ମଡ୍ୟୁଲ-I

ବୀଜଗଣିତ

ଟିପ୍ପଣୀ

୨

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

ମନେପକଯାଉ ଯେ, ଗୋଟିଏ ଦୁଇଘାତୀ ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣର ପ୍ରାମାଣିକ ରୂପ ହେଉଛି $ax^2 + bx + c = 0$, ଯେଉଁଠି $a \neq 0$ । ଏହାକୁ x ରେ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ସହଗ 'a' କୁ ପ୍ରଥମ ବା ମାର୍ଗଦର୍ଶକ ସହଗ, b କୁ ମଧ୍ୟମ ବା ଦ୍ୱିତୀୟ ସହଗ ଏବଂ c କୁ ଧ୍ରୁବକ ପଦ (ବା ତୃତୀୟ ସହଗ) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $7x^2 + 2x + 5 = 0$, $\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0$,

$3x^2 - x = 0$, $x^2 + \frac{1}{2} = 0$, $\sqrt{2}\,x^2 + 7x = 0$, ଏ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ, ଆମେ ବାସ୍ତବ ଓ ସମିଶ୍ର ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଏବଂ ମୂଳ ବା ବୀଜ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ସ୍ଥାପନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଆମେ 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ ଏବଂ ସମସ୍ୟା ସମାଧାନରେ ଏହାର ବ୍ୟବହାର ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟ ଅଧ୍ୟୟନ କରିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ଉତ୍ପାଦକୀରଣ ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ବାସ୍ତବବୀଜ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପ୍ରଣାଳୀ ଜାଣିବ ।
- ବୀଜ ଓ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- ବୀଜଗୁଡ଼ିକ ଦିଆଯାଇଥିଲେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରିପାରିବ, ଏବଂ
- ଏକର ଘନମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା
- ବାସ୍ତବ ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

2.1 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ (Roots of Quadratic Equation)

କୌଣସି ସମୀକରଣର ଚଳ ପାଇଁ ଯେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କଲେ, ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତାହାକୁ ସମୀକରଣର ମୂଳ (ବା ସମାଧାନ) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ... (i) ର ଏକ ମୂଳ α ହୁଏ, ତେବେ

$a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$

ଅନ୍ୟକଥାରେ, ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (i) ର $x - \alpha$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ । ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $x^2 + x - 6 = 0$ ... (ii) ଉପରେ ଆଲୋଚନା କର ।

ଯଦି ଆମେ (ii) ରେ $x = 2$ ପ୍ରତିସ୍ଥାପନ କରିବା, ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= 2^2 + 2 - 6 = 0$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ପୁନଶ୍ଚ (ii) ରେ $x = -3$ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (-3)^2 - 3 - 6 = 0$ $\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ପୁନଶ୍ଚ (ii) ରେ $x = -1$ ନେଲେ, ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (-1)^2 + (-1) - 6 = -6 \neq 0$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ $x = 2$ ଏବଂ $x = -3$ ହିଁ x ର ଏପରି ଦୁଇଟି ମାନ ଯାହା ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ କୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ।

ଅନ୍ୟ କୌଣସି ମାନ (ii) କୁ ସିଦ୍ଧ କରିପାରେ ନାହିଁ ।

$\therefore$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (ii) ର କେବଳ ଦୁଇଟି ମୂଳ ଅଛି ଓ ତାହା ହେଉଛି $x = 2$ ଓ $x = -3$ ।

ଟୀପ୍ପଣୀ : ଯଦି α, β ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ...(a)

ର ଦୁଇଟି ମୂଳ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ (A) ର ଉତ୍ପାଦକ ହେବେ $(x - \alpha)$ ଏବଂ $(x - \beta)$ ।

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ଉତ୍ପାଦକ ମାଧ୍ୟମରେ $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

2.2 ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solving Quadratic Equation by Factorisation)

