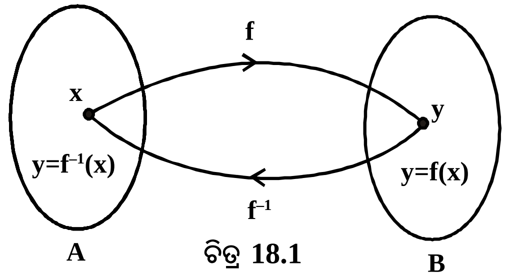
୧୮

ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତୀୟ ଫଳନ

ପୂର୍ବପାଠରେ ତୁମେ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଏବଂ ବିଭିନ୍ନ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ଆମେ ପ୍ରତିଲୋମୀ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ମଧ କରିଛୁ । ଆସ ସଂକ୍ଷେପରେ ମନେପକାଇବା :

ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ f ହେଉଛି A ରୁ Bକୁ ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ । B ସେଟ୍‌ର y କୌଣସି ଏକ ଯାଦୃଚ୍ଛିକ ଉପାଦନ ହେଉ । f ଏକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ହୋଇଥିବାରୁ, $\exists$ଏକ ଉପାଦାନ $x \in A$ ଯେପରିକି $f(x) = y$ । ପୁନଶ୍ଚ ଫଳନଟି ଆଚ୍ଛାଦକ ହେତୁ x ଅନନ୍ୟ ଉପାଦାନ ହେବ । ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ $y \in B$ ଲାଗି, $\exists$ ଏକ ଅନନ୍ୟ ଉପାଦାନ $x \in A$, ଯେପରିକି $f(x) = y$ । ଏଣୁ ଆମେ f^{-1} ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଫଳନକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା । $f^{-1} : B \to A$



ଚିତ୍ର 18.1

$$\therefore\ f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

ଉପରୋକ୍ତ ଫଳନ f^{-1}କୁ f ର ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଏକ ଫଳନ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମଣୀୟ (invertible) ହୁଏ, ଯଦି କେବଳ ଯଦି ଏହା ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ହୋଇଥାଏ ।

ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ f ଫଳନର ବିସ୍ତାର ହିଁ f^{-1}ର ପରିସର ହୁଏ ଏବଂ f^{-1}ର ବିସ୍ତାର, f_r ର ପରିସର ହୁଏ ।

ଆସ ଆଉ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ଦେଖିବା

ଆମେ f ଫଳନକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରୁ : f : କାର୍ → ରେଜିଷ୍ଟ୍ରେସନ୍ ନମ୍ବର

ଆମେ ଯଦି ଲେଖୁ, g : ରେଜିଷ୍ଟ୍ରେସନ୍ ନମ୍ବର → କାର, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ fର ପରିସର ହେଉଛି gର ବିସ୍ତାର ଏବଂ fର ବିସ୍ତାର ହେଉଛି gର ପରିସର । ଏଣୁ ଆମେ କହୁ g ଫଳନ ହେଉଛି **f ଫଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ** । ଅର୍ଥାତ୍ $g = f^{-1}$

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ, ଏହାର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧିକ ଶିଖିବା ଏବଂ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକ ସରଳ କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ;
- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସ୍ଥିତିର ସର୍ତ୍ତ ଜାଣିବ;
- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଧର୍ମ କହିପାରିବ;
- ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ବଳିତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ସରଳ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଫଳନ ଓ ଫଳନର ପ୍ରକାର ଭେଦ, ଫଳନର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର;
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣିତକ – କୋଣ ଓ ବିଭାଜିତ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ର

18.1 ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ ସମ୍ଭବ କି

ଗୋଟିଏ ଫଳନର ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡି (x_1, y) ଓ (x_2, y) ନିଅ । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ରମିତ ଯୋଡିର ଅଂଶ ଦ୍ୱୟର କ୍ରମ ବଦଳାଇ ଦେଲେ ପାଇବା (y, x_1) ଓ (y, x_2) ।

ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ, କାରଣ ଉଭୟ କ୍ରମିତ ଯୋଡିର ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ଏକା ଅଟନ୍ତି ।

