୧୭

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ - II

ପୂର୍ବ ପାଠରେ ତୁମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ ଏବଂ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ସହ ଲେଖଚିତ୍ରର ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିଛ । ଏହି ପାଠରେ ଆମେ $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ ଏବଂ $\tan(A \pm B)$ ଭଳି ଯୋଗ, ବିୟୋଗ ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଆମେ ମଧ୍ୟ କୋଣର ଗୁଣିତକ ଓ ଭଗ୍ନ ଅଂଶ ଲାଗି ସୂତ୍ର ସ୍ଥିର କରିବା ଏବଂ ତତ୍ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନମାନ ସମାଧାନ କରିବା । ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ଏହି ପାଠରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- $-x, \frac{x}{2}, x \pm y, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x$ (ଯେଉଁଠି x, y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା)ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ଲେଖିପାରିବ ।
- $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$, $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ ଏବଂ $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \cdot \tan B}$ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟୁତ୍ପତ୍ତି ସ୍ଥିର କରିପାରିବ ।
- ଯୋଗ, ବିୟୋଗ ସୂତ୍ର ମାନ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରଶ୍ନମାନ ସମାଧାନ କରିପାରିବ ।
- $\cos 2A, \sin 2A, \tan 2A, \cos 3A, \sin 3A, \tan 3A, \sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$ ଏବଂ $\tan\frac{A}{2}$ ଆଦି କୋଣମାନଙ୍କର ଗୁଣିତକ ଓ ଭଗ୍ନଅଂଶର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଲାଗି ସୂତ୍ର କହିପାରିବ ।
- ନିମ୍ନ ପ୍ରକାର ସରଳ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିପାରିବ ।

  $\sin x = 0, \cos x = 0, \tan x = 0$

  $\sin x = \sin\alpha, \cos x = \cos\alpha, \tan x = \tan\alpha$

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ।
- ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ।
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ

17.1 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ

ପୂର୍ବପାଠମାନଙ୍କରେ ଆମେ କୋଣର ବୃତ୍ତୀୟ ମାପ, ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ, ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଅନ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛୁ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା A ଓ Bର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଦତ୍ତ ମାନକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମ୍ଭବ କି, ଏହା ଜାଣିବା ପାଇଁ ତୁମେ ଆଗ୍ରହ ପ୍ରକାଶ କରିପାର ।

କିପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସହ, ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ପୃକ୍ତ ତାହା ଦେଖିବ । ଏହା ତୁମକୁ $\frac{\pi}{12}$ ଓ $\frac{5\pi}{12}$ ଆଦିର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରିବ ।

$\frac{\pi}{12}$କୁ $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରି ହେବ ।

$\frac{5\pi}{12}$କୁ $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ।

$\frac{7\pi}{12}$କୁ ଆମେ କିପରି ଯୋଗ ବା ବିୟୋଗ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ?

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ପ୍ରକାରର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବାର ପ୍ରସ୍ତାବ ରଖିଛୁ ।

17.1.1 ଯୋଗ ଲାଗି ସୂତ୍ର

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା A ଓ B ଲାଗି

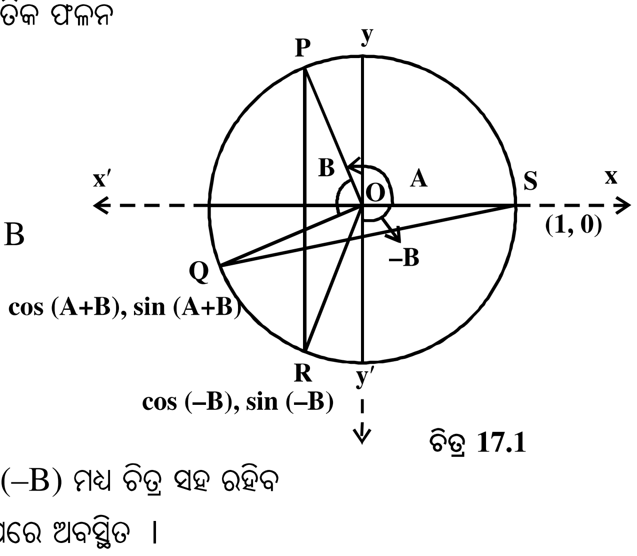
$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ ଚିହ୍ନଟ କର :

$\angle SOP = A$

$\angle POQ = B$

$\angle SOR = -B$



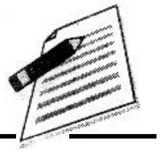
ଚିତ୍ର 17.1

cos (A+B), sin (A+B), cos (–B), sin (–B) ମଧ୍ୟ ଚିତ୍ର ସହ ରହିବ

ଏଠାରେ P, Q, R, S ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

P, Q, R, S ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ଯଥାକ୍ରମେ (cos A, sin A), [cos (A+B), sin (A+B)], [cos (–B), sin (–B)], ଏବଂ (1, 0) ।

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରୁ ଆମେ ପାଉଛୁ, ବାହୁ OP = ବାହୁ OQ



$\angle POR = \angle QOS$ [ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ = $\angle B + \angle QOR$]

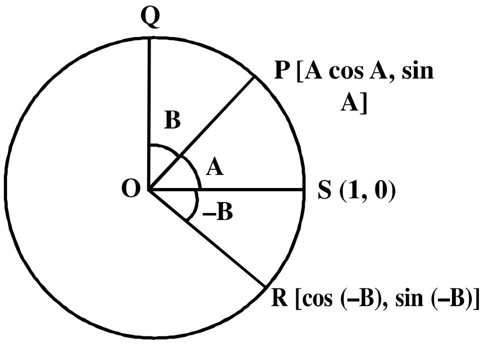
ବାହୁ OR = ବାହୁ OS

$\Delta POR \cong \Delta QOS$ (ବା-କୋ-ବା ସର୍ବସମତା)

$\therefore PR = QS$

$$PR = \sqrt{(\cos A - \cos B)^2 + \{\sin A - \sin(-B)\}^2}$$

$$QS = \sqrt{(\cos(A+B) - 1)^2 + (\sin(A+B) - 0)^2}$$



ଚିତ୍ର 17.2

ଯେହେତୁ $PR^2 = QS^2$

$\therefore \cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B + \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B$