ମନେପକାଅ ଯେ ଆମେ $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ରୂପରେ ଥିବା ଦୁଇଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲର ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗି ଏବଂ ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନେଇ କିପରି ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଏ, ତାହା ଶିଖିଥିଲେ ।

ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନରେ ଏହି ପଦ୍ଧତି ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇପାରେ ।

ଯଦି $x-\frac{p}{q}$ ଏବଂ $x-\frac{r}{5}$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ର ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକ ହୁଅନ୍ତି,

ତେବେ $\left(x-\frac{p}{q}\right)\left(x-\frac{r}{s}\right)=0$

$\therefore x=\frac{p}{q}$ ଅଥବା, $x=\frac{r}{s}$ ହେବ ।

$\therefore$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ ।

ଉଦାହରଣ 2.1 ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ପଦ୍ଧତିର ବ୍ୟବହାର କରି, ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର :

$6x^2 + 5x - 6 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$6x^2 + 5x - 6 = 0 \quad ... (i)$

ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$

ବା, $3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

ବା, $(2x + 3)(3x - 2) = 0$

$\therefore 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

ବା, $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେଲେ $-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$

ଉଦାହରଣ 2.2 ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ପଦ୍ଧତିର ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର :

$3\sqrt{2}\,x^2+7x-3\sqrt{2}=0$

ସମାଧାନ : ମଧ୍ୟପଦ ଭାଙ୍ଗିଲେ ଆମେ ପାଇବା

$3\sqrt{2}x^2+9x-2x-3\sqrt{2}=0$

ବା, $3x\left(\sqrt{2}x+3\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x+3\right)=0$

ବା, $\left(\sqrt{2}x+3\right)\left(3x-\sqrt{2}\right)=0$

$\therefore \sqrt{2}x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

କିମ୍ବା, $3x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\frac{-3}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}$

ଉଦାହରଣ 2.3 ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପଦ୍ଧତି ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର :

$(a+b)^2 x^2 + 6(a^2-b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$(a+b)^2 x^2 + 6(a^2-b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

ମଧ୍ୟପଦକୁ ଭାଙ୍ଗିଲେ ପାଇବା

$(a+b)^2x^2 + 3(a^2-b^2)x + 3(a^2-b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

ବା, $(a+b)x\{(a+b)x + 3(a-b)\} + 3(a-b)\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

ବା, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

$\therefore (a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

ବା, $(a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାନ ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$(a+b)^2 x^2 + 6(a^2-b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

ଏହାକୁ ଆମେ ଅନ୍ୟ ରୂପରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିପାରିବା :

$\{(a+b)x\}^2 - 2\cdot(a+b)x\cdot 3(a-b) + \{3(a-b)\}^2 = 0$

ବା, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}^2 = 0$

ବା, $x = -\dfrac{3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାନ ମୂଳ ଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.1

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପଦ୍ଧତିରେ ସମାଧାନ କର ।

(i) $\sqrt{3}\,x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$ (ii) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

(iii) $x^2 + \left(\dfrac{ab}{c} - \dfrac{c}{ab}\right)x - 1 = 0$ (iv) $x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 6 = 0$

2.3 ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solving Quadatic Equation log Quadratic formula)

ମାନକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c\ a = 0, \neq 0$ କୁ

ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ମନେପକାଅ ।

ଉପରୋକ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେବ :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$$

ଏବଂ $$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

ଯେଉଁଠି $D = b^2 - 4ac$ କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ।

ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ **ପାଇଁ ଯଦି**

(i) $D > 0$, ତେବେ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦୁଇଟି ହେବ ବାସ୍ତବ ଓ ଅସମାନ ।

(ii) $D = 0$,ତେବେ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦୁଇଟି ହେବ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ଏବଂ ମୂଳଦ୍ୱୟ ପ୍ରତ୍ୟେକ $\frac{-b}{2a}$ ସହ ସମାନ ହେବେ ।