ଆଉ ଗୋଟିଏ ଫଳନ ନେବା :

$$\left(\sin\frac{\pi}{2},1\right),\left(\sin\frac{\pi}{4},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ ଏବଂ } \left(\sin\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ପ୍ରତିଲୋମ ଲେଖିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\left(1,\sin\frac{\pi}{2}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\sin\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ଏହା ମଧ୍ୟ ଏକ ଫଳନ ।

ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନର କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦେଖିବା ।

f : ଛାତ୍ର $\rightarrow$ ଗଣିତରେ ପାଇଥିବା ନମ୍ବର

ତୁମେ ଭାବୁଛ କି f^{-1} ସମ୍ଭବ ?

ଏହା ସମ୍ଭବ ହୋଇପାରେ, ଅସମ୍ଭବ ମଧ୍ୟ ହୋଇପାରେ । ଯଦି ଦୁଇଜଣ ଛାତ୍ର ସମାନ ନମ୍ବର ରଖନ୍ତି, ତେବେ f^{-1} ଏକ ଫଳନ ହେବ ନାହିଁ । କାରଣ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଦୁଇଟି ବା ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ କ୍ରମିତ ଯୋଡିର ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ଅଭିନ୍ନ ହେବ । ଏଣୁ ଆମର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା ଯେ

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରଣୀୟ ନୁହେଁ

ଉଦାହରଣ 18.1

ଯଦି $f : R \rightarrow R$ ର ସଂଜ୍ଞା ହୁଏ $f(x) = x^3 + 4$, ତେବେ f^{-1} କ'ଣ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ f ହେଉଛି ଏକୈକ ଓ ଆଚ୍ଛାଦକ ଉଭୟ ।

$\Rightarrow f$ ହେଉଛି ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମଣୀୟ ।

ମନେକରାଯାଉ $y = x^3 + 4$

$$\therefore y - 4 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-4}$$

ଏଣୁ f^{-1}, fର ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ, ଅର୍ଥାତ୍ $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-4}$

ଯେଉଁ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ଏକୈକ ଏବଂ ଆଚ୍ଛାଦକ, ସେଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମଣୀୟ ।

ଆସ, ଏହି ଧାରଣାକୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରସାର କରାଇବା

$y = \sin x$ ନିଅ । ଏଠାରେ ପରିସର ହେଉଛି ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । -1 ଓ 1 ସହ -1 ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $-1 \le y \le 1$ ହେଉଛି ଏହାର ବିସ୍ତାର ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ xର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦତ୍ତମାନ ଲାଗି yର ଏକ ଅନନ୍ୟ ମୂଲ୍ୟ ଅଛି ।

ପ୍ରତିଲୋମ ପ୍ରଣାଳୀରେ sineର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମୂଲ୍ୟ ଲାଗି ଆମେ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବାକୁ ଚାହୁଁ ।

ମନେକରାଯାଉ $y = \sin x = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \sin\frac{13\pi}{6} = \ldots$$

xର ମୂଲ୍ୟ ହୋଇପାରେ, $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \ldots$

ଏଣୁ xଲାଗି ଅସଂଖ୍ୟ ମୂଲ୍ୟ ରହିଛି ।

$y = \sin x$ କୁ ନିମ୍ନମତେ ନିଆଯାଇପାରେ

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \ldots$$

ପ୍ରତିଲୋମ ସମ୍ବନ୍ଧ ହେବ

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{6}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{5\pi}{6}\right), \ldots$$

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧଟି ଫଳନ ନୁହେଁ, କାରଣ ସମସ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିର ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ହେଉଛି $\frac{1}{2}$ ଏବଂ ଏହା ଫଳନର ସଂଜ୍ଞାକୁ ବିରୋଧ କରେ ।

$y = \sin x$କୁ ବିଚାର କର । $x \in R$ (ପରିସର) ଏବଂ $y \in [-1, 1]$ ବା $-1 \le y \le 1$ ଯାହାକି ବିସ୍ତାର ଅଟେ । ଏହା ହେଉଛି ଅନେକ-ଏକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ । ଏଣୁ ଏହା ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମଣୀୟ ନୁହେଁ ।

