} \cos h + \cos a \lim_{h\to 0} \sin h$

$[\because \lim_{x\to a} k\ f(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$ ଯେଉଁଠି k ଏକ ଧ୍ରୁବକ]

$= \sin a \times 1 + \cos a \times 0$ $\quad [\because \lim_{x\to 0} \sin x = 0$ ଓ $\lim_{x\to 0} \cos x = 1]$

$= \sin a$ ... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $f(a) = \sin a$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ $x = a$ ଠାରେ $\sin x$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

$\because$ $x = a$ ଠାରେ $\sin x$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ 'a' ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ବିନ୍ଦୁ ।

ଏଣୁ $f(x) = \sin x$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଉଦାହରଣ 20.20 ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $x = 1$ ଠାରେ $f(x)$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ । $f(x) = ax + 5$ ଏବଂ $f(1) = 4$ ହେବା ବେଳେ, a ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0}(1+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} a(1+h)+5 = a+5 \quad ... (i)$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(1) = 4$ ... (ii)

ଯେହେତୁ $x = 1$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ତେଣୁ $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ, $a + 5 = 4$

ବା $a = 4 - 5$ ବା $a = -1$

ସଂଜ୍ଞା :

1. ଏକ ଫଳନ $f(x)$, ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବ ଯଦି ଏହା]a, b[* ଅନ୍ତରାଳର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୁଏ ।

2. ଏକ ଫଳନ $f(x)$, ଏକ ଆବଦ୍ଧ ଅନ୍ତରାଳ [a, b]ରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବ, ଯଦି ଏହା ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ]a, b[ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୁଏ ଏବଂ ଏହା a ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଏହାର ଡାହାଣ ପାଖରୁ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୁଏ ଏବଂ ଏହା b ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଏହାର ବାମ ପାଖରୁ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୁଏ ।

   ଅର୍ଥାତ୍ $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

   ଏବଂ $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$

* *ଖୋଲା ଅନ୍ତରାଳ [a, b] ରେ ଆମେ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ a ଓ b କଥା ବିଚାର କରୁନାହିଁ ।*

ଉଦାହରଣ 20.21

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ଲାଗି ଫଳନ $\tan x$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $f(x) = \tan x$

$\tan x$ର ପରିସର ହେଉଛି $R - (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$

ମନେକରାଯାଉ, $a \in R - (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ସଂଖ୍ୟା

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \tan(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(a+h)}{\cos(a+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin a \cos h - \cos a \sin h}{\cos a \cos h - \sin a \sin h}$$

$$= \frac{\sin a \lim_{h\to 0} \cos h + \cos a \lim_{h\to 0} \sin h}{\cos a \lim_{h\to 0} \cos h - \sin a \lim_{h\to 0} \sin h}$$

$$= \frac{\sin a \times 1 + \cos a \times 0}{\cos a \times 1 - \sin a \times 0}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a \qquad \text{... (i)}$$

[$\because \forall a \in \tan x$ ର ପରିସର, $\cos a \neq 0$]

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ, f(a) = tan a... (ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ, $\lim_{h\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ x = a ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ । ମାତ୍ର a ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ।

$\therefore 0 \le x < \frac{\pi}{2}$ ଅନ୍ତରାଳରେ xର ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ tan x ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.3

1. ନିମ୍ନ ଦତ୍ତ ଫଳନ ମାନଙ୍କର ନିରବଚ୍ଛିନତା ପରୀକ୍ଷା କର :

(a) x = 2 ଠାରେ f(x) = x–5, (b) x = 0 ଠାରେ f(x) = 2x + 7

(c) x = 3 ଠାରେ, $f(x) = \frac{5}{3}x + 7$ (d) x = –q ଠାରେ f(x) = px + q

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ a ଓ b ଧ୍ରୁବକ ହୋଇଥିଲେ, f(x) = 2a + 3b ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ 5x + 7 ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

4. (a) ଦର୍ଶାଅ ଯେ cos x ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(b) ଦର୍ଶାଅ ଯେ cot x, ନିଜର ପରିସରର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ, ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

5. ନିମ୍ନରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଧ୍ରୁବକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) f(x) = px – 5 ଏବଂ f(2) = 1 ଯେପରିକି x = 2 ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

(b) f(x) = a + 5x ଏବଂ f(0) = 4 ଯେପରିକି x = 0 ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

(c) $f(x) = 2x+3b$ ଏବଂ $f(-2) = \frac{2}{3}$ ଯେପରିକି $x = -2$ ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

20.7 ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଅବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ଅଥବା ବିଚ୍ଛିନ୍ନତା

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ କେବଳ ଯେଉଁ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ସେହିଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିଛୁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ କେତେକ ଫଳନର ଉଦାହରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ବା ନ ହୋଇପାରନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ 20.22

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = e^x$ ଫଳନଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ :

e^x ର ପରିସର ହେଉଛି R । $a \in R$ ମନେକରାଯାଉ ଯେଉଁଠି 'a' ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ।

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$ ଯେଉଁଠି h ଏକ ଅତ୍ୟନ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ସଂଖ୍ୟା ।