(iii) $D < 0$, ତେବେ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସମିଶ୍ର (କାଳ୍ପନିକ) ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 2.4 ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳମାନଙ୍କର ସ୍ୱରୂପ ବର୍ଣ୍ଣନା କର ଏବଂ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁମ ଉତ୍ତରର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

(i) $x^2 + 9x + 10 = 0$

(ii) $9y^2 - 6\sqrt{2}\ y + 2 = 0$

(iii) $\sqrt{2}\ t^2 - 3\ t + 3\sqrt{2} = 0$

ସମାଧାନ :

(i) ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି

$x^2 + 9x + 10 = 0$

ଏଠାରେ $a = 1, b = 9$ ଏବଂ $c = 10$

$\therefore D = b^2 - 4ac$

$= 81 - 4\times1\times10 = 41 > 0$

$\therefore$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଅସମାନ ହେବେ ।

ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ରଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$\therefore$ ବୀଜଦ୍ୱୟ $\frac{-9+\sqrt{41}}{2}, \frac{-9-\sqrt{41}}{2}$

ସେ ଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଅସମାନ ।

(ii) ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$

ଏଠାରେ, $D = b^2 - 4ac$

$= \left(-6\sqrt{2}\right)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 2$

$= 72 - 72 = 0$

ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$y = \frac{6\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{2 \times 9} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$ ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ $\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}$

(iii) ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $\sqrt{2}t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

ଏଠାରେ, $D = (-3)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{2}$

$= -15 < 0$

$\therefore$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମିଶ୍ର ଓ ସଂଯୁଗ୍ମୀ ।

ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ : ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପାଇବା

$$t = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2\sqrt{2}}$$

$= \frac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$, ଯେଉଁଠି $i = \sqrt{-1}$

$\therefore$ ବୀଜଦ୍ୱୟ $\frac{3+\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$ ଯାହାକି ସମିଶ୍ର ଓ ସଂଯୁଗ୍ମୀ

ଉଦାହରଣ 2.5 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, p ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $x^2 + py - 1 = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଅସମାନ ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $D = p^2 + 4$ ଯାହାକି p ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ ।

$\therefore$ p ର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଅସମାନ ହେବେ ।

ଉଦାହରଣ 2.6 k ର କେଉଁ ମୂଲ୍ୟପାଇଁ $(4k + 1) x^2 + (k + 1)x + 1 = 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $(4k + 1) x^2 + (k +1) x +1 =0$

ଏଠାରେ, $D = (k + 1)^2 - 4 \times (4k + 1) \times 1$

ସମାନ ବୀଜ ପାଇଁ, $D = 0$

$\therefore (k + 1)^2 - 4 (4k + 1) = 0$

$\Rightarrow k^2 - 14k - 3 = 0$

$$\therefore k = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 12}}{2}$$

କିମ୍ବା, $k = \dfrac{14 \pm \sqrt{208}}{2} = 7 \pm 2\sqrt{13}$

କିମ୍ବା, $7 + 2\sqrt{13}$, $7 - 2\sqrt{13}$

ଯାହାକି k ର ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମାନ ।

ଉଦାହରଣ 2.7 ପ୍ରମାଣ କର ।

$x^2 (a^2 + b^2) + 2x (ac + bd) + (c^2 + d^2) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ କାଳ୍ପନିକ । କିନ୍ତୁ ଯଦି ad = bc, ତେବେ ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $x^2 (a^2 + b^2) + 2x (ac + bd) + (c^2 + d^2) = 0$

ପ୍ରଭେଦକ $= 4(ac + bd)^2 - 4 (a^2 + b^2) (c^2 + d^2)$

$= 8\,abcd - 4 (a^2d^2 + b^2c^2)$

$= -4 (-2\,abcd + a^2d^2 + b^2c^2)$

$= -4 (ad - bc)^2$

< 0, ସମସ୍ତ a, b, c, d ପାଇଁ

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ କାଳ୍ପନିକ ।

ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ହେବାପାଇଁ ପ୍ରଭେଦକ ଶୂନ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେବ ।

