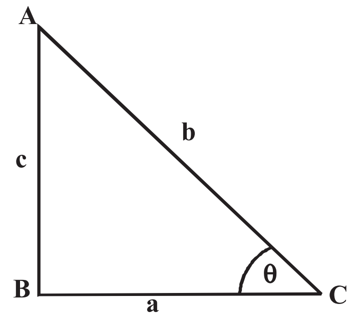
୧୬

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ -I

ଆମେ ପୂର୍ବଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛୁ । ମନେପକାଅ ଯେ ଆମେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଅନୁପାତକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିଥିଲେ ।



ଚିତ୍ର 16.1

$$\sin\theta = \frac{c}{b}, \cos\theta = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{c}{a}$$

ଏବଂ $\operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{c}, \sec\theta = \frac{b}{a}, \cot\theta = \frac{a}{c}$

ଆମେ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ସ୍ଥାପନ କରିଥିଲେ । ସେହି ସମ୍ପର୍କଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

ଏହି ଜ୍ଞାନର ଉପଯୋଗ କରି ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏବଂ ଏହି ପାଠରେ ଫଳନର ଧାରଣା ଉପସ୍ଥାପନ କରିବାର ଚେଷ୍ଟା କରିବା ।

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ଫଳନର ଧାରଣା ମାଧ୍ୟମରେ ତ୍ରିକୋଣମିତି ବିଜ୍ଞାନର ଉପସ୍ଥାପନା କରିବା । ଏଥିପାଇଁ ଏକକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟବହାର କରିବା । ଏହି ପାଠରେ ରେଡିୟାନ୍ ମାପ ପଦ୍ଧତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଓ ନିମ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିବା ।

$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x, y = a\sin x, y = b\cos x$ ଇତ୍ୟାଦି, ଯେଉଁଠି x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

ଆମେ ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ।

$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x,$ ଏବଂ $y = \operatorname{cosec} x, y = a\sin x, y = a\cos x$ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବା ପରେ, ତୁମେ :

- ଧନାତ୍ମକ ଓ ଋଣାତ୍ମକ କୋଣର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- କୋଣ ପରିମାପ ଲାଗି ଡିଗ୍ରୀ ଓ ରେଡିୟାନ୍ ମାପର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- କୋଣମାପକୁ ଡିଗ୍ରୀରୁ ରେଡିୟାନ୍ ଓ ରେଡିୟାନ୍‌ରୁ ଡିଗ୍ରୀକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିପାରିବ;
- r ଓ θ ପ୍ରଚଳିତ ଅର୍ଥ ସହ $l = r\theta$ ସୂତ୍ର ଜାଣିବା ଓ କହିବାରେ ସକ୍ଷମ ହେବା;
- $l = r\theta$ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କରିପାରିବ;

- ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବ;
- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- କୋଣର ସଂଜ୍ଞା ।
- ସରଳକୋଣ, ସମକୋଣ ଓ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ କୋଣର ଧାରଣା;
- ବୃତ୍ତ ଓ ବୃତ୍ତ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଧାରଣା;
- ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ : $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$,
  $(a \pm b)^3 = a^3 + b^3 \pm 3ab\,(a \pm b)$
- ପିଥାଗୋରାସ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ପିଥାଗୋରୀୟ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧାରଣା ।

16.1 କୋଣର ବୃତ୍ତୀୟ ପରିମାପ

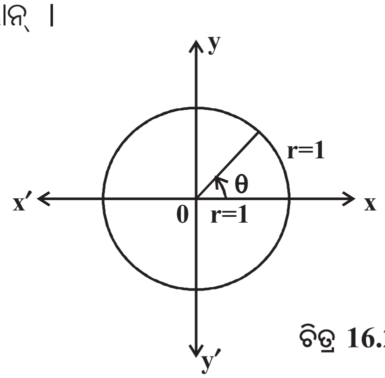
ଏକ କୋଣ ହେଉଛି ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଥିବା ଦୁଇଟି ରଶ୍ମିର ସଂଯୋଗ । ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ଘୂର୍ଣ୍ଣନରୁ ମଧ୍ୟ କୋଣର ଉତ୍ପତ୍ତି ହୋଇଥାଏ । ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ଘୂର୍ଣ୍ଣନର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ରଶ୍ମିର ଘୂର୍ଣ୍ଣନରୁ ଧନାତ୍ମକ କୋଣ ଏବଂ ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟା ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦିଗରେ ରଶ୍ମିର ଘୂର୍ଣ୍ଣନରୁ ଋଣାତ୍ମକ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

16.1.1 ଏକକ ବୃତ୍ତ

ଏହା ଦେଖିପାରିବା ଯେ ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଥରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କଲେ, ଏହାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ । ଯଦି ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ଏକକ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଏକ ଏକକ ହେବ । ଏହିପରି ଏକ ବୃତ୍ତକୁ **ଏକକ ବୃତ୍ତ** କୁହାଯାଏ ।

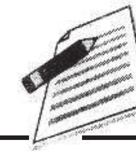
16.1.2 ଏକ ରେଡିୟାନ୍

କୋଣ ପରିମାଣର ପରିମାପ ଲାଗି ଡିଗ୍ରୀ ମାପ ବ୍ୟବସ୍ଥା ଭିନ୍ନ ରେଡିୟାନ୍ ମଧ୍ୟ ଅନ୍ୟ ଏକ ମାପ ବ୍ୟବସ୍ଥା । ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (r) ସହ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଚାପଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣର ପରିମାଣକୁ ଏକ ରେଡିୟାନ୍ କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ଏକକ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା କୋଣର ମାପ ହେଉଛି ଏକ ରେଡିୟାନ୍ ।



ଚିତ୍ର 16.2

ଟୀକା : ଏକ ରେଡିୟାନ୍ ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ହେଉଛି ଏକ ଧ୍ରୁବକ କୋଣ; ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ବିଶେଷରେ, ସର୍ବଦା ସମାନ ।



16.1.3 ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଓ ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାପ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଏକକ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଏକକ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାଣ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରିଥାଏ । ଏଣୁ ବୃତ୍ତର ପରିଧି 2π ($\because$ $r = 1$) କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ 2π ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାଣର କୋଣ ଅଙ୍କନ କରେ ।