$= \cos^2(A+B) + 1 - 2\cos(A+B) + \sin^2(A+B)$

$\Rightarrow 1 + 1 - 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) = 1 + 1 - 2\cos(A+B)$

$\Rightarrow \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos(A+B)$ ... (1)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା A ଓ B ଲାଗି $\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ପ୍ରମାଣ : ଉକ୍ତି (1) ରେ ଥିବା B ସ୍ଥାନରେ –B ବସାଅ ।

$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା A ଓ B ଲାଗି

$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

ପ୍ରମାଣ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \sin A$

ଏବଂ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$

$$\therefore \sin(A+B) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A+B)\right]$$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - A\right) - B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right)\cdot\sin B$$

ବା, $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା A ଓ B ଲାଗି

$$\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

ପ୍ରମାଣ : ଉକ୍ତି (2)ରେ ଥିବା B ସ୍ଥାନରେ (–B) ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\sin(A + (-B)) = \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B)$$

ବା, $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

ଉଦାହରଣ 17.1

(a) ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin\frac{5\pi}{12}$ (ii) $\cos\frac{\pi}{12}$ (iii) $\cos\frac{7\pi}{12}$

(b) $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}, \sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A + B = \frac{\pi}{4}$ ।

ସମାଧାନ :

(a) (i) $$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ $\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$

(iii) $$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(b) sin (A+B) = sin A cos B + cos A sin B

$\cos A = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ଏବଂ $\cos B = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\therefore \sin(A+B) = \frac{1}{\sqrt{10}}\times\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{50}} + \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

ବା, $A + B = \frac{\pi}{4}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.1

1. (a) ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin\frac{\pi}{12}$ (ii) $\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}$

(b) ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right) = \frac{1}{2}(\cos A + \sqrt{3}\sin A)$

(ii) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$

(c) $\sin A = \frac{8}{17}$ ହେଲେ ଏବଂ $\sin B = \frac{5}{13}$ ହେଲେ, sin (A – B)ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

2. (a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(b) ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

(iii) cos (n+1) A·cos (n–1) A + sin (n+1)A·sin (n–1)A = cos 2A

(iv) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\cos(A+B)$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\cdot\tan B}$

ପ୍ରମାଣ : $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$$

[ଲବ ଓ ହର ଉଭୟକୁ cos A cos B ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ]

$$\Rightarrow \tan(A+B)=\frac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cdot\cos B}}$$

ବା, $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ ... (3)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 5 : $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\cdot\tan B}$

ପ୍ରମାଣ : ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉକ୍ତି (3) ରେ ଥିବା B ସ୍ଥାନରେ –B ବସାଇଲେ, ଆମେ ଆବଶ୍ୟକ ଫଳାଫଳ ପାଇବା ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 6 : $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

ପ୍ରମାଣ : $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

$$\Rightarrow \cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

[ଲବ ଓ ହର ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ sin A·sin B ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଏହି ଫଳାଫଳ ମିଳନ]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 7 : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

ପ୍ରମାଣ : $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan A}$

$$=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}\left[\because \tan\frac{\pi}{4}=1\right]$$

ପୂର୍ବପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ, $\tan\left(\frac{\pi}{4}-A\right)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$

ଉଦାହରଣ 17.2 $\tan\frac{\pi}{12}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

$$\therefore\ \tan\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$$

ଉଦାହରଣ 17.3

ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}}=\tan\frac{4\pi}{9}$

(b) $\tan 7A-\tan 4A-\tan 3A=\tan 7A\cdot\tan 4A\cdot\tan 3A$

(c) $\tan\frac{7\pi}{18}=\tan\frac{\pi}{9}+2\tan\frac{5\pi}{18}$

ସମାଧାନ : (a) ଲବ ଓ ହରକୁ $\cos\frac{7\pi}{36}$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $=\dfrac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}}=\dfrac{1+\tan\frac{7\pi}{36}}{1-\tan\frac{7\pi}{36}}$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{7\pi}{36}}{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{7\pi}{36}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{7\pi}{36}\right)$$

$= \tan\frac{16\pi}{36} = \tan\frac{4\pi}{9}$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

(b) $\tan 7A = \tan(4A+3A) = \frac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \cdot \tan 3A}$

ବା, $\tan 7A - \tan 7A \cdot \tan 4A \cdot \tan 3A = \tan 4A + \tan 3A$

ବା, $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \cdot \tan 4A \cdot \tan 3A$

(c) $\tan\frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{5\pi}{18}+\frac{2\pi}{18}\right) = \frac{\tan\frac{5\pi}{18}+\tan\frac{2\pi}{18}}{1-\tan\frac{5\pi}{18}\cdot\tan\frac{2\pi}{18}}$

$\Rightarrow \tan\frac{7\pi}{18} - \tan\frac{7\pi}{18}\cdot\tan\frac{5\pi}{18}\cdot\tan\frac{2\pi}{18} = \tan\frac{5\pi}{18}+\tan\frac{2\pi}{18}$ ... (1)

$\tan\frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{9}\right) = \cot\frac{\pi}{9} = \cot\frac{2\pi}{18}$

∴ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉକ୍ତି (I)କୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$\tan\frac{7\pi}{18} - \cot\frac{2\pi}{18}\tan\frac{5\pi}{18}\cdot\tan\frac{2\pi}{18} = \tan\frac{5\pi}{18}+\tan\frac{\pi}{9}$

$\therefore \tan\frac{7\pi}{18} = \tan\frac{\pi}{9} + 2\tan\frac{5\pi}{18}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.2

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right) =$.................. (ii) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) =$...........