$= \lim_{h\to 0} e^{a+h} = \lim_{h\to 0} e^a \cdot e^h = e^a \lim_{h\to 0} e^h$

$= e^a \times 1 = e^a$ ... (i)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ, $f(x) = e^a$ ... (ii)

(i) ଓ (ii)ରୁ, $\lim_{x\to a} f(a) = f(a)$

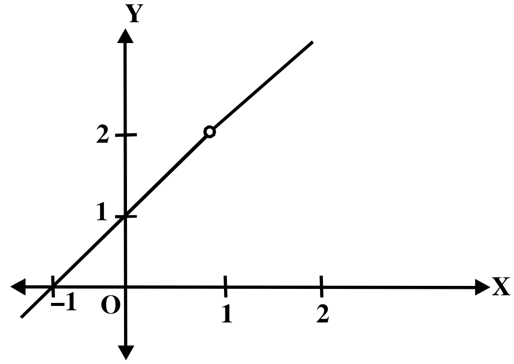
$\therefore$ $x = a$ ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଯେହେତୁ a ହେଉଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ, e^x ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

ଉଦାହରଣ 20.23

ଦତ୍ତ ଲେଖଚିତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ସମାଧାନ : ଚିତ୍ର 20.6 ରେଥିବା ଲେଖ ଚିତ୍ର ଦେଖ । ଲେଖଚିତ୍ରରେ $x = 1$ ଠାରେ ଏକ ଫାଙ୍କ ଥିବାରୁ ଫଳନଟି ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।



ଚିତ୍ର 20.6

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.4

1. (a) ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = e^{5x}$ ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(b) ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = e^{\frac{-2}{3}x}$ ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(c) ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = e^{3x+2}$ ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(d) ଦର୍ଶାଅ ଯେ $f(x) = e^{-2x+5}$ ହେଉଛି ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

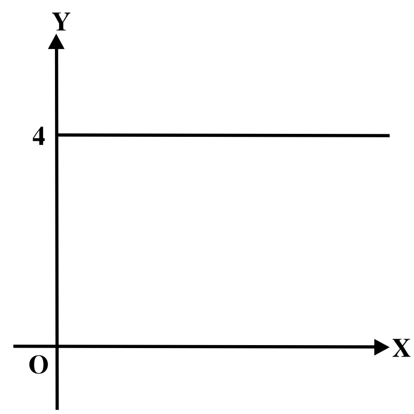
2. ଲେଖଚିତ୍ରର ସାହାଯ୍ୟରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର :

(a) $f(x) = x + 1$ (b) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

(c) $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ (d) $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$

20.8 ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନର ଧର୍ମ

(i) ଫଳନ $f(x) = 4$ର ବିଚାର କର । ଚିତ୍ର 20.7ରେ $f(x) = 4$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ ଫଳନଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ । ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ସମସ୍ତ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର **20.7**

(ii) ଗୋଟିଏ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେଲେ, ଏହାର ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଗୁଣିତକ ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଫଳନ $f(x) = \frac{7}{2}x$ କଥା ବିଚାର କରାଯାଉ ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\frac{7}{2}$ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ । a ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବୋଲି । ମନେକରାଯାଉ,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{7}{2}(a+h)$$

$$= \frac{7}{2}a \qquad \text{... (i)}$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(a) = \frac{7}{2}a$ ... (ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$\therefore$ $x = a$ ଠାରେ $f(x) = \frac{7}{2}x$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

$\frac{7}{2}$ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $x = a$ ଠାରେ $\frac{7}{2}$ ତଥା x ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ତେଣୁ $x = a$ ଠାରେ $\frac{7}{2}x$ ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

(iii) $f(x) = x^2 + 2x$ ଫଳନ କଥା ବିଚାର କର । ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଫଳନ x^2 ଏବଂ $2x$ ଉଭୟ ହେଉଛନ୍ତି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$

$= \lim_{h \to 0}[(a+h)^2 + 2(a+h)]$

$= \lim_{h \to 0}[a^2 + 2ah + h^2 + 2a + 2ah]$

$= a^2 + 2a$ ... (i)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(a) = a^2 + 2a$

$\therefore$ (i) ଓ (ii)ରୁ $f(x) = f(a)$

$\therefore$ $x = a$ ଠାରେ $f(x)$ ହେଉଛି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଏହିପରି ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ $x = a$ ଠାରେ x^2 ଏବଂ $2x$ ଉଭୟ ହେଉଛନ୍ତି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ; ଏଣୁ $x = a$ ଠାରେ $x^2 + 2x$ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(iv) ଫଳନ $f(x) = (x^2+1)(x+2)$ କଥା ବିଚାର କରାଯାଉ । ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ (x^2+1) ଓ $(x+2)$ ଉଭୟ ହେଉଛନ୍ତି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(x) = (x^2+1)(x+2) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

ଯେହେତୁ x^3, $2x^2$, x ଓ 2 ହେଉଛନ୍ତି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ, ତେଣୁ $x^3 + 2x^2 + x + 2$ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