ଫଳରେ 2π ରେଡିୟାନ୍ $= 360^0$

π ରେଡିୟାନ୍ $= 180^0$

$\frac{\pi}{2}$ ରେଡିୟାନ୍ $= 90^0$

$\frac{\pi}{4}$ ରେଡିୟାନ୍ $= 45^0$

1 ରେଡିୟାନ୍ $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^0 = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

ବା $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ ରେଡିୟାନ୍ $= \frac{\pi}{180}$ ରେଡିୟାନ୍

ଉଦାହରଣ 16.1 ପରିବର୍ତ୍ତନ କର :

(i) 90^0 କୁ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ (ii) 15^0 କୁ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ

(iii) $\frac{\pi}{6}$ ରେଡିୟାନ୍‌କୁ ଡିଗ୍ରୀ ମାପରେ (iv) $\frac{\pi}{10}$ ରେଡିୟାନ୍‌କୁ ଡିଗ୍ରୀ ମାପରେ

ସମାଧାନ : (i) $1^0 = \frac{2\pi}{360}$ ରେଡିୟାନ୍

$\Rightarrow 90^0 = \frac{2\pi}{360} \times 90$ ରେଡିୟାନ ବା $90^0 = \frac{\pi}{2}$ ରେଡିୟାନ୍

(ii) $15^0 = \frac{2\pi}{360} \times 15$ ରେଡିୟାନ୍ ବା $15^0 = \frac{\pi}{12}$ ରେଡିୟାନ୍

(iii) 1 ରେଡିୟାନ୍ $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6}$ ରେଡିୟାନ୍ $= \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}\right)^0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6}$ ରେଡିୟାନ୍ $= 30^0$

(iv) $\frac{\pi}{10}$ ରେଡିୟାନ୍ $= \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{10}\right)^0$

$\Rightarrow \frac{\pi}{10}$ ରେଡିୟାନ୍ $= 18^0$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଡିଗ୍ରୀ ମାପରେ ଦତ୍ତ କୋଣପରିମାଣକୁ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିବା :

(i) 60^0 (ii) 15^0 (iii) 75^0 (iv) 105^0 (v) 270^0

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାପକୁ ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାପରୁ ଡିଗ୍ରୀ ମାପକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିବା :

(i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{\pi}{20}$ (iv) $\frac{\pi}{60}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$

3. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ ତ୍ରୟର ପରିମାଣ $45^0, 65^0$ ଓ 70^0 । ଏହି କୋଣ ପରିମାପଗୁଡ଼ିକୁ ରେଡିୟାନ୍‌ରେ ପରିଣତ କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣର ପରିମାଣ ହେଉଛି $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ ଓ $\frac{2\pi}{3}$ । ଚତୁର୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣକୁ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

5. $\frac{\pi}{6}$ ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ଅନୁପୂରକ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16.1.4 ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଗୋଟିଏ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ 1 ରେଡିୟାନ୍ ମାପର କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ । କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ 2 ରେଡିୟାନ୍ ମାପର କୋଣ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୁଇଗୁଣ ସହ ସମାନ । କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ $2\frac{1}{2}$ ରେଡିୟାନ୍ ମାପ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର $2\frac{1}{2}$ ଗୁଣ ସହ ସମାନ । ନିମ୍ନ ସାରଣୀରୁ ଏହି ତଥ୍ୟ ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ଜଣାପଡିବ ।

ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (l)	ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣର ପରିମାପ θ (ରେଡିୟାନ୍‌ରେ)
r	1
2r	2
$\left(2\frac{1}{2}\right)$r	$2\frac{1}{2}$
4r	4

ଏଣୁ $\theta = \frac{l}{r}$ ବା $l = r\theta$

ଯେଉଁଠି, r = ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

θ = କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଚାପଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣର ରେଡିୟାନ୍ ମାପ ଏବଂ l = ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣର ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାପ ହେଉଛି ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଅନୁପାତ ।

ଟୀକା : ଉପରୋକ୍ତ ସମ୍ପର୍କ ପାଇବାରେ ଆମେ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାପ ବ୍ୟବହାର କରିଛୁ, ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ନୁହେଁ । ଏଣୁ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ ଥିଲେ ହିଁ $\theta = \frac{l}{r}$ ସମ୍ପର୍କ ମିଳିଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ 16.2

ଏକ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 35 ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର 10 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ଚାପ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣର ରେଡିୟାନ୍ ମାପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $l = 10$ ସେ.ମି. ଏବଂ $r = 35$ ସେ.ମି. ।

$\theta = \frac{l}{r}$ ରେଡିୟାନ୍ ବା $\theta = \frac{10}{35}$ ରେଡିୟାନ୍

ବା $\theta = \frac{2}{7}$ ରେଡିୟାନ୍ ।

ଉଦାହରଣ 16.3

ଯଦି ଗୋଟିଏ କୋଣର ଡ୍ରିଗୀ ପରିମାପ D ଓ ରେଡିୟାନ୍ ପରିମାପ C ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$ ।

ସମାଧାନ : 1 ରେଡିୟାନ୍ $= \left(\frac{360}{2\pi}\right)^0$ ବା $\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

$\therefore$ C ରେଡିୟାନ୍ $= \left(C \times \frac{180}{\pi}\right)^0$

ଯେହେତୁ କୋଣର ଡିଗ୍ରୀର ପରିମାପ ହେଉଛି D, ଏଣୁ

$$D = C \times \frac{180}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{C}{\pi}$$

ଉଦାହରଣ 16.4

ଗୋଟିଏ ରେଳରାସ୍ତାର ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ଏକ ବୃତ୍ତର ଚାପ ସଦୃଶ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ଏହି ବୃତ୍ତଚାପର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ହେଲେ 500 ମି. ଦୀର୍ଘ ରେଳପଥ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ 45^0 ହେବ ?

ସମାଧାନ : କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଡିଗ୍ରୀ ଏକକରେ ଦତ୍ତ । ମାତ୍ର $l = r\theta$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ ନିମିତ୍ତ θକୁ ରେଡିୟାନ୍ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ହେବ ।

$\theta = 45^0 = 45 \times \frac{\pi}{180}$ ରେଡିୟାନ୍ $= \frac{\pi}{4}$ ରେଡିୟାନ୍ ... (1)

$l = 500$ ମି.