$\Rightarrow -4 (ad - bc)^2 = 0$

କିମ୍ବା, $ad = bc$

ଅତଏବ, ଯଦି ad = bc, ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ସମାନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.2

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରକୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ସମାଧାନ କର :

   (i) $2x^2 - 3x + 3 = 0$

   (ii) $-x^2 + \sqrt{2}x - 1 = 0$

   (iii) $-4x^2 + \sqrt{5}x - 3 = 0$

   (iv) $3x^2 + \sqrt{2}x + 5 = 0$

2. k ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $y^2 - 2(1 + 2k)y + 3 + 2k$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବ ?

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ସମୀକରଣ $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a) = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବଦା ବାସ୍ତବ ଏବଂ $a = b = c$ ନହେଲେ, ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବନାହିଁ ?

2.4 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବୀଜ ଓ ସହଗମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ (Relation between Roots and coefficients of Quadratic Equation)

ତୁମେ ଶିଖିଛ, ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ

ହେଉଛନ୍ତି $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ଏବଂ $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

ମନେକର $\alpha = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ...(i)

$\beta = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ...(ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ଯୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$$\alpha + \beta = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$\therefore$ ବୀଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $= -\dfrac{x \text{ ର ସହଗ}}{x^2 \text{ର ସହଗ}} = -\dfrac{b}{a}$ ...(iii)

$$\alpha\beta = \frac{+b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2}$$

$$= \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

ବୀଜଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $= \dfrac{\text{ଧ୍ରୁବକ ପଦ}}{x^2 \text{ ର ସହଗ}} = \dfrac{c}{a}$ ....(iv)

(iii) ଓ (iv) ଏକ ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ଓ ସହଗ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ । ଦୁଇଟି ବୀଜ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସହାୟତା କରେ ।

ଉଦାହରଣ 2.8 ଯଦି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $3x^2 - 5x + 9 = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$

ସମାଧାନ : ଦ୍ୱିଘାତୀସମୀକରଣ $3x^2 - 5x + 9 = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β ଦିଆଯାଇଛି ।

$\therefore \alpha + \beta = \dfrac{5}{3}$ ...(i)

ଏବଂ $\alpha\beta = \dfrac{9}{3} = 3$ ... (ii)

ବର୍ତ୍ତମାନ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 2 \times 3$ [(i) ଓ (ii) ଅନୁଯାୟୀ]

$= \dfrac{-29}{9}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଲ୍ୟ $= \dfrac{-29}{9}$

(b) ବର୍ତ୍ତମାନ $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2}$

$= \dfrac{\frac{-29}{9}}{9}$ [(i) and (ii) ଦ୍ୱାରା]

$= \dfrac{-29}{81}$

ଉଦାହରଣ 2.9 ଯଦି ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $3y^2 + 4y + 1 = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ α, β ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର, ଯାହାର ବୀଜଦ୍ୱୟ α^2, β^2 ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି $3y^2 + 4y + 1=0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β

$\therefore$ ବୀଜ ଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି

ଅର୍ଥାତ୍, $\alpha + \beta = -\dfrac{y\text{ର ସହଗ}}{y^2\text{ ର ସହଗ}}$

$= -\dfrac{4}{3}$ ...(i)

ବୀଜଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ, ଅର୍ଥାତ୍, $\alpha\beta = \dfrac{\text{ଧ୍ରୁବକ}}{y^2\text{ସହଗ}}$

$= \dfrac{1}{3}$ ...(ii)

ବର୍ତ୍ତମାନ $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$= \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 - 2 \times \dfrac{1}{3}$ [(i) ଓ (ii) ଦ୍ୱାରା]

$= \dfrac{16}{9} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{10}{9}$

ଏବଂ $\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \dfrac{1}{9}$ [(ii)ଦ୍ୱାରା]

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି

$y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\, y + \alpha^2\beta^2 = 0$