$\therefore$ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ଯଦି (x^2+1) ଏବଂ $(x+2)$ ଦୁଇଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ, ତେବେ $(x^2+1)(x+2)$ ମଧ୍ୟ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନ ।

(v) $x = 2$ ଠାରେ ଫଳନ $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x+2}$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର । ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $x^2 - 4$ $x = 2$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ । $x + 2$ ମଧ୍ୟ $x = 2$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

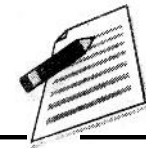
ପୁନଶ୍ଚ $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \to 2} \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}$

$= \lim_{x \to 2}(x-2) = 2 - 2 = 0$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(2) = \dfrac{(2)^2-4}{2+2}$

$= \dfrac{0}{4} = 0$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x) = f(2)$ । ଏହିପରି $x = 2$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।



$\therefore$ ଯଦି $x^2 - 4$ ଏବଂ $x + 2$ ଉଭୟ $x = 2$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ତେଣୁ $\dfrac{x^2-4}{x+2}$ ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(vi) ଫଳନ $f(x) = |x-2|$ କଥା ବିଚାର କର । ଏହି ଫଳନକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$$f(x) = \begin{cases} -(x-2), & x < 2 \\ (x-2), & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2-h), h > 0$$

$$= \lim_{h\to 0}[(2-h)-2]$$

$$= 2 - 2 = 0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2+h), h > 0 \quad \text{... (i)}$$

$$= \lim_{x\to 2}[(2+h)-2]$$

$$= 2 - 2 = 0 \quad \text{... (ii)}$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(2) = (2-2) = 0$ ... (iii)

$\therefore$ (i), (ii), (iii) ରୁ $\underset{x\to 2}{f(x)} = f(2)$

ଏହିପରି, $x = 2$ ଠାରେ $|x-2|$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉପରିସ୍ଥ ଫଳାଫଳକୁ ବିଚାର କରି, ନିମ୍ନରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଫଳନର କେତେକ ଧର୍ମ ଲେଖାଯାଇଛି ।

ଯଦି $f(x)$ ଓ $g(x)$ ଫଳନ ଦୁଇଟି $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ

(i) $cf(x)$, $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ଯେଉଁଠି c ଏକ ଧ୍ରୁବକ ।

(ii) $f(x) \pm g(x)$, $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(iii) $f(x)\cdot g(x)$, $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(iv) $f(x)/g(x)$, $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ଯଦି $g(a) \neq 0$ ।

(v) $|f(x)|$, $x = a$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଟୀକା : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

20.9 ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାର ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଫଳାଫଳ

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ବର୍ଣ୍ଣନାରେ ଥିବା ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି, ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାର ବିଭିନ୍ନ ଫଳାଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(i) ଫଳନ $f(x) = px + q$, $x \in R$ କଥା ବିଚାର କର

ଏହି ଫଳନର ପରିସର ହେଉଛି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ । ମନେକରାଯାଉ a ହେଉଛି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

(i)ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ସୀମା ନେଇ ପାଇବା

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(px+q) = pa+q$$ [$\because$ $x=a$ ଠାରେ $px + q$ର ମାନ]

$\therefore$ px + q ହେଉଛି x = a ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ସେହିପରି ଆମେ ଯଦି $f(x) = 5x^2 + 2x + 3$ କଥା ବିଚାର କରୁ, ଆମେ ଦର୍ଶାଇପାରିବା ଯେ, ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ଫଳନ ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

ଯେଉଁଠି $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ ହେଉଛନ୍ତି ଧ୍ରୁବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ n ହେଉଛି ଏକ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ।

ଆମେ ଦର୍ଶାଇ ପାରିବା ଯେ $a_0, a_1x, a_2x^2, ..., a_nx^n$ ସମସ୍ତ x = c (ଯେଉଁଠି c ହେଉଛି ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା) ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଏବଂ ଧର୍ମ (ii) ଦ୍ୱାରା, x=c ଠାରେ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ମଧ୍ୟ ନିରବିଚ୍ଛିନ୍ନ ।

$\therefore$ f(x) ହେଉଛି ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ c ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(ii) ଫଳନ $f(x) = \dfrac{(x+1)(x+3)}{x-5}$ କଥା ବିଚାର କର । x–5 = 0 ବା x = 5 ହେଲେ, f(x) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

ଯେହେତୁ x+1 ଓ x+3 ଉଭୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, ଆମେ କହିପାରିବା (x+1)(x+3) ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ [ଧର୍ମ (iii)କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

$\therefore$ ଫଳନ f(x)ର ହର ଅର୍ଥାତ୍ x–5 ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ

$\therefore$ ଧର୍ମ (iv) ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ଫଳନ $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x-5}$ ହେଉଛି x = 5କୁ ଛାଡ଼ି ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଯଦି $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ ଯେଉଁଠି p(x) ଓ q(x) ଉଭୟେ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଫଳନ ଏବଂ $qx \neq 0$, ତେବେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଯଦି p(x) ଓ q(x) ଉଭୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ଉଦାହରଣ 20.24

x = 2 ଠାରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

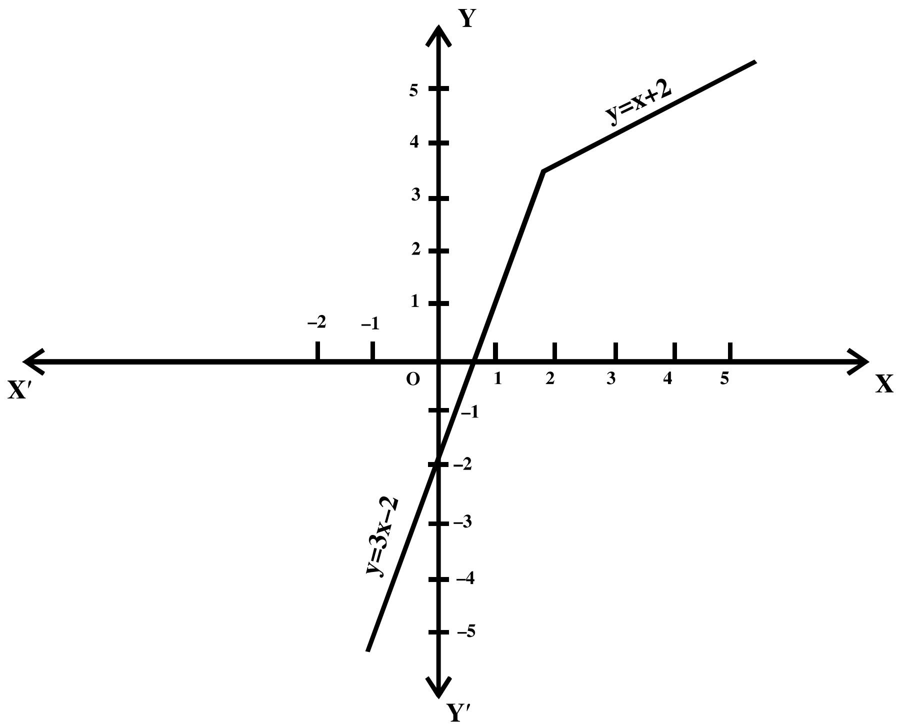
$$f(x) = \begin{cases} 3x-2 \text{ ଯେଉଁଠି } x < 2 \\ x+2 \text{ ଯେଉଁଠି } x \geq 2 \end{cases}$$

ସମାଧାନ :

ଯେହେତୁ f(x) କୁ x=2 ବିନ୍ଦୁର ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଫଳନ 3x+2 ରୂପେ ଏବଂ x=2ର ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ଫଳନ x+2 ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଇଛି, ତେଣୁ ଆମେ ଉଭୟ ଫଳନ ଲାଗି x=2ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଓ ଡାହାଣ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ସୀମା ଭିନ୍ନ ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ବାମପାଖ ସୀମା $= \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$= \lim_{x \to 2} (3x-2) = 3 \times 2 - 2 = 4$



ଚିତ୍ର **20.8**

$x = 2$ ଠାରେ ଡାହାଣ ପାଖସୀମା;

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$$

ଯେହେତୁ $x = 2$ ଠାରେ ବାମପାଖ ସୀମା ଓ ଡାହାଣପାଖ ସୀମା ସମାନ, ଏଣୁ $x = 2$ ଠାରେ ଫଳନ f(x)ର ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି ଏବଂ ଏହା 4 ସହ ସମାନ

ଅର୍ଥାତ୍ $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $x = 2$ ଠାରେ f(x), $x + 2$ ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ।

$\therefore\ f(2) = 2 + 2 = 4$

ଏହିପରି ଭାବେ, $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

ତେଣୁ $x = 2$ ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.25

(i) $f(x) = |x|$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

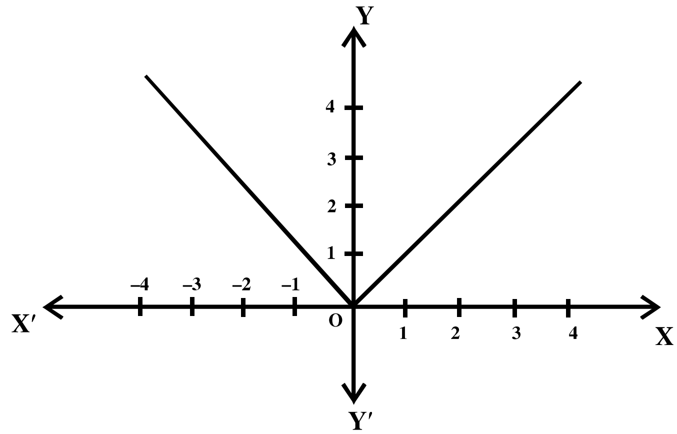
(ii) $x = 0$ ଠାରେ f(x) ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $x \geq 0$ ଲାଗି $|x| = x$ ଏବଂ $x < 0$ ଲାଗି $|x| = -x$ । ଏଣୁ f(x)କୁ ନିମ୍ନ ମତେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ।

$$f(x) = |x| \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(i) ଉକ୍ତ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି



ଚିତ୍ର 20.9

(ii) ବାମପାଖ ସୀମା $= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$

ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା $= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0}(x) = 0$

ଏହିପରି, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(0) = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$

ଏଣୁ $x = 0$ ଠାରେ ଫଳନ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.26

$x = b$ ଠାରେ $f(x) = |x-b|$ ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଆମର ଫଳନ ହେଉଛି $f(x) = |x-b|$ । ଏହି ଫଳନକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ।

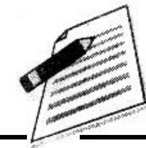
$$f(x) = \begin{cases} -(x-b), & x < b \\ (x-b), & x \ge b \end{cases}$$

ବାମପାଖ ସୀମା $= \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b-h)$

$= \lim_{h\to 0}[-(b-h-b)] = \lim_{h\to 0}(h) = 0$ ... (i)

ଡାହାଣପାଖ ସୀମା $= \lim_{x\to b^+} f(x) = \lim_{h\to 0} f(b+h)$

$= \lim_{h\to 0}[(b+h)-b] = \lim_{h\to 0}(h) = 0$ ... (ii)



ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(b) = b - b = 0$ ... (iii)

(i), (ii), (iii) ରୁ ପାଇବା $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

ଏହିପରି ଭାବରେ, $x = b$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.27

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}; & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$ ହେଲେ,

$x = 0$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ କିମ୍ବା ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}; & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$

ବାମପାଖ ସୀମା $= \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin 2x}{x}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2(0-h)}{0-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-\sin 2h}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1} \right) = 1 \times 2 = 2 \qquad \text{... (i)}$$

ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା $= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2(0+h)}{0+h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \times \frac{2}{1} = 1 \times 2 = 2 \quad \text{... (ii)}$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(0) = 2$ (ଦତ୍ତ) ...(iii)

(i) ଓ (iii) ରୁ

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 = f(0)$$

ଏଣୁ $x = 0$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.28

ଯଦି $x \neq 1$ ପାଇଁ $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ ଏବଂ $x = 1$ ଠାରେ $f(x) = 2$ ହୁଏ,

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $x = 1$ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

ବାମପାଖ ସୀମା $= \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1 - h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1-h)^2 - 1}{(1-h) - 1} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2h + h^2 - 1}{-h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h-2)}{-h} = \lim_{h \to 0} -(h-2) = 2 \quad \text{... (i)}$$

ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା $= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(1 + h)$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{(1+h) - 1}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2)$$

$= 2$ ... (ii)

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f(1) = 2$ (ଦତ୍ତ) ... (iii)

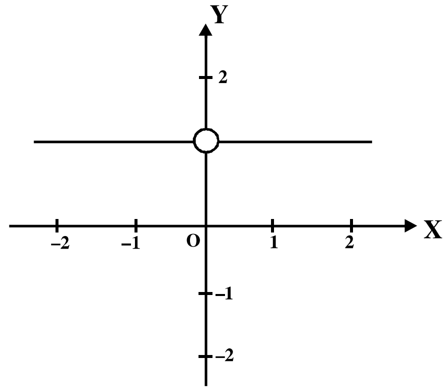
$\therefore$ (i), (ii) ଓ (iii)ରୁ ପାଇବା

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

ଏଣୁ $x = 1$ ଠାରେ $f(x)$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.29 x = 0 ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ଯେଉଁଠି

$$f(x)\begin{cases} \frac{x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$



ଚିତ୍ର 20.10

ସମାଧାନ : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$

ଏବଂ f(0) = 2

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x) \neq f(0)$

ଏଣୁ x = 0 ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ । ଏହି ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର 20.10ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

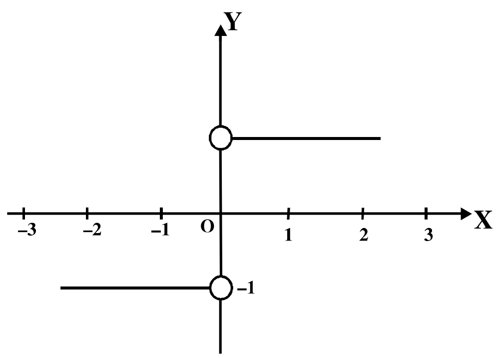
ସ୍ପଷ୍ଟଭାବରେ ଜଣାଯାଏ ଯେ (0, 1) ବିନ୍ଦୁ ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରେ ନାହିଁ । ଏଣୁ x = 0 ଠାରେ ଫଳନଟି ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ ।

ସିଗ୍ନମ ଫଳନ (Signum Function) :

ଫଳନ f(x) = sgn(x) (ସିଗ୍ନମ ଫଳନ ରୂପେ ପଢାଯାଏ)କୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

$$f(x)\begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ନିମ୍ନରେ ଥିବା ଏହି ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଉକ୍ତ ଫଳନର ବାମପାଖ ସୀମା ଓ ଡାହାଣପାଖ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :



ଚିତ୍ର 20.11

ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ $x \to 0^+$ ବେଳେ, $f(x) \to 1$ ଏବଂ ଯେତେବେଳେ $x \to 0^-$, ସେତେବେଳେ $f(x) \to -1$

ଏଣୁ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1,\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

ଏହି ସୀମା ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୋଇନଥିବାରୁ, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ । ଏଣୁ x = 0 ଠାରେ f(x) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଫଳନ (Geatest integer Function) :

ଆସ ଫଳନ f(x) = [x] ଯେଉଁଠି [x] ଦ୍ୱାରା ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ଯାହା x ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବା x ସହ ସମାନ, ତାହା ବୋଲି ସୂଚିତ ହୁଏ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା ।

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ?