$l = r\theta \Rightarrow r = \frac{l}{\theta}$ ... (2)

$\therefore r = \frac{500}{\frac{\pi}{4}} m$ [(1) ଓ (2) କୁ ବ୍ୟବହାର କରି]

$$= 500 \times \frac{4}{\pi} m = 2000 \times 0 \cdot 32 \left[\frac{1}{\pi} = 0 \cdot 32\right]$$

= 640 ମି.

ଉଦାହରଣ 16.5

ଏକ ବୃତ୍ତ ଆକୃତିର ରେଳପଥରେ, ଗୋଟିଏ ରେଳଗାଡି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 60 କି.ମି. ବେଗରେ ଗତି କରୁଛି । ଯଦି ଏହି ରେଳପଥର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $\frac{5}{6}$ କି.ମି. ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ରେଳଗାଡିଟି 15 ସେକେଣ୍ଡରେ କେତେ ପରିମାଣର କୋଣ କରି ଘୂରିବ ?

ସମାଧାନ : ରେଳଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 60 କି.ମି. । 15 ସେକେଣ୍ଡର ରେଳଗାଡିଟି ଗତି କରୁଥିବା ଦୂରତା $= \frac{60 \times 15}{60 \times 60}$ କି.ମି. $= \frac{1}{4}$ କି.ମି.

$\therefore$ ଆମେ ଜାଣୁ $l = \frac{1}{4}$ କି.ମି. ଏବଂ $r = \frac{5}{6}$ କି.ମି.

$\therefore \theta = \frac{l}{r} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}$ ରେଡିୟାନ୍ $= \frac{3}{10}$ ରେଡିୟାନ୍

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.2

1. ନିମ୍ନ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ରେଡିୟାନ୍ ମାପରେ ପ୍ରକାଶ କର :

   (a) 30^0 (b) 60^0 (c) 150^0

2. ନିମ୍ନ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ଡିଗ୍ରୀମାପରେ ପ୍ରକାଶ କର :

   (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{9}$

3. ଯେଉଁ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 15 ସେ.ମି., ସେହି ବୃତ୍ତର 2.5 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ ତା'ର ମାପକୁ ରେଡିୟାନ୍ ଓ ଡିଗ୍ରୀ ଏକକରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ବୃତ୍ତ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ରେଳପଥରେ ଗୋଟିଏ ରେଳଗାଡ଼ି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 20 କି.ମି. ବେଗରେ ଗତି କରେ । ରେଳପଥର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 1 କି.ମି.ର $\frac{1}{12}$ ହୋଇଥିଲେ, ତିନି ସେକେଣ୍ଡରେ ରେଳଗାଡିଟି କେତେ ପରିମାଣର କୋଣରେ ଘୂରିବ ?

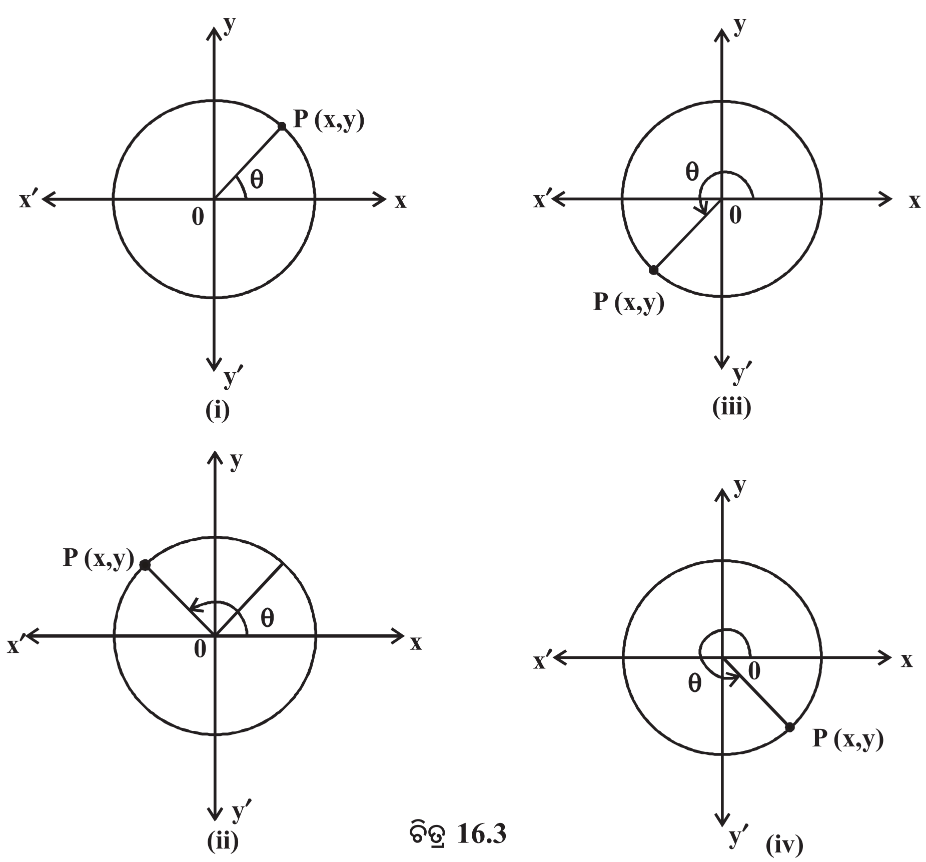
5. ବୃତ୍ତ ଆକୃତିର ଗୋଟିଏ ରେଳରାସ୍ତା ତିଆରି କରିବାକୁ ହେବ । ରେଳରାସ୍ତାଟି 100 ମି. ଦୂରତାରେ 60^0 ପରିମାଣ କୋଣରେ ଘୂରିଲେ, ରେଳ ରାସ୍ତାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କେତେ ?