$y = \sin x$ ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମଣୀୟ କରାଯାଇପାରିବ କି ଏବଂ କିପରି ? ହଁ, ଯଦି ଆମେ ଏହାର ପରିସରକୁ ଏପରି ସୀମିତ ରଖିପାରିବା ଯେ ଫଳନଟି ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ହେବ, ତେବେ ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ ହେବା ସମ୍ଭବ ।

(i) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ $y \in [-1, 1]$ ଅଥବା

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$ $y \in [-1, 1]$ ଅଥବା

(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le x \le -\frac{3\pi}{2}$ $y \in [-1, 1]$ ଇତ୍ୟାଦି

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ $y = \sin^{-1}x$ କଥା ବିଚାର କର । ଆମେ ଉକ୍ତ ଫଳନର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ଜାଣିଛୁ । ଆମେ ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ ପାଇଁ ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାରକୁ ଅଦଳବଦଳ କରିବା । ଏଣୁ

(i) $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ ଅଥବା

(ii) $\frac{3\pi}{2} \le y \le \frac{5\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ ଅଥବା

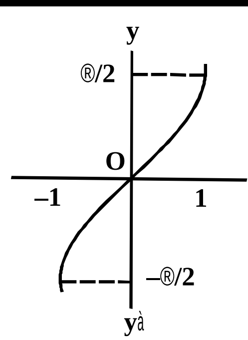
(iii) $-\frac{5\pi}{2} \le y \le -\frac{3\pi}{2}$ $x \in [-1, 1]$ ଇତ୍ୟାଦି

ଏଠାରେ ଆମେ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ସମ୍ଭବ ସଂଖ୍ୟା ନେବା ଯାହାର sineର ମାନ ହେଉଛି x ଯାହାକୁ $\sin^{-1}x$ ର ମୁଖ୍ୟ ମାନ (principal value) କୁହାଯାଏ । ଏଥିଲାଗି $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି । ଏଣୁ $y = \sin^{-1}x$ର ମୁଖ୍ୟମାନ ପାଇଁ ପରିସର ହେଉଛି $[-1, 1]$ ଅର୍ଥାତ୍ $x \in [-1, 1]$ ଏବଂ ବିସ୍ତାର ହେଉଛି $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ ।

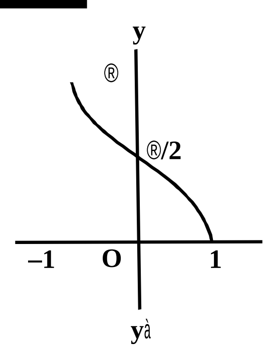
ସେହିପରି ଆମେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିପାରିବା ।

	ଫଳନ	ପରିସର	ବିସ୍ତାର (ମୁଖ୍ୟମାନ)
1.	$y = \sin^{-1}x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
2.	$y = \cos^{-1}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
3.	$y = \tan^{-1}x$	R	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
4.	$y = \cot^{-1}x$	R	$[0, \pi]$
5.	$y = \sec^{-1}x$	$x \ge 1$ ବା $x \le -1$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$
6.	$y = \text{cosec}^{-1}x$	$x \ge 1$ ବା $x \le -1$	$\left[\frac{\pi}{2}, 0\right] \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