(i) $x = \frac{1}{2}$ ଠାରେ (ii) x = 1 ଠାରେ

ଏହାକୁ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ, ଆସ x ଲାଗି କିଛି ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ମାନ ନେବା, ଯଥା : 1.3, 0.2, –0.2, ... । ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ

$[1.3] = 1, [1.99] = 1, [2] = 2, [0.2] = 0, [-0.2] = -1$ $[-3.1] = -4$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ : $-3 \le x < -2$ ଲାଗି $[x] = -3$

$-2 \le x < -1$ ଲାଗି $[x] = -2$

$-1 \le x < 0$ ଲାଗି $[x] = -1$

$0 \le x < 1$ ଲାଗି $[x] = 0$

$1 \le x < 2$ ଲାଗି $[x] = 1$ ଏବଂ ଏହିପରି

f(x) = [x]ର ଲେଖଚିତ୍ର ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ର 20.12ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

(i) ଲେଖଚିତ୍ରରୁ $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = 0$

$\therefore \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = 0$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $f\left(\frac{1}{2}\right) = [0 \cdot 5] = 0$

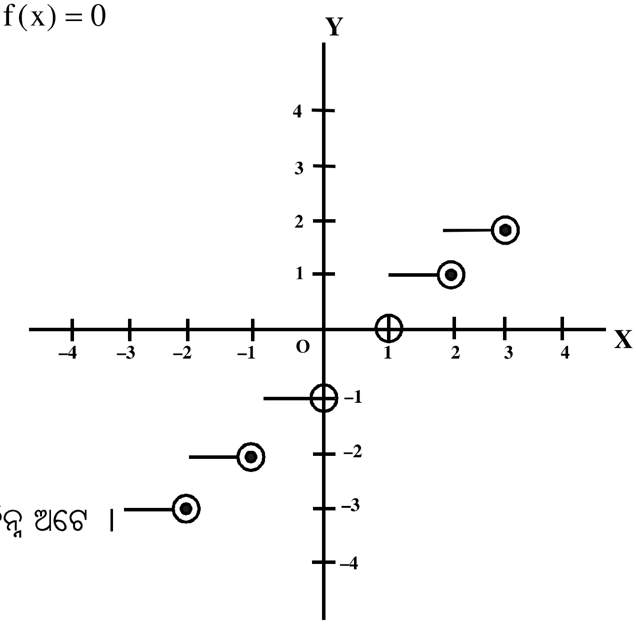
ଏଣୁ $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

ଫଳରେ $x = \frac{1}{2}$ ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

(ii) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0, \ \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1$

ଏଣୁ $\lim_{x \to 1} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

ଫଳରେ x = 1 ଠାରେ f(x) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।



ଚିତ୍ର 20.12

ଟୀକା : ଫଳନ f(x) = [x] କୁ ସୋପାନ ଫଳନ (step function) ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 20.30 କେଉଁ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକରେ ଫଳନ $\frac{x-1}{(x+4)(x-5)}$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $f(x) = \frac{x-1}{(x+4)(x-5)}$

ଦତ୍ତ ଫଳନର ଲବରେ ଥିବା ଫଳନ ଅର୍ଥାତ୍ x – 1 ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ । ହରରେ ଥିବା ଫଳନ (x+4)(x–5) ମଧ୍ୟ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

ମାତ୍ର –4 ଓ 5 ବିନ୍ଦୁଠାରେ f(x) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ ଫଳନ f(x), –4 ଓ 5 ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ, କାରଣ ଫଳନଟି –4 ଓ 5 ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ, f(x), ଏହାର ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 20.31

ଫଳନ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+5}{x^2-8x+12}$ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ନୁହେଁ, ସେ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଫଳନଟି ଏକ ପରିମେୟ ଫଳନ ।

ହର $= x^2 - 8x + 12$

$= (x-2)(x-6)$, x = 2 ଏବଂ x = 6 ଠାରେ ଶୂନ ଅଟେ ।

$\therefore$ f(x), x = 2 ଓ x = 6 ଠାରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

ଆମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ପରିମେୟ ଫଳନ ତା'ର ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

$\therefore$ x = 2 ଓ x = 6 ଭିନ୍ନ xର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମାନ ଲାଗି f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.5

1. (a) ଯଦି f(x) = 2x + 1, ଯେଉଁଠି $x \neq 1$ ଏବଂ f(x) = 3 ଯେଉଁଠି x = 1, ଦର୍ଶାଅ ଯେ x = 1 ଠାରେ ଫଳନ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