6. l, r ଓ θ ର ପ୍ରଚଳିତ ଅର୍ଥ ଅନୁଯାୟୀ ନିମ୍ନ ସାରଣୀଟି ପୂରଣ କର ।

l	r	θ
(a) 1.25 ମି.	...	135^0
(b) 30 ସେ.ମି.	...	$\frac{\pi}{4}$
(c) 0.5 ସେ.ମି.	2.5 ମି.	...
(d) ...	6 ମି.	120^0
(e) ...	150 ସେ.ମି.	$\frac{\pi}{15}$
(f) 150 ସେ.ମି.	40 ମି.	...
(g) ...	12 ମି.	$\frac{\pi}{6}$
(h) 1.5 ମି.	0.75 ମି.	...
(i) 25 ମି.	...	75^0

16.2 ତ୍ରିକୋଣମିତି ଫଳନ

ଏକକ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କଲାବେଳେ, ତୁମେ ଦେଖିଥିବ ଯେ 0 ଓ 2π ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଲାଗି ଗୋଟିଏ କ୍ରମିତ ଯୋଡି x ଓ y ରହିଥାଏ । ଏହି କ୍ରମିତ ଯୋଡି (x, y)ଦ୍ୱାରା P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସୂଚିତ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 16.3

ଆମେ ଯଦି ଏକକ ବୃତ୍ତରେ θ ଲାଗି 0 ନେବା, ଆମେ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ପାଇବା, ତା'ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $(1, 0)$ । ଯଦି $\theta = \frac{\pi}{2}$ ନେବା, ତେବେ ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ $(0, 1)$ । ଏହି ଚିତ୍ରରେ, θ ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ଲାଗି (x, y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଥିବା ବିନ୍ଦୁଟି ଯେଉଁଠି ହେଉନା କାହିଁକି, ତାହା ଏକ ଅନନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ହେବ । x ଓ y ର ମୂଲ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ବା ରଣାତ୍ମକ ହେବ ତାହା, ବିନ୍ଦୁଟି କେଉଁ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅଛି ତାହା ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P (ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ) ଓ ତା'ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କଲେ, ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବା ।

$\sin\theta = y, \cos\theta = x$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \text{ (ଯେଉଁଠି } x \neq 0), \ \cot\theta = \frac{x}{y} \text{ (ଯେଉଁଠି } y \neq 0)$$

$$\sec\theta = \frac{1}{x} \text{ (ଯେଉଁଠି } x \neq 0), \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y} \text{ (ଯେଉଁଠି } y \neq 0)$$

ମନେକରାଯାଉ ବିନ୍ଦୁ P ଏହାର ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଅବସ୍ଥାରୁ ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଗତି କରେ । ଚାରୋଟି ବୃତ୍ତପାଦରେ ଏହି ବିନ୍ଦୁର ବିଭିନ୍ନ ଅବସ୍ଥିତି ଲାଗି, θର ବିଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ ମାନ ମିଳିବ ।

ଆମେ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଆଲୋଚନାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖିବା । θର ମାନ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ହେଲେ, x ଓ y ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ;

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ହେଲେ, x ରଣାତ୍ମକ ଓ y ଧନାତ୍ମକ ହେବ;

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ହେଲେ, x ଓ y ଉଭୟ ରଣାତ୍ମକ ହେବ;

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦରେ ହେଲେ, x ଧନାତ୍ମକ ଓ y ରଣାତ୍ମକ ହେବ;

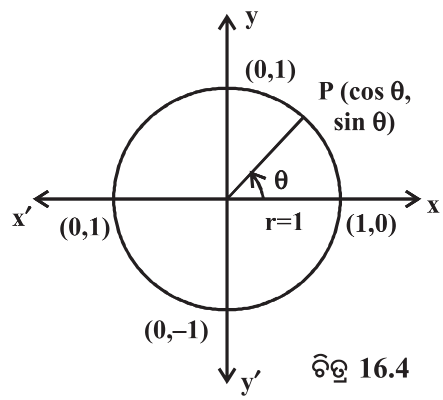
ଅଥବା,

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ	ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ	ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ	ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦ
ସମସ୍ତ ଧନାତ୍ମକ	sin ଧନାତ୍ମକ	tan ଧନାତ୍ମକ	cos ଧନାତ୍ମକ
	cosec ଧନାତ୍ମକ	cot ଧନାତ୍ମକ	sec ଧନାତ୍ମକ

କେଉଁଠାରେ କେଉଁଟି ଧନାତ୍ମକ ତାହା ସହଜରେ ନିମ୍ନମତେ ମନେରଖି ହେବ ।

	ସମସ୍ତ	sin	tan	cos
ବୃତ୍ତପଦ :	ପ୍ରଥମ	ଦ୍ୱିତୀୟ	ତୃତୀୟ	ଚତୁର୍ଥ

ଯଦି ଗୋଟିଏ ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଥିବା P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ହୁଏ ଏବଂ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତିରୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ ଉଦ୍ଭବ ହୁଏ, ତେବେ $\sin\theta = y$ ଏବଂ $\cos\theta = x$ । ଅର୍ଥାତ୍ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ $(\cos\theta, \sin\theta)$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ ।



ଚିତ୍ର 16.4

ଚିତ୍ର 16.5 ର ତୁମେ ସହଜେ ଦେଖିପାରିବ ଯେ P, ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଗତି କରୁଥିବାରୁ B ର ମୂଲ୍ୟ –1 ଓ +1 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । y ଲାଗି ମଧ୍ୟ ତାହା ହିଁ ସତ୍ୟ ହେବ ।

ଏଣୁ ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ Pର ସମସ୍ତ ଅବସ୍ଥାନ ଲାଗି

$-1 \le x \le 1$ ଏବଂ $-1 \le y \le 1$

ଏଣୁ ଆମର ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ହେଲା ଯେ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା θ ଲାଗି $-1 \le \cos\theta \le 1$ ଏବଂ $-1 \le \sin\theta \le 1$ ।

ଅନ୍ୟକଥାରେ, $\sin\theta$ ଓ $\cos\theta$ ର ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ମାନ 1ରୁ ବଡ ହେବ ନାହିଁ ।

ଉଦାହରଣ 16.6

ନିମ୍ନରାଶିମାନଙ୍କର ଚିହ୍ନ କ'ଣ ?