କିମ୍ବା, $y^2 - \dfrac{10}{9}y + \dfrac{1}{9} = 0$

କିମ୍ବା, $9y^2 - 10y + 1 = 0$

ଉଦାହରଣ 2.10 ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ ଅନ୍ୟଟିର ବର୍ଗ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ବୀଜଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି α, α^2 ।

$\therefore \alpha + \alpha^2 = \dfrac{-b}{a}$ ...(i)

ଏବଂ $\alpha \times \alpha^2 = \dfrac{c}{a}$

ଅର୍ଥାତ୍, $\alpha^3 = \frac{c}{a}$ ...(ii)

(i) ରୁ ପାଇବା $\alpha(\alpha+1) = -\frac{b}{a}$

କିମ୍ବା, $\{\alpha(\alpha+1)\}^3 = \left(-\frac{b}{a}\right)^3 = -\frac{b^3}{a^3}$

କିମ୍ବା, $\alpha^3(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) = -\frac{b^3}{a^3}$

କିମ୍ବା, $\frac{c}{a}\left\{\frac{c}{a} + 3\left(-\frac{b}{a}\right) + 1\right\} = -\frac{b^3}{a^3}$ [(i) ଓ (ii) ଦ୍ୱାରା]

କିମ୍ବା, $\frac{c^2}{a^2} - \frac{3bc}{a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^3}{a^3}$

କିମ୍ବା, $ac^2 - 3abc + a^2c = -b^3$

କିମ୍ବା, $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

ଯାହାକି ଆବଶ୍ୟକ ଫଳାଫଳ ।

ଉଦାହରଣ 2.11 କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ $m : n$ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ $m\alpha$ ଓ $n\alpha$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $m\alpha + n\alpha = \frac{-b}{a}$ ...(i)

ଏବଂ $mn\alpha^2 = \frac{c}{a}$ ... (ii)

(i) ରୁ (ii) ପାଇବା, $\alpha(m+n) = -\frac{b}{a}$

ବା, $\alpha^2(m+n) = \frac{b^2}{a^2}$

ବା, $\frac{c}{a}(m+n)^2 = mn\frac{b^2}{a^2}$ ...[(ii) ଦ୍ୱାରା]

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ବୀଜଗଣିତ
ଟିପ୍ପଣୀ

ବା, $ac(m+n)^2 = mn\,b^2$

ଏହା ହେଉଛି ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସର୍ତ୍ତ :

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.3

1. ଯଦି $ay^2 + by + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α, β ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

   (ii) $\frac{1}{\alpha^4} + \frac{1}{\beta^4}$

2. ଯଦି $5x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α, β ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ଯାହାର ବୀଜଦ୍ୱୟ ହେବେ :

   (i) α^2, β^2 (ii) $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$

3. ଯଦି $ay^2 + by + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ 3 : 4 ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର $12b^2 = 49ac$ ।

4. $px^2 - qx + p = 0$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ ଅନ୍ୟଠାରୁ 1 ବେଶୀ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2.5 D < 0 ବେଳେ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution of quadratic Equation when D < 0)

ଆସ ନିମ୍ନ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣକୁ ବିଚାର କରିବା :

(a) t ପାଇଁ ସମାଧାନ କର :

$t^2 + 3t + 4 = 0$

$$\therefore t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

ଏଠାରେ $D = -7 < 0$

$$\therefore \text{ମୂଳଦ୍ୱୟ } \frac{-3+\sqrt{-7}}{2} \text{ ଏବଂ } \frac{-3-\sqrt{-7}}{2}$$

$$\text{ବା } \frac{-3+\sqrt{-7}i}{2}, \frac{-3-\sqrt{7}i}{2}$$

ଏହିପରି, ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମିଶ୍ର ଓ ସଂଯୁଗ୍ମୀ ।

(b) y ପାଇଁ ସମାଧାନ କର :

$$-3y^2 + \sqrt{5}\,y - 2 = 0$$

$$\therefore y = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5 - 4(-3)(-2)}}{2(-3)}$$