(b) ଯଦି $f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\neq 2\\ 3x+5, & x=2\end{cases}$ x = 2 ଠାରେ ଫଳନ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନୁହେଁ ପରୀକ୍ଷା କର ।

(c) x = 2 ଠାରେ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନୁହେଁ ତାହା ପରୀକ୍ଷା କର, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\begin{cases}4x+3, & x\le 2\\ 8-x, & x>2\end{cases}$$

(d) x = 1 ଠାରେ f(x)ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନୁହେଁ ତାହା ପରୀକ୍ଷା କର, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 1\\ x+5, & x>1\end{cases}$$

(e) kର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି ଫଳନ

$$f(x)=\begin{cases}kx^2, & x\le 2\\ 3, & x>2\end{cases}$$

x = 2 ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବ ।

2. ନିମ୍ନ ଫଳନ ମାନଙ୍କର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର :

(a) $f(x) = |x-2|$ x = 2 ଠାରେ (b) $f(x) = |x+5|$ = x = – 5 ଠାରେ

(c) $f(x) = |a-x|$ x = a ଠାରେ

(d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2}, & x\neq 2\\ 1, & x=2\end{cases}$ $x=2$ ଠାରେ

(e) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-a|}{x-a}, & x\neq a\\ 1, & x=a\end{cases}$ $x=a$ ଠାରେ

3. (a) $f(x)=\begin{cases}\sin 4x, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ $x=0$ ଠାରେ

(b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 7x}{x}, & x\neq 0\\ 7, & x=0\end{cases}$ $x=0$ ଠାରେ

(c) aର କେଉଁମାନ ପାଇଁ

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 5x}{3x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ $x=0$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ?

4. (a) ଦର୍ଶାଅ ଯେ x = 2ଠାରେ ଫଳନ f(x)ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2}, & x\neq 2 \text{ ଲାଗି}\\ 3, & x=2 \text{ ଲାଗି}\end{cases}$$

(b) x = 1ଠାରେ f(x)ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତାକୁ ପରୀକ୍ଷା କର, ଯେଉଁଠି

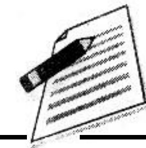
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}, & x\neq 1 \text{ ଲାଗି}\\ -2, & x=1 \text{ ଲାଗି}\end{cases}$$

(c) kର କେଉଁମାନ ଲାଗି x = 1ଠାରେ ଦତ୍ତ ଫଳନ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ?

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{ଯେତେବେଳେ } x\neq 1\\ k, & \text{ଯେତେବେଳେ } x=1\end{cases}$$

(d) x = 2ଠାରେ f(x)ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କର, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \text{ ଲାଗି}\\ 7, & x=2 \text{ ଲାଗି}\end{cases}$$



5. (a) ଯଦି $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $x=0$ ଠାରେ f ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନୁହେଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରେ ଫଳନ f(x)ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର, ଯେଉଁଠି

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କରେ $f(x)=[x]$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ କି ନୁହେଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(a) $x=\frac{4}{3}$ (b) $x=3$ (c) $x=-1$ (d) $x=\frac{2}{3}$

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ, କେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରେ ଫଳନ f(x) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ?

(a) $f(x)=\frac{x+2}{(x-1)(x-4)}$

(b) $f(x)=\frac{x-5}{(x+2)(x-3)}$

(c) $f(x)=\frac{x-3}{x^2+5x-6}$

(d) $f(x)=\frac{x^2+2x+5}{x^2-8x+16}$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଯଦି ଫଳନ f(x), lର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ ଯେତେବେଳେ x, aର ନିକଟତର ହୁଏ, ଆମେ କହୁ f(x)ର ସୀମା ହେଉଛି l । ସଙ୍କେତରେ ଆମେ ଲେଖୁ

  $\lim_{x\to a} f(x)=l$

- ଯଦି $\lim_{x\to a} f(x)=l$ ଏବଂ $\lim_{x\to a} g(x)=m$, ତେବେ

  (i) $\lim_{x\to a} kf(x)=k\lim_{x\to a} f(x)=kl$

  (ii) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=l\pm m$

  (iii) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)=lm$

  (iv) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{m}$, ଯଦି $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

- କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଫଳନର ସୀମା

(i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$

(iii) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ (iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (v) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+x)}{x}=1$ (vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

ନିମ୍ନ ସୀମାଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

1. $\lim\limits_{x\to 1}5$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$

4. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^3+x^2-2x}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+k)^4-x^4}{k(k+2x)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 7. $\lim\limits_{x\to -1}\left[\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right]$

8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x-3)\sqrt{x}-1}{(2x+3)(x-1)}$ 9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right]$ 11. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$ 12. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a^2}{x^2-a^2}$

ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ବାମପାଖ ସୀମା ଓ ଡାହାଣ ପାଖ ସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

13. $f(x)=\begin{cases}-2x+3 \text{ ଯଦି } & x\le 1\\ 3x-5 \text{ ଯଦି } & x>1\end{cases}$ ଯେତେବେଳେ $x\to 1$

14. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x+1|}$ ଯେତେବେଳେ $x\to 1$

ନିମ୍ନ ସୀମାଗୁଡ଼ିକ ନିରୂପଣ କର

15. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{|x+1|}{x+1}$ 16. $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ 17. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{|x-2|}$

18. ଯଦି $f(x)=\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଯଦିଓ $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

19. kର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ରହିପାରେ ଯେଉଁଠି $f(x)\begin{cases}5x+2, & x\le 2\\ 2x+k, & x>2\end{cases}$

20. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{2x}$

21. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}\right]$

22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+3x}{2x+\sin 3x}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

24. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\tan\dfrac{\pi x}{2}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

25. $\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin 5\theta}{\tan 8\theta}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ପରୀକ୍ଷା କର :

26. $f(x)=\begin{cases}1+3x, \text{ ଯଦି } & x>-1\\ 2, \text{ ଯଦି } & x\le -1\end{cases}$ $x=-1$ ଠାରେ

27. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-x, & 0<x<\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{3}{2}-x, & \dfrac{1}{2}<x<1\end{cases}$ ଠାରେ $x=\dfrac{1}{2}$

28. k ର କେଉଁମାନ ପାଇଁ ଫଳନ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x-4}, \text{ ଯଦି } & x\ne 4\\ k, \text{ ଯଦି } & x=4\end{cases}$ $x=4$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବ ?

29. ନିମ୍ନ ଫଳନ ମାନଙ୍କର ଯଦି କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନତା ନ ଥାଏ, ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\dfrac{x^2+3}{x^2+x+1}$

(b) $\dfrac{4x^2+3x+5}{x^2-2x+1}$

(c) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-3x+1}$

(d) $f(x)=\begin{cases}x^4-16, & x\ne 2\\ 16, & x=2\end{cases}$

30. ଦର୍ଶାଅ ଯେ ଫଳନ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+\cos x, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ $x=0$ ଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ ।

31. 'a'ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a\cos x}{\pi-2x}, & x\ne\dfrac{\pi}{2}\\ 5, & x=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ହେବ ।

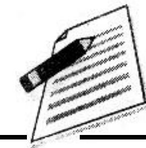
ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.1

1. (a) 17 (b) 7 (c) 0 (d) 2
   (e) –4 (f) 8
2. (a) 0 (b) $\frac{3}{2}$ (c) $-\frac{2}{11}$ (d) $\frac{q}{b}$ (e) 6
   (f) –10 (g) 3 (h) 2
3. (a) 3 (b) $\frac{7}{2}$ (c) 4 (d) $\frac{1}{2}$
4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ (d) 2 (e) –1
5. (a) ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ (b) ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ
6. (a) 0 (b) $\frac{1}{4}$ (c) ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ
7. (a) 1, –2 (b) 1 (c) 19
8. a = –2
10. ସୀମାର ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.2

1. (a) 2 (b) $\frac{e^2-1}{e^2+1}$
2. (a) $-\frac{1}{e}$ (b) –e
3. (a) 2 (b) $\frac{1}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{a}{b}$
4. (a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 4 (d) $\frac{2}{3}$
5. (a) $\frac{a^2}{b^2}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$
6. (a) 1 (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) 0
7. (a) $\frac{5}{3}$ (b) $\frac{7}{4}$ (c) –5



ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.3

1. (a) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (b) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ
   (c) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (d) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ

5. (a) $p = 3$ (b) $a = 4$ (c) $b = \frac{14}{9}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.4

2. (a) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ
   (b) $x = 2$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
   (c) $x = -3$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
   (d) $x = 4$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 20.5

1. (b) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (c) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
   (d) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ (e) $k = \frac{3}{4}$
2. (a) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (b) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (c) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ
   (d) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ (e) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
3. (a) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ (b) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (c) $\frac{5}{3}$
4. (b) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (c) $k = 2$
   (d) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
5. (a) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ (b) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
6. (a) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ (b) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ
   (c) ବିଚ୍ଛିନ୍ନ (d) ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ
7. (a) 1 ଓ 4 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା
   (b) –2 ଓ 3 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା
   (c) –6 ଓ 1 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା
   (d) 4 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. 5 2. $\sqrt{2}$ 3. 4 4. $-\frac{1}{3}$

5. $2x^2$	6. 1	7. $-\frac{1}{2}$	8. $-\frac{1}{10}$
9. –8	10. $\frac{1}{2}$	11. 1	12. $\frac{a-1}{2a}$
13. 1, –2	14. –2, 2	15. –1	16. 1
17. –1	19. k = 8	20. $\frac{7}{2}$	21. 1
22. $\frac{9}{2}$	23. 1	24. $\frac{2}{\pi}$	25. $\frac{5}{8}$

26. ବିଚ୍ଛିନ୍ନ 27. ବିଚ୍ଛିନ୍ନ

28. k = 8

29. (a) ନୁହେଁ (b) x = 1

(c) x = 1, x = 2 (d) x = 2

31. 10