(i) $\sin\frac{7\pi}{18}$ (ii) $\cos\frac{4\pi}{9}$ (iii) $\tan\frac{5\pi}{9}$

ସମାଧାନ :

(i) ଯେହେତୁ $\frac{7\pi}{18}$ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ, ତେଣୁ $\sin\frac{7\pi}{18}$ ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକ ହେବ ।

(ii) ଯେହେତୁ $\frac{4\pi}{9}$ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ, ତେଣୁ $\cos\frac{4\pi}{9}$ ର ଚିହ୍ନ ଧନାତ୍ମକ ହେବ ।

(iii) ଯେହେତୁ $\frac{5\pi}{9}$ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ, ତେଣୁ $\tan\frac{5\pi}{9}$ ର ଚିହ୍ନ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।

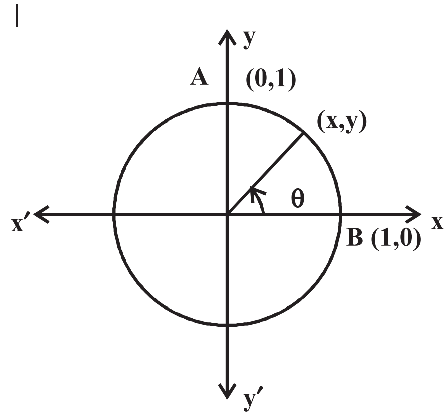
ଉଦାହରଣ 16.7

ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର : (i) $\sin\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos 0$ (iii) $\tan\frac{\pi}{2}$

ସମାଧାନ :

(i) ଚିତ୍ର 16.5ରୁ, ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ Aର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି (0, 1) ।

$\therefore \sin\frac{\pi}{2} = 1$ କାରଣ $\sin\theta = y$ ।



ଚିତ୍ର 16.5

(ii) Bର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଉଛି (1, 0) ।

$\therefore \cos\theta = 1$ କାରଣ $\cos\theta = x$ ।

(iii) $\tan\frac{\pi}{2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$ ଯାହାକି ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

ଏଣୁ $\tan\frac{\pi}{2}$ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 16.8

$\cos\theta$ ର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଓ ବୃହତ୍ତମ ମାନ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣୁ $1 - \le \cos\theta \le 1$ ।

$\therefore \cos\theta$ ର ବୃହତ୍ତମ ମାନ ହେଉଛି 1 ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ ହେଉଛି -1

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.3

1. ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ଚିହ୍ନ କ'ଣ ହେବ ?

(i) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\sec\frac{2\pi}{3}$

(iv) $\sec\frac{35\pi}{18}$ (v) $\tan\frac{25\pi}{18}$ (vi) $\cot\frac{3\pi}{4}$

(vii) $\operatorname{cosec}\frac{8\pi}{3}$ (viii) $\cot\frac{7\pi}{8}$

2. ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\cos\frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin 0$ (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}$

(iv) $\tan\frac{3\pi}{4}$ (v) $\sec 0$

(vi) $\tan\frac{\pi}{2}$ (vii) $\tan\frac{3\pi}{2}$ (viii) $\cos 2\pi$

16.2.1 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ

ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଯାୟୀ $x = \cos\theta$

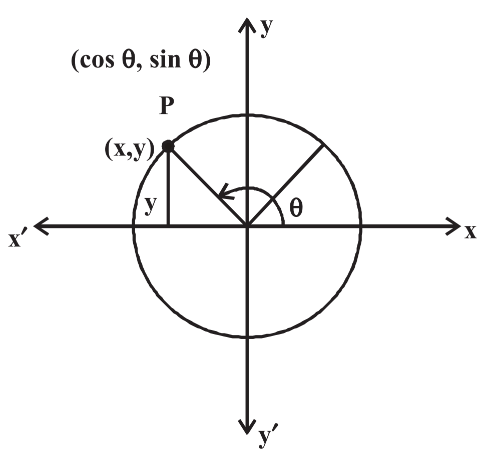
$y = \sin 0$

ଯେହେତୁ $\tan\theta = \frac{y}{x}, (x \ne 0)$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \theta \ne \frac{n\pi}{2}$

ଏବଂ $\cot\theta = \frac{x}{y}, (y \ne 0)$

ଅର୍ଥାତ୍, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} (\theta \ne n\pi)$



ଚିତ୍ର 16.6

ସେହିପରି $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}\left(\theta \neq \dfrac{n\pi}{2}\right)$

ଏବଂ $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}(\theta \neq n\pi)$

ପାଇଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା, $x^2 + y^2 = 1$

ଅର୍ଥାତ୍, $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

ବା, $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ଟୀକା : $(\cos\theta)^2$କୁ $\cos^2\theta$ ରୂପେ ଏବଂ $(\sin\theta)^2$ କୁ $\sin^2\theta$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ $x^2+y^2=1$

ବା, $1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$, $x \neq 0$ ଲାଗି ବା, $1 + (\tan\theta)^2 = (\sec\theta)^2$

ଅର୍ଥାତ୍ $\sec^2\theta = 1+\tan^2\theta$

ଉଦାହରଣ 16.9

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^4\theta + \cos^4\theta$

$= \sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$= 1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$ $\quad (\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1)$

= ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 16.10

ପ୍ରମାଣ କର : $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}$

$= \sqrt{\dfrac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}$

$$= \sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$= \sec\theta - \tan\theta =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 16.11

$\sin\theta = \frac{21}{29}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\sec\theta + \tan\theta = 2\frac{1}{2}$, ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ θ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ସମାଧାନ :

$\sin\theta = \frac{21}{29}$

ଆମେ ଜାଣୁ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \frac{441}{841} = \frac{400}{841} = \left(\frac{20}{29}\right)^2$$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{20}{29}$ (θ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଥିବା ହେତୁ a ଧନାତ୍ମକ)

$\therefore \tan\theta = \frac{21}{20}$

ଏଣୁ $\sec\theta + \tan\theta = \frac{29}{20} + \frac{21}{20} = \frac{29+21}{20} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.4

1. ପ୍ରମାଣ କର : $\sin^4\theta - \cos^4\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

2. $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. $\operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{a}$ ଏବଂ θ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଟି ତିକୋଣମିତିକ ଫଳନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ପ୍ରମାଣ କର : $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

5. $\cot\theta + \text{cosec}\,\theta = 1.5$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos\theta = \frac{5}{13}$ ।

6. $\tan\theta + \sec\theta = m$ ହେଲେ, $\cos\theta$ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ପ୍ରମାଣ କର : $(\tan A + 2)(2\tan A + 1) = 5\tan A + 2\sec^2 A$

8. ପ୍ରମାଣ କର : $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

9. ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

10. ପ୍ରମାଣ କର : $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\theta + \text{cosec}\,\theta \cdot \sec\theta$

16.3 କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ଏବଂ $\frac{\pi}{2}$ ର ତ୍ରିକୋଣ ମିତିକ ଫଳନର ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା → / ଫଳନ ↓	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ

ମନେରଖିବାର ସୁବିଧା ଲାଗି, ଆମେ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଜାଣିଲେ sin ଫଳନର ମାନଗୁଡ଼ିକ ପାଇପାରିବା ।

$$\sqrt{\frac{0}{4}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}$$

ଉପରୋକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସରଳ କଲେ, ଆମେ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଥିବା sin ଫଳନର ମାନଗୁଡିକ ପାଇପାରିବା । ସେହି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ବିପରୀତ କ୍ରମରେ ନେଲେ, ଆମେ cosine ଫଳନର ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ପାଇବା ।