18.2 ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର

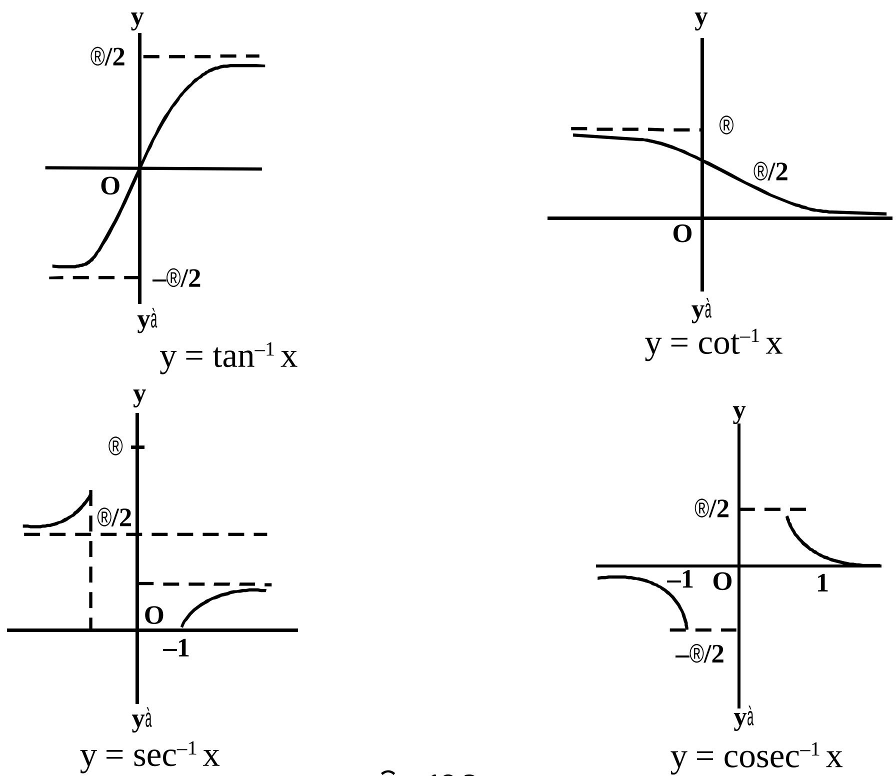


$y = \sin^{-1} x$



$y = \cos^{-1} x$

ଟିପ୍ପଣୀ



ଚିତ୍ର 18.2

ଉଦାହରଣ 18.2 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମୁଖ୍ୟମାନ **(Principal value)** ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (iii) $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକରାଯାଉ $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\theta$

ବା, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ବା, $\theta=\frac{\pi}{4}$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

$\Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{2}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$ ବା, $\theta=\frac{2\pi}{3}$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $\tan^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\theta$

ବା, $-\frac{1}{\sqrt{3}}=\tan\theta$ ବା, $\tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{6}$

ଉଦାହରଣ 18.3 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମୁଖ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a)(i) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\tan^{-1}(-1)$

(b) ମୁଖ୍ୟମାନ ବ୍ୟବହାର କରି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$\sec\left[\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

ସମାଧାନ : (a) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\theta$, ତେବେ

$\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\theta$ ବା $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{4}$

(ii) ମନେକରାଯାଉ, $\tan^{-1}(-1)=\theta$,

ଏଣୁ $-1=\tan\theta$

$$\Rightarrow\tan\theta=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\theta=-\frac{\pi}{4}$$

(b) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\theta$,

ଏଣୁ $\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\sec\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sec\theta=\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

ଉଦାହରଣ 18.4 ସରଳ କର :

(i) $\cos[\sin^{-1}x]$

(ii) $\cot[\text{cosec}^{-1}x]$

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକରାଯାଉ, $\sin^{-1}x=\theta\Rightarrow x=\sin\theta$

$$\therefore\cos[\sin^{-1}x]=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-x^2}$$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $\text{cosec}^{-1}=\theta$

$\Rightarrow x=\text{cosec}\,\theta$

$$\cot\theta = \sqrt{\operatorname{cosec}^2\theta - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 18.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମୁଖ୍ୟମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}(-\sqrt{2})$ (c) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(d) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ (e) $\cot^{-1}(1)$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\cos\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ (b) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cos\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

(d) $\tan\left(\sec^{-1}\sqrt{2}\right)$ (e) $\operatorname{cosec}\left[\cot^{-1}(-\sqrt{3})\right]$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିକୁ ସରଳ କର :

(a) $\sec(\tan^{-1}x)$ (b) $\tan\left(\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{2}\right)$ (c) $\cot(\operatorname{cosec}^{-1}x^2)$

(d) $\cos(\cot^{-1}x^2)$ (e) $\tan\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{1-x}\right)\right)$

18.3 ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଧର୍ମ

ଧର୍ମ -1 : $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ସମାଧାନ :