2. (a) ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 1$ (ii) $\cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

(iii) $\tan\frac{\pi}{12}+\tan\frac{\pi}{6}+\tan\frac{\pi}{12}\cdot\tan\frac{\pi}{6} = 1$

(b) $\sin A = \frac{a}{b}, \tan B = \frac{c}{d}$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan(A+B) = \frac{ad+bc}{bd-ac}$

(c) $\cos\frac{11\pi}{12}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

3. (a) ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right)=-1$

(ii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

(iii) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

17.2 ଗୁଣନରୁ ଯୋଗ ଓ ଯୋଗରୁ ଗୁଣନକୁ ରୂପାନ୍ତରଣ :

17.2.1 ଗୁଣନରୁ ଯୋଗ ବା ବିୟୋଗକୁ ରୂପାନ୍ତରଣ :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A \text{ sn } B$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ସୂତ୍ରକୁ ଯୋଗ କଲେ ଓ ପ୍ରଥମରୁ ଦ୍ୱିତୀୟକୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ପାଇବା

$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ ... (1)

ଏବଂ $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ ... (2)

ପୂର୍ବ ପରି ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ସୂତ୍ରକୁ ଯୋଗକରି ଓ ଚତୁର୍ଥରୁ ତୃତୀୟକୁ ବିୟୋଗ କରି ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ପାଇବା

$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$ ... (3)

ଏବଂ $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ ... (4)

ପ୍ରାପ୍ତ ଫଳଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ କହିପାରିବା

2 sin A cos B = sin (ଯୋଗ) + sin (ବିୟୋଗ)

2 cos A sin B = sin (ଯୋଗ) – sin (ବିୟୋଗ)

2 cos A cos B = cos (ଯୋଗ) + cos (ବିୟୋଗ)

2 sin A sin B = cos (ବିୟୋଗ) – cos (ଯୋଗ)

17.2.2 ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗକୁ ଗୁଣନରେ ରୂପାନ୍ତରଣ

ପୂର୍ବପ୍ରାପ୍ତ ଫଳରେ $A+B=C$ ଏବଂ $A-B=D$ ନିଅ ।

ମଡ୍ୟୁଲ-IV
ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

ତେବେ, $A=\frac{C+D}{2}$ ଏବଂ $B=\frac{C-D}{2}$ ହେବ ଏବଂ

(1), (2), (3), (4) ରୁ ପାଇବା

$$\sin C+\sin D=2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C-\sin D=2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C+\cos D=2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos D-\cos C=2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$$

17.2.3 ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ ସୂତ୍ରର ଅଧିକ ପ୍ରୟୋଗ

ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ

(i) $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

(ii) $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)=\cos^2A-\sin^2B$ ବା, $\cos^2B-\sin^2A$

ପ୍ରମାଣ : (i) $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$

$=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$

$=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$

$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$

$=\sin^2A-\sin^2B$

(ii) $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B)$

$=(\cos A\cos B-\sin A\sin B)(\cos A\cos B+\sin A\sin B)$

$=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$

$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$

$=\cos^2A-\sin^2B$

$=(1-\sin^2A)-(1-\cos^2B)=\cos^2B-\sin^2A$

ଉଦାହରଣ 17.4

ନିମ୍ନ ଗୁଣନଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗ ଅଥବା ବିୟୋଗ ରୂପକୁ ରୂପାନ୍ତରଣ କର :

(i) $2\sin 3\theta\cdot\cos 2\theta$ (ii) $\cos 6\theta\cdot\cos\theta$ (iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}$

ସମାଧାନ :

(i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta=\sin(3\theta+2\theta)+\sin(3\theta-2\theta)$
$=\sin 5\theta+\sin\theta$

(ii) $\cos\ 6\theta\cdot\cos\ \theta = \frac{1}{2}(2\cos 6\theta\cdot\cos\theta)$

$$= \frac{1}{2}[\cos(6\theta+\theta)+\cos(6\theta-\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 7\theta+\cos 5\theta)$$

(iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{5\pi}{12}\cdot\sin\frac{\pi}{12}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{12}\right)-\cos\left(\frac{5\pi+\pi}{12}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{2}\right]$$

ଉଦାହରଣ 17.5

ନିମ୍ନ ଯୋଗଗୁଡ଼ିକୁ ଗୁଣନରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}$ (ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$

ସମାଧାନ :

(i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9} = 2\cos\frac{5\pi+7\pi}{9\times 2}\cdot\cos\frac{5\pi-7\pi}{9\times 2}$

$$= 2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$= 2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{9}$$

$$= -2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} = -\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$$

(ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36} = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{36}\right)+\cos\frac{7\pi}{36}$

$$= \cos\frac{13\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$$

$$= 2\cos\frac{13\pi+7\pi}{36\times 2}\cos\frac{13\pi-7\pi}{36\times 2}$$

$$= 2\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{12}$$

ଉଦାହରଣ 17.6

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{\cos 7A - \cos 9A}{\sin 9A - \sin 7A} = \tan 8A$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{2\sin\frac{7A+9A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}{2\cos\frac{9A+7A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}$

$= \dfrac{\sin 8A \sin A}{\cos 8A \sin A} = \dfrac{\sin 8A}{\cos 8A} = \tan 8A =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 17.7

ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - A\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \sin(A+B)\cos(A-B)$

(ii) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

ସମାଧାନ :

(i) $\cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B)\cos(A-B)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \cos\left[\frac{\pi}{4} - A + \frac{\pi}{4} - B\right]\cos\left[\frac{\pi}{4} - A - \frac{\pi}{4} + B\right]$

$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (A+B)\right]\cos[-(A-B)]$

$= \sin(A+B)\cos(A-B) =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ।

(ii) $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B)\sin(A-B)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗକରି ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{A}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{A}{2}\right)$

$= \sin\frac{\pi}{4}\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin A =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ।

ଉଦାହରଣ 17.8

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{16}$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ : $\cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[2\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$ $\qquad\left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$

$=\frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$

$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[2\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{\pi}{9}\right]$

$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right]$

$=\frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\cos\frac{5\pi}{9}+\frac{1}{16}+$ $\qquad$ ... (1)

ବର୍ତ୍ତମାନ $\cos\frac{5\pi}{9}=\cos\left[\pi-\frac{4\pi}{9}\right]=-\cos\frac{4\pi}{9}$ ... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ ଆମେ ପାଇବା

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\frac{1}{16}$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.3

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ଯୋଗ ବା ବିୟୋଗ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର :

(a) $2\cos 3\theta \sin 2\theta$ $\qquad$ (b) $2\sin 4\theta\cdot\sin 2\theta$

(c) $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$ $\qquad$ (d) $2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ଗୁଣନ ରୂପେ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sin 6\theta+\sin 4\theta$ $\qquad$ (b) $\sin 7\theta-\sin 3\theta$

(c) $\cos 2\theta-\cos 4\theta$ $\qquad$ (d) $\cos 7\theta+\cos 5\theta$

3. ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sin\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$ $\qquad$ (b) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{18}}{\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}}=1$