ଉଦାହରଣ 16.12

ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$ (b) $4\tan^2\frac{\pi}{4} - \text{cosec}^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{3}$

ସମାଧାନ :

(a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\text{cosec}^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

$=4(1)^2-(2)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$=4-4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

ଉଦାହରଣ 16.13

$A=\frac{\pi}{3}$ ଏବଂ $B=\frac{\pi}{6}$ ହେଲେ, ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $=\cos(A+B)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ

ଅର୍ଥାତ୍ $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.5

1. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର :

(i) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\tan^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}$ (ii) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\text{cosec}^2\frac{\pi}{6}+\sec^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{3}$ (iv) $4\cot^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{4}$

(v) $\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$

2. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\left(1+\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}\right)+\left(\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3}$

3. $A=\frac{\pi}{3}, B=\frac{\pi}{6}$ ନେଇ ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ

(i) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

(ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

4. $\theta=\frac{\pi}{4}$ ହେଲେ, ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(i) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

(ii) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
$= 2\cos^2\theta - 1$
$= 1-2\sin^2\theta$

5. $A=\frac{\pi}{6}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ

(i) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ (ii) $\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

(iii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

16.4 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର

ଯେକୌଣସି ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ମନରେ ଏକ ଦୀର୍ଘସ୍ଥାୟୀ ଛାପ ପଡିଥାଏ । ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରର ବିଶେଷତ୍ୱ ଏହିକି ଯେ ଫଳନର ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ ପାଇଥାଏ । ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଆମେ ଫଳନର ଯେଉଁ ସବୁ ଗୁଣକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିଦେଖିପାରୁ, ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛି ଏହାର

(i) ଆବର୍ତ୍ତନୀୟତା

(ii) କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଫଳନଟି ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଓ କେଉଁ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହା ହ୍ରାସ ପାଏ

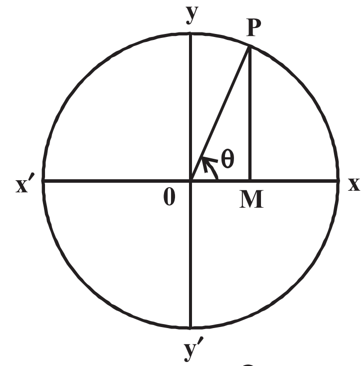
(iii) ଏକ ଅକ୍ଷରେ ଏହାର ପ୍ରତିସମତା

(iv) ଏକ ଦତ୍ତ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହାର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥିତି ।

ଏହା ମଧ୍ୟ ଲେଖ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରେ ।

16.4.1 θର ମାନ 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ sin θର ମାନରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ

XOX′ ଓ YOY′ କୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷରୂପେ ମନେକରାଯାଉ । O କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ ଏକ ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର । ମନେକରାଯାଉ ଯେ OP OX ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ କରି x-ଅକ୍ଷ ସହ θ ପରିମିତ କୋଣ ଅଙ୍କନ କରିଛି, ଅର୍ଥାତ୍ $\angle XOP = \theta$, $PM \perp X'OX$ ଅଙ୍କନ କର । ଫଳରେ $\sin\theta = MP$ କାରଣ OP = 1 ଏକକ । $\therefore$ MP ରେ ଯେଉଁ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟିଛି, sin θ ର ମଧ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତନ ତାହା ସହ ସମାନ ।

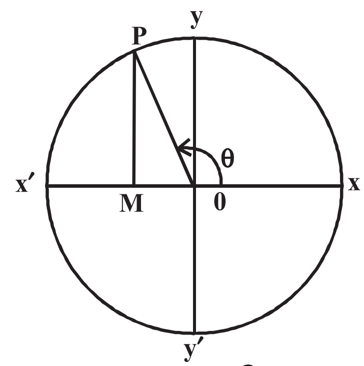


ଚିତ୍ର 16.7

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ :

θ, 0 ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି $\frac{\pi}{2}$ ଯେପରି ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କ୍ରମଶଃ ବୃଦ୍ଧିପାଏ, PM ଧନାତ୍ମକ ଥାଇ 0 ଠାରୁ 1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

$\therefore$ sin θ ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ ।

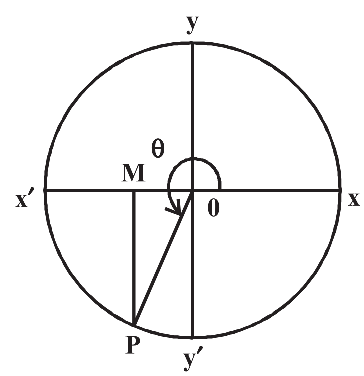


ଚିତ୍ର 16.8

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ, θ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତ ପାଦରେ ରହିଥାଏ । ଏଣୁ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହେ । ଏଠାରେ PM = y ଏବଂ ଏହା ଧନାତ୍ମକ । ମାତ୍ର θ, $\frac{\pi}{2}$ ଠାରୁ π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବା ସହ y, 1 ରୁ 0ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

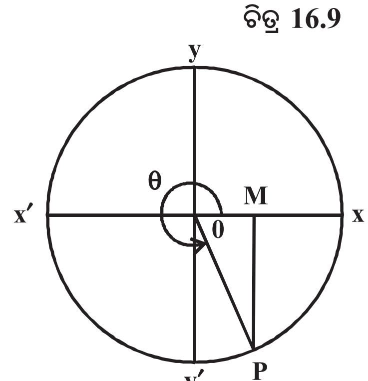


ଚିତ୍ର 16.9

ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ θ ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିଥାଏ । ଏଣୁ P ମଧ୍ୟ କେବଳ ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ତାର ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରେ । ଫଳରେ PM = y ଏବଂ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ । θ, π ଠାରୁ $\frac{3\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବା ସହ y, 0 ଠାରୁ –1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ sin θ, 0 ଠାରୁ –1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ହ୍ରାସ ପାଏ । ଫଳରେ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ sin θ ହେଉଛି ଋଣାତ୍ମକ ।