$\sin\theta = x$ ମନେକରାଯାଉ

$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}x$

$= \sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $\sin(\sin^{-1}x) = x$

ସେହି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ

(i) $\cos^{-1}(\cos\theta) = \theta, 0 \le \theta \le \pi$

(ii) $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ଧର୍ମ -2 : (i) $\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକରାଯାଉ $\text{cosec}^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow x = \text{cosec}\,\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \sin\theta$

$\therefore \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \text{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(ii) $\cot^{-1}x = \theta$ ମନେକରାଯାଉ

$\Rightarrow x = \cot\theta$

$\Rightarrow \frac{1}{x} = \tan\theta$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \cot^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sec^{-1}x = \theta$

$\Rightarrow x = \sec\theta$

$\therefore \frac{1}{x} = \cos\theta$ ବା $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore \sec^{-1} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

ଧର୍ମ -3 :

(i) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$ (ii) $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$

(iii) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ $\sin^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow -x = \sin\theta$ ବା $x = -\sin\theta = \sin(-\theta)$

$\therefore -\theta = \sin^{-1}x$ ବା $\theta = -\sin^{-1}x$

ବା $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $\tan^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow -x = \tan\theta$ ବା $x = -\tan\theta = \tan(-\theta)$

$\therefore \theta = -\tan^{-1}x$ ବା $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}(-x) = \theta$

$\Rightarrow -x = \cos\theta$ ବା $x = -\cos\theta = \cos(\pi-\theta)$

$\therefore \cos^{-1}x = \pi - \cos^{-1}x$

ଧର୍ମ -4 : (i) $\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ (ii) $\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

(iii) $\text{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

ସମାଧାନ : (i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

ମନେକରାଯାଉ $\sin^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\sin\theta=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

ବା $\cos^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\cot^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\cot\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\cot\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore\ \tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ ବା $\theta+\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

ବା $\cot^{-1}x+\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

(iii) ମନେକରାଯାଉ $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta \Rightarrow x=\operatorname{cosec}\theta=\sec\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$

$\therefore\ \sec^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}-\theta$ ବା $\theta+\sec^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\dfrac{\pi}{2}$

ଧର୍ମ -5 : (i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

(ii) $\tan x^{-1}-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ $\tan^{-1}x=\theta,\ \tan^{-1}y=\phi$
$\Rightarrow x=\tan\theta,\ y=\tan\phi$

ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\phi=\tan^{-1}\dfrac{x+y}{1-xy}$

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ମୂଲ୍ୟକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଉ

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $=\theta+\phi$ ଏବଂ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $=\tan^{-1}\left[\dfrac{\tan\theta+\tan\phi}{1-\tan\theta\tan\phi}\right]$

$=\tan^{-1}[\tan(\theta+\phi)]=\theta+\phi=$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore$ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ସେହିପରି (ii)କୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ।

ମଡ୍ୟୁଲ-IV
ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

ଧର୍ମ -6 : $2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left[\dfrac{2x}{1+x^2}\right] = \cos^{-1}\left[\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right] = \tan^{-1}\left[\dfrac{2x}{1-x^2}\right]$

(i) (ii) (iii) (iv)

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $x = \tan\theta$

(i), (ii), (iii) ଏବଂ (iv) ରେ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$2\tan^{-1}x = 2\tan^{-1}(\tan\theta) = 2\theta$ ... (i)

$$\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{\sec^2\theta}\right)$$

$= \sin^{-1}(2\sin\theta\cos\theta)$

$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$ ... (ii)

$$\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)$$

$$= \cos^{-1}\left[\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}\right]$$

$= \cos^{-1}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \cos^{-1}(\cos 2\theta) = 2\theta$ ... (iii)

$$\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)$$

$= \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$ ... (iv)

(i), (ii), (iii) ଓ (iv) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

ଧର୍ମ -7 :

(i) $\sin^{-1}x = \cos^{1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \sec^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right]$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

(ii) $\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right] = \operatorname{cosec}^{-1}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \cot^{-1}\left[\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

$$= \sec^{-1}\left[\frac{1}{x}\right]$$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ $\sin^{-1}x = \theta \Rightarrow \sin\theta = x$