ବା, $y = \dfrac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{-19}}{-6}$

ଏଠାରେ $D = -19 < 0$

$\therefore$ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\dfrac{-\sqrt{5} + \sqrt{19}i}{-6}, \dfrac{-\sqrt{5} - \sqrt{19}i}{-6}$

ଏଠାରେ ମଧ୍ୟ ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମିଶ୍ର ଓ ସଂଯୁଗ୍ମୀ । ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ନିମ୍ନ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା :

(i) ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $D < 0$

(ii) ବୀଜଦ୍ୱୟ ସମିଶ୍ର ଓ ପରସ୍ପର ସଂଯୁଗ୍ମୀ

ଏହା କ'ଣ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ଯେ ସମିଶ୍ର ବୀଜଦ୍ୱୟ ସଂଯୁଗ୍ମୀ ଯୋଡ଼ିହେବେ ?

ଆସ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରିବା

ଯାହାର ବୀଜଦ୍ୱୟ $2 + 3i$ ଏବଂ $4 - 5i$

ସମୀକରଣଟି ହେବ $\{x - (2 + 3i)\}\{x - (4 - 5i)\} = 0$

ବା, $x^2(2 + 3i)x - (4 - 5i)x + (2 + 3i)(4 - 5i) = 0$

ବା, $x^2 + (-6 + 2i)x + 23 + 2i = 0$

ଏହା ଏକ ସମିଶ୍ର ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ଅଟେ ।

ଟୀକା : ଯଦି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମିଶ୍ର ବୀଜ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ସମିଶ୍ର ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

2.6 ଏକର ଘନମୂଳ Cube root of Unity

ଆସ ଏକ ତିନି ବା ତା'ଠାରୁ ଅଧିକ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା । 3 ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଯେକୌଣସି ସମୀକରଣକୁ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ଓ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ଗୁଣଫଳ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଆମ ମାନଙ୍କ ବିଚାର୍ଯ୍ୟ ସରଳତମ ପରିସ୍ଥିତି ହେଉଛି

$x^3 - 1 = 0 \quad \ldots \text{(i)}$

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x - 1 = 0$ ବା, $x^2 + x + 1 = 0$

ଅଥବା, $x = 1$ ବା $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore$ ବୀଜଗୁଡ଼ିକ $1, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$ ଏବଂ $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$

ଏଗୁଡ଼ିକୁ **'ଏକ'**ର ଘନମୂଳ କୁହାଯାଏ ।

ଉପରେ ପ୍ରାପ୍ତ ଅବାସ୍ତବ ମୂଳଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସମ୍ବନ୍ଧ ପାଉଛ କି ?

ଆସ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

ମନେକର $w = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବର୍ଗ ନେଲେ, ପାଇବା

$$w^2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+3i^2-2\sqrt{3}i\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-3-2\sqrt{3}i\right)$$

$$= \frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}$$

$$= \frac{-2\left(1+\sqrt{3}i\right)}{4} = \frac{-\left(1+\sqrt{3}i\right)}{2}$$

$\therefore w^2 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2} =$ ଅନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ବୀଜ

$\therefore$ 'ଏକ'ର ଘନମୂଳକୁ ଆମେ $1, w, w^2$ ରୂପେ ଚିହ୍ନିତ କରିବା ।

ଟିପ୍ପଣୀ : ଯଦି ଆମେ $w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ ନେବା, ତେବେ ଆମେ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବା ଯେ,

$w^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} =$ ଅନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ମୂଳ

ଏହିପରି ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ରବୀଜର ବର୍ଗ ଅନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ବୀଜ ସହ ସମାନ ।

ପୁନଶ୍ଚ, ବୀଜମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି, ଅର୍ଥାତ୍ $1 + w + w^2$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1 - 1 = 0$$