(c) $\sin\frac{5\pi}{18} - \sin\frac{7\pi}{18} + \sin\frac{\pi}{18} = 0$ (d) $\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} = 0$

4. ପ୍ରମାଣ କର : (a) $\sin^2(n+1)\theta - \sin^2 n\theta = 2\sin(2n+1)\theta \cdot \sin\theta$

(b) $\cos\beta\cos(2\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha-\beta)$

(c) $\cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$ ର ମାନ θ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ନାହିଁ ।

6. ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\frac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$

(b) $\sin\frac{\pi}{18} \cdot \sin\frac{5\pi}{6} \sin\frac{5\pi}{18} \sin\frac{7\pi}{18} = \frac{1}{16}$

(c) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$

17.3 କୋଣ-ଗୁଣିତକର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ

(a) sin 2A କୁ sin A, cos A ଓ tan A ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା

ଆମେ ଜାଣୁ,

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \cdot$$

B = A ନେଲେ, ପାଇବା :

$$\sin 2A = \sin A\cos A + \cos A\sin A$$
$$= 2\sin A\cos A$$

∴ sin 2A କୁ ମଧ୍ୟ ଲେଖିପାରିବା :

$$\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A + \cos^2 A} \quad [\because 1 = \cos^2 A + \sin^2 A]$$

$$\sin 2A = \frac{2\frac{\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

[ଲବ ଓ ହର ଉଭୟକୁ $\cos^2 A$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ]

$$= \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(b) cos 2A କୁ sin A, cos A ଓ tan A ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ଆମେ ଜାଣୁ :

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

ଉପରିସ୍ଥ ଉକ୍ତିରେ B = A ନିଆଯାଉ,

ଆମେ ପାଇବା

$$\cos 2A = \cos A \cdot \cos A - \sin A \cdot \sin A$$

ବା, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

ପୁନଶ୍ଚ, $\cos 2A = \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$

ଅର୍ଥାତ୍, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \Rightarrow \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

ପୁନଶ୍ଚ, $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

ଅର୍ଥାତ୍, $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \Rightarrow \sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

$$\therefore \cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

ଡାହାଣ ପାଖର ଲବ ଓ ହରକୁ $\cos^2 A$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ, ପାଇବା

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(c) tan 2A କୁ tan A ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

$$\tan 2A = \tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \cdot \tan A}$$

$$= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

ଆମେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇଲେ :

$$\sin 2A = 2\sin A \cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}, \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

ଉଦାହରଣ 17.9

$A=\frac{\pi}{6}$ ହେଲେ, ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(i) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

(iii) $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

ସମାଧାନ :

(i) $\sin 2A = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2\sin A\cos A = 2\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A} = \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ଏଣୁ ଆମେ ପ୍ରତିପାଦନ କଲେ ଯେ

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(ii) $\cos 2A = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\cos^2 A - \sin^2 A = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$2\cos^2 A - 1 = 2\cos^2\frac{\pi}{6} - 1 = 2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2\times\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2\sin^2 A = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{6} = 1 - 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2\times\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1-\tan^2\frac{\pi}{6}}{1+\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

ଏଣୁ ଆମେ ପ୍ରତିପାଦନ କଲେ ଯେ

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(iii) $\tan 2A = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

$$\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} = \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan^2\frac{\pi}{6}} = \frac{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2} = \sqrt{3}$$

ଏଣୁ ଆମେ ପ୍ରତିପାଦନ କଲେ ଯେ $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

ଉଦାହରଣ 17.10 ପ୍ରମାଣ କର ଯେ : $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

ସମାଧାନ : $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \dfrac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \dfrac{\sin A}{\cos A} = \tan A$

ଉଦାହରଣ 17.11

ପ୍ରମାଣ କର : $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

ସମାଧାନ : $\cot A - \tan A = \dfrac{1}{\tan A} - \tan A$

$$= \frac{1-\tan^2 A}{\tan A}$$

$$= \frac{2(1-\tan^2 A)}{2\tan A}$$

$$= \frac{2}{\left(\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right)}$$

$$= \frac{2}{\tan 2A} = 2\cot 2A$$

ଉଦାହରଣ 17.12 $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8} = \dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \dfrac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2}$

$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)}{2\sqrt{2}} = 1$$

ଉଦାହରଣ 17.13 ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\cos A}{1-\sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right)$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{A}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{A}{2}}$

$$= \frac{1+\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1-\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}} = \frac{\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\left(\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

[ଲବ ଓ ହର ଉଭୟକୁ $\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2}$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରି]

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}-2\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos A}{1-\sin A} = \text{ବାମପାର୍ଶ୍ୱ}$$

ଉଦାହରଣ 17.14

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ସମାଧାନ : $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$

$= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta)$

$= 2\{1 - \cos(\alpha-\beta)\}$

$$= 2\times 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.4

1. $A = \frac{\pi}{3}$ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

(b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

2. $0 < A < \frac{\pi}{2}$ ଧରିନେଇ sin 2Aର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ ଦତ୍ତ ଅଛି -

(a) $\cos A = \dfrac{3}{5}$ (b) $\sin A = \dfrac{12}{13}$ (c) $\tan A = \dfrac{16}{63}$

3. cos 2Aର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ ଦତ୍ତ ଅଛି

(a) $\cos A = \dfrac{15}{17}$ (b) $\sin A = \dfrac{4}{5}$ (c) $\tan A = \dfrac{5}{12}$

4. tan 2Aର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ ଦତ୍ତ ଅଛି

(a) $\tan A = \dfrac{3}{4}$ (b) $\tan A = \dfrac{a}{b}$

5. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\dfrac{1+\sin 2A}{1-\sin 2A} = \tan^2\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)$ (b) $\dfrac{\cot^2 A+1}{\cot^2 A-1} = \sec 2A$

7. (a) ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin 2A}{1-\cos 2A} = \cos A$

(b) ପ୍ରମାଣ କର : $\tan A + \cot A = 2\,\text{cosec}\,2A$

8. (a) ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\cos A}{1+\sin A} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{A}{2}\right)$

(b) ପ୍ରମାଣ କର : $(\cos\alpha+\cos\beta)^2 + (\sin\alpha-\sin\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