(i) $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}, \tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \sec\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},$

$\cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ବା $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{x}$

$$\therefore \sin^{-1}x = \theta = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(ii) ମନେକରାଯାଉ $\cos^{-1}x = \theta \Rightarrow x = \cos\theta$

$$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-x^2}, \tan\theta = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \sec\theta = \frac{1}{x}, \cot\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

ଏବଂ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\cos^{-1}x = \sin^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$$= \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ଧର୍ମ 8 : (i) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right]$

(ii) $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

(iii) $\sin^{-1}x - \sin^{-1}y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$

(iv) $\cos^{-1} - \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$

ପ୍ରମାଣ : (i) ମନେକରାଯାଉ $x = \sin\theta$, $y = \sin\phi$,
ତେଣୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \theta + \phi$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin^{-1}(\sin\theta\cdot\cos\phi + \cos\theta\cdot\sin\phi)$

$= \sin^{-1}[\sin(\theta+\phi)] = \theta + \phi$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

(ii) ମନେ କରାଯାଉ $x = \cos\theta$ ଏବଂ $y = \cos\phi$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\theta + \phi$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos^{-1}(\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi)$

$= \cos^{-1}[\cos(\theta+\phi)] = \theta + \phi$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

(iii) ମନେ କରାଯାଉ $x = \sin\theta$, $y = \sin\phi$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\theta - \phi$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right]$

$$= \sin^{-1}\left[\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi} - \sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta}\right]$$

$= \sin^{-1}[\sin\theta\cos\phi - \cos\theta\sin\phi]$

$= \sin^{-1}[\sin(\theta-\phi)] = \theta - \phi$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିରପାର୍ଶ୍ୱ

(iv) ମନେ କରାଯାଉ $x = \cos\theta$, $y = \cos\phi$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\theta - \phi$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos^{-1}[\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\cdot\sin\phi]$

$= \cos^{-1}[\cos(\theta-\phi)] = \theta - \phi$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 18.5 **ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :**

$$\cos\left[\sin^{-1}\frac{3}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right]$$

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \theta$ ଏବଂ $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = \phi$

ତେଣୁ $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ଏବଂ $\sin\phi = \frac{5}{13}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$ ଏବଂ $\cos\phi = \frac{12}{13}$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ରାଶି ହେଲା $\cos(\theta+\phi)$

$$= \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{33}{65}$$

ଉଦାହରଣ 18.6 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$

ସମାଧାନ : ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$,

$\therefore$ ଆମେ ପାଇଲେ $\tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{13}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{7}\times\frac{1}{13}}\right]$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{20}{90}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$$

ଉଦାହରଣ 18.7 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$

$\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \cos^{-1}\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right)$ ଧର୍ମ ପ୍ରୟୋଗ ଦ୍ୱାରା

ଆମେ ପାଇବା $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\times\frac{12}{13} - \sqrt{1-\frac{16}{25}}\sqrt{1-\frac{144}{169}}\right)$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{33}{65}\right)$$

ଉଦାହରଣ 18.8 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan^{-1}\sqrt{x} = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $\sqrt{x} = \tan\theta$ ତେଣୁ, ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \theta$

ଏବଂ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$$= \frac{1}{2}\times 2\theta = \theta$$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 18.9 ସମାଧାନ କର : $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\tan^{-1}x,\ x > 0$

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $x = \tan\theta$,

ତେଣୁ, $\tan^{-1}\left(\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}(\tan\theta)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}-\theta=\frac{1}{2}\theta$$

$$\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore\ x=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ଉଦାହରଣ 18.10 ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

ସମାଧାନ : ମନେକରାଯାଉ $x^2 = \cos 2\theta$

ତେଣୁ $2\theta = \cos^{-1}(x^2)$

$$\Rightarrow \theta=\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ $x^2 = \cos 2\theta$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\cos2\theta}+\sqrt{1-\cos2\theta}}{\sqrt{1+\cos2\theta}-\sqrt{1-\cos2\theta}}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}\right)$$

$$=\tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{4}+\theta$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}(x^2)$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 18.2