$\therefore\ 1 + w + w^2 = 0$

'ଏକ'ର ମୂଳମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ୍ୟ ଅଟେ ।

1 ର ଘନ ମୂଳମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ

ଅର୍ଥାତ୍, $1.w \cdot w^2 = w^3 = 1$ ($\because\ x^3 - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ w)

ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିପାରିବା ଯେ, ଯଦି 1, w ଏବଂ w^2 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ

(i) ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ମୂଳର ବର୍ଗ ଅନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ମୂଳ ସହ ସମାନ ହେବ, ଅର୍ଥାତ୍, $w^2 = w$

(ii) $1 + w + w^2 = 0$

(iii) $w^3 = 1$

ଆସ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମୀକରଣର ବିଚାର କରିବା

$x^3 + 1 = 0$

ବା $(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

$x + 1 = 0$ କିମ୍ବା, $x^2 - x + 1 = 0$

ବା, $x = -1$ କିମ୍ବା, $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

$\Rightarrow x = -1$ କିମ୍ବା, $x = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$

$\therefore$ ମୂଳଗଗୁଡ଼ିକ $-1, \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$ ଏବଂ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}$ । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ମଧ୍ୟ $-1, -w$ ଏବଂ $-w^2$ ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

ତେଣୁ -1 ର ଘନମୂଳ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $-1, -w$ ଏବଂ $-w^2$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ $x^3 = \pm a^3$ ରୂପରେ ଥିବା କୌଣସି ତ୍ରିଘାତୀ ସମୀକରଣର ମୂଳ ହେବ $\pm a, \pm w \pm w^2$

ଉଦାହରଣ 2.12 ଯଦି $1, w$ ଏବଂ w^2 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ ହୁଅନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $1 + w^2 + w^7 = 0$

(b) $(1- w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

(c) $(1 + w)^3 - (1 + w^2)^3 = 0$

(d) $(1 - w + w^2)^3 = -8$ ଓ $(1 + w - w^2)^3 = -8$

ସମାଧାନ :

(a) ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $1 + w^2 + w^7 = 0$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= 1 + w^2 + (w^3)^2 \cdot w$

$= 1 + w^2 + w$ $\quad [\because w^3 = 1]$

$= 0$ $\quad [\because 1 + w + w^2 = 0]$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

(b) ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2) = 4$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1 - w - w^2)(1 + w - w^2)$

$= (1 + w^2 - w)(1 + w - w^2)$

($\because 1 + w^2 = - w$ ଏବଂ $1 + w = -w^2$

$= (-w - w)(-w^2 - w^2)$

$= (-2w)(-2w^2)$

$= 4w^3$

$= 4.1 = 4$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

(c) ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $(1 + w)^3 - (1 - w^2)^3 = 0$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1 + w)^3 - (1 + w^2)^3$

$= (-w^2)^3 - (-w)^3 \quad (\because 1 + w = -w^2)$

$= -w^6 + w^3$ ଏବଂ $1 + w^2 = -w$

$= -(w^3)^2 + 1$

$= -(1)^2 + 1$

$= 0 =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

(d) ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $(1 - w + w^2)^3 = -8$ ଏବଂ $(1 + w - w^2)^3 = -8$

ପରିସ୍ଥିତି - I : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1 - w + w^2)^3$

$= (1 + w^2 - w)^3$

$= (-w - w)^3$

$= (-2w)^3$

$= -8\,w^3$

$= -8 =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ପରିସ୍ଥିତି - II : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (1 + w - w^2)^3$

$= (-w^2 - w^2)^3$

$= (-2w^2)^3$

$= -8w^6$

$= -8\,(w^3)^2$

$= -8 =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.4

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କର :

(i) $x^3 = 27$ (ii) $x^3 = -27$

(iii) $x^3 = 64$ (iv) x3 = –64

2. ଯଦି 1, w, w^2 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(i) $(1 + w)(1 + w^2)(1 + w^4)(1 + w^8) = 1$