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ θ, ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିଥାଏ । ଏଣୁ P ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ କେବଳ ଚିତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତ ପାଦରେ ତା'ର ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରେ । ଏଠାରେ PM = y ଏବଂ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ । θ, $\frac{3\pi}{2}$ ଠାରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବା ସହ y – 1 ରୁ 0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ ।



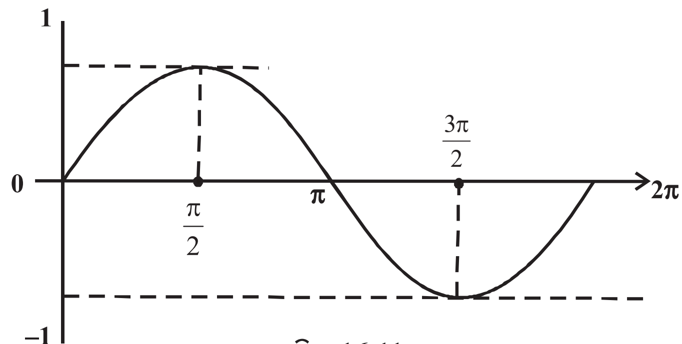
ଚିତ୍ର 16.10

16.4.2 θର ମାନ 0ଠାରୁ 2π ପରିବର୍ତ୍ତନ ସହ sin θର ଲେଖଚିତ୍ର

X′OX ଓ Y′OY ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ହୁଅନ୍ତୁ । θର ମାନକୁ x-ଅକ୍ଷରେ ଓ sin θ ର ମାନକୁ y-ଅକ୍ଷରେ ନିଆଯାଉ ।

($\sqrt{2}$ ର ଆସନ୍ନମାନ $= 1\cdot41; \frac{1}{\sqrt{2}} = 0\cdot707, \frac{\sqrt{3}}{2} = 0\cdot87$)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sin θ	0	0·5	0·87	1	0·87	0·5	0	–0·5	–0·87	–1	–0·87	–0·5	0



ଚିତ୍ର 16.11

କେତେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(i) sin θର ବୃହତ୍ତମ ମାନ ହେଉଛି 1 ।

(ii) sin θର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ ହେଉଛି –1 ।

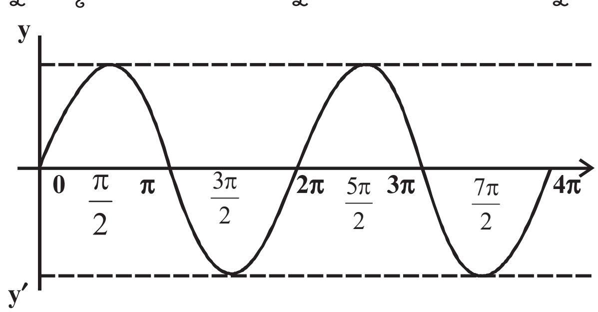
(iii) ସବୁଠାରେ ଏହା ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(iv) ଏହା 0 ଠାରୁ $\frac{\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଓ $\frac{3\pi}{2}$ ଠାରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କ୍ରମଶଃ ବୃଦ୍ଧିପାଏ । ଏହା $\frac{\pi}{2}$ ଠାରୁ $\frac{3\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କ୍ରମଶଃ ହ୍ରାସ ପାଏ ।

ଚିତ୍ର 16.11 ରେ ଅଙ୍କିତ ଲେଖଚିତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ତାହା ହେଉଛି $[2\pi, 4\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = \sin\theta$ର ଲେଖ [ଚିତ୍ର 16.12 ଦେଖ]

ତୁମେ କ'ଣ ଦେଖିଲ ?

$[2\pi, 4\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = \sin\theta$ର ଲେଖ, 0 ରୁ 2π ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହାର ଲେଖ ଏକାପରି । ଏଣୁ $\sin(2\pi+\theta) = \sin\theta$ ଧର୍ମକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଏହି ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ । ଫଳରେ θର ବୃଦ୍ଧି 2π ଘଟିଲେ, sin θର ମାନରେ ପୁନରାବୃତ୍ତି ଘଟିଥାଏ । ଏହାକୁ sin θର ଆବର୍ତ୍ତନ ବା ପୁନରାବୃତ୍ତି କୁହାଯାଏ ।



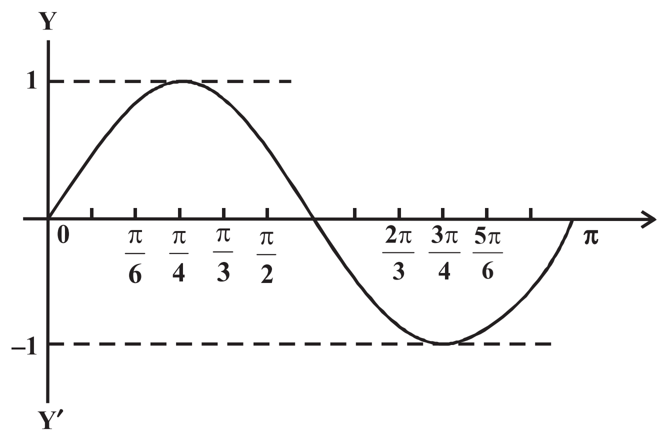
ଚିତ୍ର 16.12

ଆବର୍ତ୍ତନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 16.14

$y = \sin 2\theta$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ :	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin 2\theta$:	0	0.87	1	0.87	0	–0.87	–1	–0.87	0



ଚିତ୍ର 16.13

ଲେଖଚିତ୍ରଟି $y = \sin\theta$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଭଳି ଅଟେ ।

କେତେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

1. $\sin\theta$ର ଅନ୍ୟ ଲେଖଚିତ୍ର, ଯେପରି $a \sin\theta$, $3 \sin 2\theta$ର ଲେଖ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।
2. ଅନ୍ୟ ଅନ୍ତରାଳ, ଯଥା $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $\sin\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ମଧ୍ୟ ସହଜରେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ । କୋଣ ସମଷ୍ଟି ସମ୍ପର୍କିତ ଧର୍ମ, $\sin(\theta+2\pi) = \sin\theta$, $\sin(\theta-2\pi) = \sin\theta$ ଅର୍ଥାତ୍ θରେ 2π ବୃଦ୍ଧି ହେଲେ, $\sin\theta$ର ମାନର ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୁଏ, ସାହାଯ୍ୟ ନେଇ ଏହା କରିବା ସମ୍ଭବ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.6

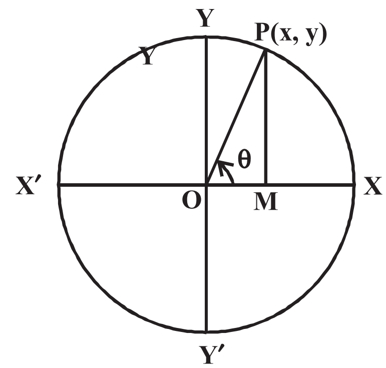
1. $[0, 2\pi]$ରେ $\sin\theta$ ର ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ କେତେ ?
2. $[0, 2\pi]$ରେ $\sin\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ରରେ ପ୍ରତିସମତାକୁ ବୁଝାଅ ।
3. $[0, \pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = 2\sin\theta$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଅ ।
4. $[\pi, 2\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ θର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $\sin\theta$ ଲାଗି ନିମ୍ନ ମାନ ମିଳିବ ?