17.3.1 Aର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ମାଧ୍ୟମରେ 3Aର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ପରିପ୍ରକାଶ

(a) **sin A ମାଧ୍ୟମରେ sin 3Aର ପରିପ୍ରକାଶ**

ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରରେ B ସ୍ଥାନରେ 2A ବସାଇବା

$\sin (A+2B) = \sin A \cos 2B + \cos A \sin 2B$

$= \sin (A + 2A) = \sin \cos 2A + \cos A \sin 2A$

$= \sin A(1-2\sin^2 A) + (\cos A \times 2 \sin A \cos A)$

$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A (1-\sin^2 A)$

$= \sin A - 2 \sin^3 A + 2 \sin A - 2 \sin^3 A$

$\therefore \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(b) **cos A ମାଧ୍ୟମରେ cos 3Aର ପରିପ୍ରକାଶ**

ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରରେ ଥିବା B ସ୍ଥାନରେ 2A ବସାଇବା

$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, ଆମେ ପାଇବା

$=\cos (A+2A) = \cos A \cdot \cos 2A - \sin A \cdot \sin 2A$

$= \cos A(2 \cos^2 A-1) - (\sin A)\, 2 \sin A \cos A$

$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A (1-\cos^2 A)$

$= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A + 2 \cos^3 A$

$\therefore \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(c) **tan A ମାଧ୍ୟମରେ tan 3A ର ପରିପ୍ରକାଶ**

ଆମେ ଜାଣୁ : $\tan (A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

ଉପରିସ୍ଥ ସୂତ୍ରରେ ଥିବା B ସ୍ଥାନରେ 2A ବସାଇଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$\tan (A + 2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A}$$

$$= \frac{\tan A + \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{1 - \tan A \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A - \tan^3 A + 2 \tan A}{1 - \tan^2 A}}{\dfrac{1 - \tan^2 A - 2 \tan^2 A}{1 - \tan^2 A}}$$

$$= \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

(d) **$\sin^3 A$ ଓ $\cos^3 A$ ଲାଗି ସୂତ୍ର**

$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

$\therefore$ $4 \sin^3 A = 3 \sin A - \sin 3A$

ବା, $\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$

ସେହିପରି $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3 \cos A$

$\therefore$ $3 \cos A + \cos 3A = 4 \cos^3 A$

ବା, $\cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$

ଏଣୁ ଆମେ ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପାଇଲେ :

$\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

$$\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

$$\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}$$

$$\cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$$

ଉଦାହରଣ 17.15

$A = \frac{\pi}{4}$ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(i) $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(ii) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3 \cos A$

(iii) $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

ସମାଧାନ :

(i) $\sin 3A = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$3\sin A - 4\sin^3 A = 3\sin\frac{\pi}{4} - 4\sin^3\frac{\pi}{4} = 3\times\frac{1}{\sqrt{2}} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ଏଣୁ ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା ଯେ $\sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A$

(ii) $$\cos 3A = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4\cos^3 A - 3\cos A = 4 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ଏଣୁ ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା ଯେ $\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$

(iii) $$\tan 3A = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} = \frac{3 \times 1 - 1^3}{1 - 3 \times 1^2} = \frac{2}{-2} = -1$$

ଏଣୁ ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା ଯେ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

ଉଦାହରଣ 17.16

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$

ସମାଧାନ :

$$\cos 3\theta = 4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta$$

$$= 4\left\{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right\}^3 - 3 \times \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

$$= 4 \times \frac{1}{8}\left(a^3 + 3a^2 \times \frac{1}{a} + 3a \times \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) - \frac{3a}{2} - \frac{3}{2a}$$

$$= \frac{a^3}{2} + \frac{1}{2a^3} = \frac{1}{2}\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right)$$

ଉଦାହରଣ 17.17

ପ୍ରମାଣ କର : $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{4}\sin 3\alpha$

ସମାଧାନ : $\sin\alpha \sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[1-2\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2\times\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha\right]$$

$$=\sin\alpha\left[\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right]=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

ଉଦାହରଣ 17.18

ପ୍ରମାଣ କର : $\cos^3 A\sin 3A+\sin^3 A\cos 3A=\frac{3}{4}\sin 4A$

ସମାଧାନ :

$\cos^3 A \sin 3A + \sin^3 A \cos 3A$

$= \cos^3 A\,(3\sin A - 4\sin^3 A) + \sin^3 A\,(4\cos^3 A - 3\cos A)$

$= 3\sin A\cos^3 A - 4\sin^3 A\cos^3 A + 4\sin^3 A\cos^3 A - 3\sin^3 A\cos A$

$= 3\sin A\cos^3 A - 3\sin^3 A\cos A$

$= 3\sin A\cos A\,(\cos^2 A - \sin^2 A) = 3(\sin A\cos A)\cos 2A$

$$=\frac{3\sin 2A}{2}\times\cos 2A=\frac{3}{2}\frac{\sin 4A}{2}=\frac{3}{4}\sin 4A$$

ଉଦାହରଣ 17.19

ପ୍ରମାଣ କର : $\cos^3\frac{\pi}{9}+\sin^3\frac{\pi}{18}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right)$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $=\frac{1}{4}\left[3\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right]+\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]=$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.5

1. $A=\frac{\pi}{3}$ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(a) $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ (b) $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

(c) $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

2. sin 3A ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ (a) $\sin A = \dfrac{2}{3}$ (b) $\sin A = \dfrac{p}{q}$

3. cos 3A ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେତେବେଳେ (a) $\cos A = -\dfrac{1}{3}$ (b) $\cos A = \dfrac{c}{d}$

4. ପ୍ରମାଣ କର : $\cos\alpha \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right) = \dfrac{1}{4}\cos 3\alpha$

5. (a) ପ୍ରମାଣ କର : $\sin^3 \dfrac{2\pi}{9} - \sin^3 \dfrac{\pi}{9} = \dfrac{3}{4}\left(\sin\dfrac{2\pi}{9} - \sin\dfrac{\pi}{9}\right)$

(b) ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin 3A}{\sin A} - \dfrac{\cos 3A}{\cos A}$ ଧ୍ରୁବକ ।