(ii) $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^4)(1 - w^5) = 9$

(iii) $(1 + w)^4 + (1 + w^2)^4 = -1$

(iv) $(1 + w^3)^3 = 8$

(v) $(1 - w + w^2)^6 = (1 + w - w^2)^6 = 64$

(vi) $(1 + w)^{16} + w = (1 + w^2)^{16} + w^2 = -1$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଯେତେବେଳେ $D < 0$, ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0$ ର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମିଶ୍ର ଓ ପରସ୍ପର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ।

- ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ α ଓ β, ତେବେ $\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$ ଓ $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ ।

- 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ 1, w, w^2, ଯେଉଁଠି

$$w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \text{ ଓ } w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \text{ ।}$$

- 'ଏକ'ର ଘନମୂଳର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ଅଟେ, ଅର୍ଥାତ୍, $1 + w + w^2 = 0$ ।

- 'ଏକ'ର ଘନମୂଳର ଗୁଣଫଳ 1 ଅର୍ଥାତ୍ $w^3 = 1$ ।

- ସମିଶ୍ର ବୀଜ w ଓ w^2 ପରସ୍ପର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ।

- ସାଧାରଣ ଭାବରେ $x^3 = \pm a^3$ ରୂପ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଘାତୀ ସମୀକରଣର ମୂଳ ହେଉଛନ୍ତି $\pm a$, $\pm aw$ ଏବଂ $\pm aw^2$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $2(a^2 + b^2)x^2 + 2(a + b)x + 1 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ କାଳ୍ପନିକ, ଯେତେବେଳେ $a \neq b$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $bx^2 + (b - c)x = c + a - b$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଯଦି $ax^2 + b(2x + 1) = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଗୁଡ଼ିକ କାଳ୍ପନିକ ଅଟନ୍ତି ।

3. ଯଦି $x^2 - 6x + 5 = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଗୁଡ଼ିକ α ଓ β ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯାହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେବେ :

   (i) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha + \frac{1}{\beta}, \beta + \frac{1}{\alpha}$

   (iii) $\alpha^2 + \beta^2, \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$

4. ଯଦି 'ଏକ'ର ଘନମୂଳ 1, w ଓ w^2 ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର :

   (a) $(2 - w)(2 - w^2)(2 - w^{10})(2 - w^{11}) = 49$

   (b) $(x - y)(xw - y)(xw^2 - y) = x^3 - y^3$

   ଯଦି $x = a + b$, $y = aw + bw^2$ ଏବଂ $z = aw^2 + bw$, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର :

   (a) $x^2 + y^2 + z^2 = 6ab$

   (b) $xyz = a^3 + b^3$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.1

1. (i) $-2\sqrt{3}, \dfrac{-4}{\sqrt{3}}$ (ii) $a-\sqrt{b}, a+\sqrt{b}$

   (iii) $-\dfrac{ab}{c}, \dfrac{c}{ab}$ (iv) $3\sqrt{2}, \sqrt{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.2

1. (i) $\dfrac{3\pm\sqrt{15}\,i}{4}$ (ii) $\dfrac{1\pm i}{\sqrt{2}}$

   (iii) $\dfrac{\sqrt{5}\pm\sqrt{43}\ i}{8}$ (iv) $\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{58}\ i}{6}$

2. $-1, \dfrac{1}{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.3

2. (i) $\dfrac{b^2-2ac}{c^2}$ (ii) $\dfrac{(b^2-2ac)^2-2a^2c^2}{c^4}$

2. (i) $25x^2-6x+9=0$ (ii) $625x^2-90x+81=0$

4. $q^2-5p^2=0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 2.4

1. (i) $3, 3w, 3w^2$ (ii) $-3, -3w, -3w^2$

   (iii) $4, 4w, 4w^2$ (iv) $-4, -4w, -4w^2$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

3. (i) $5x^2-8x+5=0$

   (ii) $10x^2-42x+49=0$

   (iii) $25x^2-116x+64=0$