1. ନିମ୍ନରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\sin\left[\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (b) $\cot(\tan^{-1}\alpha+\cot^{-1}\alpha)$

(c) $\tan\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}+\cos^{-1}\frac{1-y^2}{1+y^2}\right)$

(d) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)$ (e) $\tan\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{4}\right)$

2. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y = \beta$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର

$x^2 - 2xy\cos\beta + y^2 = \sin^2\beta$

3. $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y + \cos^{-1}z = \pi$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$

4. ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin^{-1}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{2}$ (b) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

(c) $\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{27}{11}$ (d) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ପରିସରକୁ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ସୀମିତ କଲେ, ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସ୍ଥିତି ସମ୍ଭବ ହୋଇଥାଏ ।

(i) $\sin^{-1}x = y$ ହୁଏ ଯଦି $\sin y = x$ ଯେଉଁଠି $-1 \le x \le 1,\ -\frac{\pi}{2}\le y\le\frac{\pi}{2}$

(ii) $\cos^{-1}x = y$ ହୁଏ, ଯଦି $\cos y = x$ ଯେଉଁଠି $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \pi$

(iii) $\tan^{-1}x = y$ ହୁଏ, ଯଦି $\tan y = x$ ଯେଉଁଠି $x\in R,\ -\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$

(iv) $\cot^{-1}x = y$ ହୁଏ, ଯଦି $\cot y = x$ ଯେଉଁଠି $x \in R,\ 0 < y < \pi$

(v) $\sec^{-1}x = y$ ହୁଏ, ଯଦି $\sec y = x$ ଯେଉଁଠି $x\ge 1,\ 0\le y\le\frac{\pi}{2}$ ବା $x\le -1, \frac{\pi}{2}<y\le\pi$

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1}x = y$ ହୁଏ, ଯଦି $\operatorname{cosec} y = x$ ଯେଉଁଠି $x\ge 1,\ 0<y\le\frac{\pi}{2}$

ବା $x\le -1,\ -\frac{\pi}{2}\le y<0$

- ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଅକ୍ଷରେଖାଦ୍ୱୟର ଅଦଳବଦଳ କରି ପ୍ରତିଲୋମ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନକୁ ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।
- **ଧର୍ମ :**

(i) $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$, $\tan^{-1}(\tan\theta) = \theta$, $\tan(\tan^{-1}\theta) = \theta$ ଓ $\sin(\sin^{-1}\theta) = \theta$

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\cot^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$, $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

(iv) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

(v) $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

(vi) $2\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

(vii) $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$$= \sec^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

(viii) $\sin^{-1} x \pm \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left[x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right]$

(ix) $\cos^{-1} y \pm \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy \mp y\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}\right]$

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{8}{17}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{77}{85}\right)$ (b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

(c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right)$

2. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{23}{11}\right)$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\tan^{-1}2$

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

3. (a) ପ୍ରମାଣ କର : $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$

(b) ପ୍ରମାଣ କର : $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$

(c) ପ୍ରମାଣ କର : $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{2}}\right)=2\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+x}{2}}\right)$

4. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}$

(b) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}\right)=\frac{\pi}{4}-x$

(c) $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=0$

5. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର :

(a) $\tan^{-1}2x+\tan^{-1}3x=\frac{\pi}{4}$

(b) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\,\mathrm{cosec}\,x)$

(c) $\cos^{-1}x+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}x\right)=\frac{\pi}{6}$

(d) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12},\ x>0$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 18.1

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $-\frac{\pi}{4}$ (c) $-\frac{\pi}{3}$ (d) $-\frac{\pi}{3}$ (e) $\frac{\pi}{4}$

2. (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1 (e) –2

3. (a) $\sqrt{1+x^2}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}$ (c) $\sqrt{x^4-1}$

   (d) $\frac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$ (e) $\sqrt{\frac{1-x}{x}}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 18.2

1. (a) 1 (b) 0 (c) $\frac{x+y}{1-xy}$ (d) $\frac{5}{12}$ (e) $-\frac{7}{17}$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

5. (a) $\frac{1}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) ± 1 (d) $\sqrt{3}$