6. (a) ପ୍ରମାଣ କର : $\cot 3A = \dfrac{\cot^3 A - 3\cot A}{3\cot^2 A - 1}$

(b) ପ୍ରମାଣ କର : $\cos 10A + \cos 8A + 3\cos 4A + 3\cos 2A = 8\cos A \cos^3 3A$

17.4 ବିଭାଜିତ କୋଣ (Submultiple angles)ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ

$\dfrac{A}{2}, \dfrac{A}{3}, \dfrac{A}{4}$ ହେଉଛନ୍ତି Aର ବିଭାଜିତ କୋଣ ।

ଏହା ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଛି ଯେ

$$\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}, \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}, \tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକରେ ଥିବା A ସ୍ଥାନରେ $\dfrac{A}{2}$ ବସାଇଲେ, ଆମେ ବିଭାଜିତ କୋଣ $\dfrac{A}{2}$ ଲାଗି ନିମ୍ନ ସୂତ୍ର ପାଇପାରିବା ।

$$\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\ \cos A = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \text{ ଏବଂ } \tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

$\dfrac{A}{2}$ ର ଫଳନ ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥିଲେ, ଆମେ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ଗ୍ରହଣ କରିବା, ଏବଂ $\dfrac{A}{2}$ ର ଫଳନ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇଥିଲେ, ଆମେ ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ଗ୍ରହଣ କରିବା ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 17.20

$\cos\frac{\pi}{12}$ ଏବଂ $\cos\frac{\pi}{24}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣିଥିବା ସୂତ୍ର : $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ ଏଠାରେ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ନେବା, କାରଣ $\cos\frac{\pi}{12}$ ଓ $\cos\frac{\pi}{24}$ ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ।

$$\cos\frac{\pi}{12} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{6}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2\times 2}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{8}} \left[\because 4+2\sqrt{3} = 1+3+2\sqrt{3} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\frac{\pi}{24} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}}$$

ଉଦାହରଣ 17.21

$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ ଏବଂ $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣୁ : $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$

$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ ଋଣାତ୍ମକ ।

ତେଣୁ ସୂତ୍ରର ରଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନକୁ ନେବା

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1-\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

ସେହିପରି, $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

ଉଦାହରଣ 17.22

$\cos A = \frac{7}{25}$ ଓ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ ହେଲେ, ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin\frac{A}{2}$ (ii) $\cos\frac{A}{2}$ (iii) $\tan\frac{A}{2}$

ସମାଧାନ :

$\because \frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ ଅର୍ଥାତ୍ A ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$$\Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{A}{2} < \pi$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} > 0, \cos\frac{A}{2} < 0, \tan\frac{A}{2} < 0$$

$$\therefore \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

ଏବଂ $$\tan\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{1+\frac{7}{25}}} = -\sqrt{\frac{18}{32}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.6

1. $A = \frac{\pi}{3}$ ହେଲେ, ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(a) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ (b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

(c) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

2. $\sin\frac{\pi}{12}$ ଓ $\sin\frac{\pi}{24}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (a) $\sin\frac{\pi}{8}$ (b) $\cos\frac{\pi}{8}$ (c) $\tan\frac{\pi}{8}$

ଉଦାହରଣ 17.23

ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ଏବଂ $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(b) $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ ଏବଂ $\sin\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ସମାଧାନ :

(a) ଧରି ନିଆଯାଉ $A = \frac{\pi}{10} \Rightarrow 5A = \frac{\pi}{2}$

$$\therefore 2A = \frac{\pi}{2} - 3A$$

$$\therefore \sin 2A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3A\right) = \cos 3A$$

$\therefore$ 2 sin A cos A = 4 $\cos^3 A$ – 3 cos A

ବା, cos A [2 sin A – 4 $\cos^2 A$ + 3] = 0 ... (1)

$\because \cos A \neq 0$ ଏବଂ $1-\sin^2 A = \cos^2 A$

$\therefore (1) \Rightarrow 2\sin A - 4(1-\sin^2 A) + 3 = 0$

$4\sin^2 A + 2\sin A - 1 = 0$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\cos\frac{\pi}{10} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{10}} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

(b) ମନେକରାଯାଉ $A = \frac{\pi}{10} \Rightarrow 2\pi = \frac{\pi}{5}$

$\cos 2A = 1-\sin^2 A$

$$\therefore \cos\frac{\pi}{5} = 1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1-2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right) = \frac{2+2\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

ଉଦାହରଣ 17.24

ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

$\tan\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = \cot\alpha$

ସମାଧାନ :

ଆମକୁ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ

$\tan\alpha - \cot\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$

ବା, $\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$

ବା, $-\frac{2\cos 2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$

ବା, $-2\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$

ବା, $-2\cot 2\alpha + 2\tan 2\alpha + 4\tan 4\alpha + 8\cot 8\alpha = 0$ ... (1)

$-2 \cot 2\alpha + 2 \tan 2\alpha$କୁ ଏକତ୍ର କଲେ,

ଉକ୍ତି (1) ହେବ $-4 \cot 4\alpha + 4 \tan 4\alpha + 8 \cot 8\alpha = 0$ ... (2)

$-4\cot 4\alpha + 4 \tan 4\alpha$କୁ ଏକତ୍ର କଲେ, ଉକ୍ତି (2) ହେବ

$-8 \cot 8\alpha + 8 \cot 8\alpha = 0 =$ (2)ର ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ।

17.5 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମୀକରଣ :

ତୁମେ ବୀଜଗଣିତର ସରଳ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ, ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣ ଆଦି ସହ ସୁପରିଚିତ । ସେଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପଦ୍ଧତି ମଧ୍ୟ ତୁମେ ଜାଣିଛ ।

ଯଥା : (i) $x - 3 = 0$ ରୁ ଆମେ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଅର୍ଥାତ୍ xର ମୂଲ୍ୟ ପାଇଥାଉ ।

(ii) $x^2 - 9 = 0$ରୁ ଆମେ ଦୁଇଟି ମୂଳ ପାଇଥାଉ ।

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିଥିବ ଯେ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସଂଖ୍ୟା ଏହାର ଘାତ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

x ଓ y ଭଳି ଅଜ୍ଞାତରାଶି ବଦଳରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ରହିଲେ କ'ଣ ହେବ ଆସ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଏହିପରି ସମୀକରଣ $\sin\theta - 1 = 0$ ର ସମାଧାନ ହେବ

$\sin\theta = 1$ ଏବଂ $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$

17.5.1 $\sin\theta=0$ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $\sin\theta = 0$

କିନ୍ତୁ, ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\sin 0, \sin\pi, \sin 2\pi, \ldots, \sin n\pi$ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ 0 ।

$\therefore\ \theta = n\pi, n \in N$

ମାତ୍ର ଆମେ ଜାଣୁ $\sin(-\theta) = -\sin\theta = 0$

$\therefore\ \sin(-\pi), \sin(-2\pi), \sin(-3\pi), \ldots, \sin(-n\pi) = 0$

$\therefore\ \theta = n\pi, n \in I$

ଏଣୁ $\sin\theta = 0$ ଭଳି ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ହେଉଛି

$\theta = n\pi$ ଯେଉଁଠି n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ।

17.5.2 $\cos\theta=0$ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ଅଛି, $\cos\theta = 0$

ମାତ୍ର ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ । ଏଣୁ θର ପ୍ରଥମ ମାନ ହେଲା

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ... (1)

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ cos $(\pi+\theta) = -\cos\theta$ ବା, $\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\frac{\pi}{2} = 0$

ବା, $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$

ସେହିଭଳି ଭାବରେ ଆମେ ପାଇପାରିବା

$\cos\frac{5\pi}{2}, \cos\frac{7\pi}{2}, \cos\frac{9\pi}{2}, \ldots \cos(2n+1)\frac{\pi}{2}$ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମାନ 0 ।

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in N.$

ମାତ୍ର ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\therefore \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = \ldots = \cos\left\{-(2n+1)\frac{\pi}{2}\right\} = 0$

$\therefore \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$

ଏଣୁ, $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ ହେଉଛି $\cos\theta = 0$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ,

ଯେଉଁଠି n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ।

17.5.3 tan θ=0 ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ଅଛି, $\tan\theta = 0$

ବା $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$ ବା $\sin\theta = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ $\theta = n\pi, n \in I$

ଯେଉଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମୀକରଣର ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ ଶୂନ, ସେପରି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କଲେ । ଯେଉଁ ସମୀକରଣର ଦକ୍ଷିଣ ପାଖରେ ଶୂନ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କିଛି ଥାଏ, ସେପରି ସମୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$\sin\theta = \sin\alpha$

$\Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$

$\therefore$ ହୁଏତ $\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$ ବା $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ ବା $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi, p, q \in I$

$\Rightarrow \theta = (2p+1)\,\pi - \alpha$ ବା $\theta = 2q\pi + \alpha$ ... (1)

(1)ରୁ ଆମେ ପାଇବା $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in I$, ଏହା ହେଉଛି $\sin\theta = \sin\alpha$ର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ।

17.5.5 $\cos\theta = \cos\alpha$ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ଅଛି $\cos\theta = \cos\alpha$

$\Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow -2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\therefore$ ହୁଏତ $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ ବା $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = p\pi$ ବା $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in I$

$\Rightarrow \theta = 2p\pi - \alpha$ ବା $\theta = 2q\pi + \alpha$ ... (1)

ପୂର୍ବୋକ୍ତ (1)ରୁ ଆମେ ପାଇବା

$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in I$ ହେଉଛି

$\cos\theta = \cos\alpha$ର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ।

17.5.6 $\tan\theta = \tan\alpha$ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଦତ୍ତ ଅଛି, $\tan\theta = \tan\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = 0$

$\Rightarrow \sin(\theta - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \theta - \alpha = n\pi,\ n \in I$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \alpha,\ n \in I$

ସେହିପରି $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ ଲାଗି ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ହେଉଛି

$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$

ଏବଂ $\sec\theta = \sec\alpha$ ପାଇଁ ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ହେଉଛି

$\theta = 2n\pi \pm \alpha$

ଏବଂ $\cot\theta = \cot\alpha$ ପାଇଁ ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ହେଉଛି

$\theta = n\pi + \alpha$

ଯଦି $\sin^2\theta = \sin^2\alpha$ ହୁଏ, ତେବେ

$$\frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha \; n \in I$

$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha$

ସେହିପରି, ଯଦି $\cos^2\theta = \cos^2\alpha$ ହୁଏ, ତେବେ

$\alpha = n\pi \pm \alpha, n \in I$

ପୁନଶ୍ଚ ଯଦି $\tan^2\theta = \tan^2\alpha$, ତେବେ

$$\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$$

$\Rightarrow \cos 2\theta = \cos 2\alpha$

$\Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm 2\alpha$

$\Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$ ହେଉଛି ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ।

ଉଦାହରଣ 17.25 ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ମାନଙ୍କ ଲାଗି ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$ (d) $4\sin^2\theta = 1$

ସମାଧାନ :

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in I$$

(ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

$$\therefore \theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, n \in I$$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I$$

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

$$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$

$$\therefore \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in I$$

(d) $4\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in I$$

ଉଦାହରଣ 17.26 ନିମ୍ନ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ କର :

(a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$ (b) $\cos 4x = \cos 2x$

(c) $\cos 3x = \sin 2x$ (d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

ସମାଧାନ :

(a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow 2(1-\sin^2\theta) + 3\sin\theta = 0 \Rightarrow 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0 \Rightarrow 2\sin\theta + 1 = 0$ ବା $\sin\theta - 2 = 0$

$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$ ବା $\sin\theta = 2$

$\because\ \sin\theta = 2$ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ

$\therefore \sin\theta = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{7\pi}{6},\ n \in I$

(b) $\cos 4x = \cos 2x$

ଅର୍ଥାତ୍ $\cos 4x - \cos 2x = 0 \Rightarrow -2\sin 3x \sin x = 0$

$\Rightarrow \sin 3x = 0$ ବା $\sin x = 0$

$\Rightarrow 3x = n\pi$ ବା $x = n\pi$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}$ ବା $x = n\pi, n \in I$

(c) $\cos 3x = \sin 2x$

$$\Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\Rightarrow 3x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) n \in I$$

କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ନେଇ ଆମେ ପାଇବା

$$3x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$$

$$\Rightarrow 5x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଋଣାତ୍ମକ ଚିହ୍ନ ନେଲେ, ପାଇବା

$$3x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, n \in I$$

(d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

ବା $(\sin 6x + \sin 2x) + \sin 4x = 0$

ବା $2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0$

ବା $\sin 4x [2 \cos 2x +] = 0$

$\therefore \sin 4x = 0$ ବା $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow 4x = n\pi$ ବା $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$

$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{4}$ ବା $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.7

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ଲାଗି θର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$

(iii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ଲାଗି θ ର ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (ii) $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

(iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sec\theta = -\sqrt{2}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି θର ବ୍ୟାପକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\tan\theta = -1$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iii) $\cot\theta = -1$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି θର ବ୍ୟାପକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\sin 2\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ (iii) $\tan 3\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(iv) $\cos 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (v) $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ (vi) $\sin^2 2\theta = \frac{1}{4}$

(vii) $4\cos^2\theta = 1$ (viii) $\cos^2 2\theta = \frac{3}{4}$

5. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣ ଲାଗି ବ୍ୟାପକ ସମାଧାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$

(ii) $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$

(iii) $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

  $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$

  $\cot(A+B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot B + \cot A}, \cot(A-B) = \frac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

$2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$2\sin A \cdot \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

- $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$

  $\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{C-D}{2}$

  $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cdot\cos\frac{C-D}{2}$

  $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cdot\sin\frac{D-C}{2}$

- $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

  $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

- $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

- $\sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}, \cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}, \tan^2 A = \frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$

- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

  $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

- $\sin^3 A = \frac{3\sin A - \sin 3A}{4}, \cos^3 A = \frac{3\cos A + \cos 3A}{4}$

- $\sin\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$

$$\tan\frac{A}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

- $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \cos\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$
- $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in I$, $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in I$

  $\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi, n \in I$
- $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, n \in I$
- $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$
- $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, n \in I$
- $\sin^2\theta = \sin 2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$
- $\cos^2\theta = \cos^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$
- $\tan^2\theta = \tan^2\alpha \Rightarrow \theta = n\pi \pm \alpha, n \in I$

ସହାୟକ ୱେବ୍‌ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ପ୍ରମାଣ କର : $\tan(A+B)\times\tan(A-B) = \frac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$

2. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

3. $A + B = \frac{\pi}{4}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

   (1+tan A) (1+tan B) = 2 ଏବଂ (cot A – 1) (cot B – 1) = 2

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉକ୍ତିକୁ ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{10}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}+A\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}+A\right)=\cos 2A$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{9\pi}{9}=-\frac{1}{8}$ (iv) $\cos\frac{13\pi}{45}+\cos\frac{17\pi}{45}+\cos\frac{43\pi}{45}=0$

(v) $\tan\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin 2A-\sin\frac{\pi}{3}}$

(vi) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$

(vii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta+\sec 2\theta$

(viii) $\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

(ix) $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

(x) $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$

(xi) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{11}{16}$

(xii) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{2}$

5. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି θର ବ୍ୟାପକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

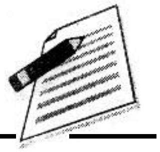
(a) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{2}$

6. ନିମ୍ନ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି θର ବ୍ୟାପକମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ (b) $\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$

(c) $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sec\theta=-2$



7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି ବ୍ୟାପକମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $\tan\theta = 1$ (b) $\tan\theta = -1$ (c) $\cot\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

8. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସମକୀରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କଲାଭଳି θର ବ୍ୟାପକ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $\sin^2\theta = \frac{1}{2}$ (b) $4\cos^2\theta = 1$ (c) $2\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$

9. ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର θର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $\cos p\theta = \cos q\theta$

   (b) $\sin 9\theta = \sin\theta$

   (c) $\tan 5\theta = \cot\theta$

10. ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ସମାଧାନ କର θର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$

   (b) $\tan m\theta + \cot n\theta = 0$

   (c) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$

   (d) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + \sin 4\theta = 0$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.1

1. (a)(i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{21}{221}$

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.2

1. (i) $\frac{\cos^2 A-\sin^2 A}{2}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ 2. (c) $-\frac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.3

1. (a) $\sin 5\theta - \sin \theta$; (b) $\cos 2\theta - \cos 6\theta$

   (c) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{6}$

2. (a) $2 \sin 5\theta \cos \theta$ (b) $2 \cos 5\theta \cdot \sin 2\theta$

   (c) $2 \sin 3\theta \cdot \sin \theta$ (d) $2 \cos 6\theta \cdot \cos \theta$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.4

2. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{120}{169}$ (c) $\frac{2016}{4225}$

3. (a) $\frac{161}{289}$ (b) $\frac{-7}{25}$ (c) $\frac{119}{169}$

4. (a) $\frac{24}{7}$ (b) $\frac{2ab}{b^2-a^2}$

5. 1

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.5

2. (a) $\frac{22}{27}$ (b) $\frac{(3pq^2-4p^3)}{q^3}$ 3. (a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{4c^3-3cd^2}{d^3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.6

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\left(4-\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}}{2\sqrt{2}}$

3. (a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2}-1$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 17.7

1. (i) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in I$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in I$

   (iii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, n \in I$ (iv) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in I$

2. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$ (ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in I$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I$ (iv) $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}, n \in I$

3. (i) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in I$ (ii) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in I$

   (iii) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in I$

4. (i) $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in I$ (ii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I$

   (iii) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in I$ (iv) $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18}, n \in I$

   (v) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$ (vi) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in I$

   (vii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$ (viii) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in I$

5. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in I$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in I$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

5. (a) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in I$ (b) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in I$

   (c) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in I$ (d) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in I$

6. (a) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in I$

(c) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in I$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$

7. (a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in I$ (b) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in I$

(c) $\theta = n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in I$

8. (a) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in I$ (b) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in I$

(c) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in I$

9. (a) $\theta = \frac{2n\pi}{p \mp q}, n \in I$ (b) $\theta = \frac{n\pi}{4}$ ବା $a(2n+1)\frac{\pi}{10}, n \in I$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}, n \in I$

10. (a) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m-n}$ ବା $\frac{2k\pi}{m+n}, k \in I$

(b) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2(m-n)}, k \in I$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ ବା $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in I$

(d) $\theta = \frac{2n\pi}{5}$ ବା $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in I$ ବା $\theta = (2n-1)\pi, n \in I$