(a) $\frac{-1}{2}$ (b) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$

5. $[-\pi, \pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = \sin x$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଅ ।

16.4.3 πର ମାନ 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବାସ୍ଥଳେ $\cos\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର

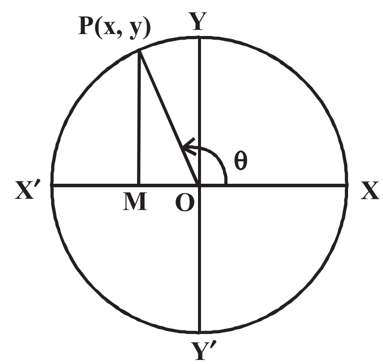
θର ମାନ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ଏବଂ $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ ରହିଥିବା ବେଳେ $\sin\theta$ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା କଲାଭଳି, ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ $\cos\theta$ର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ପରିବର୍ତ୍ତନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।



ଚିତ୍ର 16.14

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ P ବିନ୍ଦୁ ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିବ । OM = x ଧନାତ୍ମକ ହେବ θ, 0 ରୁ $\frac{\pi}{2}$ କୁ ବଦଳିବା ସହ x କିନ୍ତୁ 1 ରୁ 0କୁ ହ୍ରାସ ପାଇବ ।

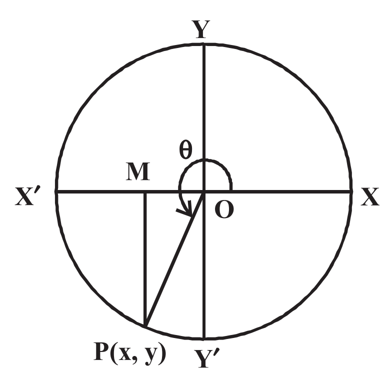
$\therefore \cos\theta$ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଧନାତ୍ମକ ହେବ ।



ଚିତ୍ର 16.15

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ P ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିବ । ତେଣୁ M ବିନ୍ଦୁ x-ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ପାଖରେ ରହିବ । ଫଳରେ ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ OM = x ଋଣାତ୍ମକ ଅଟେ ଏବଂ θ, $\frac{\pi}{2}$ରୁ π କୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଥିବା ବେଳେ, xର ମାନ 0ରୁ –1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ହ୍ରାସ ପାଇବ । ଏଣୁ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ $\cos\theta$ର ମାନ 0 ରୁ –1 କୁ ହ୍ରାସ ପାଇବ ।

$\therefore \cos\theta$ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।



ଚିତ୍ର 16.16

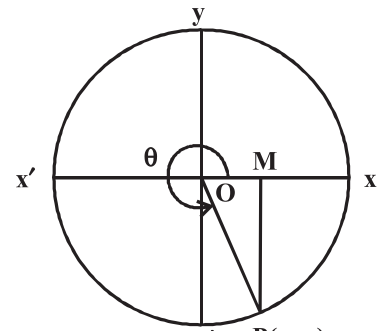
ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ, P ବିନ୍ଦୁ ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିବ । ତେଣୁ OM = x ଋଣାତ୍ମକ ହେବ, କାରଣ ଏହା x-ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ପାଖରେ ରହିବ । ଫଳରେ OM = x ଋଣାତ୍ମକ ହେବ, କାରଣ ଏହା ଅକ୍ଷର ଋଣାତ୍ମକ ପାଖରେ ରହିବ । ଫଳରେ OM = x ଋଣାତ୍ମକ, ମାତ୍ର θ π ରୁ $\frac{3\pi}{2}$ କୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଥିବା ବେଳେ xର ମାନ –1 ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଇବ । ଏଣୁ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ $\cos\theta$, –1 ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଇବ ।

$\therefore \cos\theta$ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ ।

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦ : $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ, P ବିନ୍ଦୁ ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦରେ ରହିବ ଏବଂ M ବିନ୍ଦୁ x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଭାଗରେ ରହିବ ।

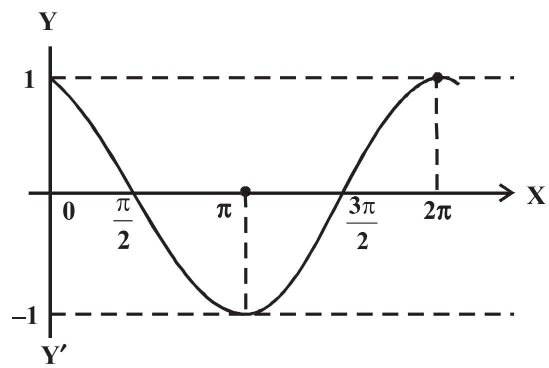
ଏଣୁ OM = x ଧନାତ୍ମକ ଅଟେ । θ, $\frac{3\pi}{2}$ ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧି ପାଉଥିବା ବେଳେ xର ମାନ 0 ରୁ 1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଇବ । ଫଳରେ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ cos θ, 0ରୁ 1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

∴ cos θ ଧନାତ୍ମକ ହେବ ।



ଚିତ୍ର 16.17

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cos θ :	1	0·87	0·5	0	–0·5	–·87	–1	–0·87	–0·5	0	0·5	0·87	1



ଚିତ୍ର 16.18

X′OX ଏବଂ Y′OY ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ହେଉ । θର ମାନକୁ x-ଅକ୍ଷରେ ଏବଂ cos θର ମାନକୁ y-ଅକ୍ଷରେ ନିଆଯାଉ ।

କେତେକ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(i) cos θର ବୃହତ୍ତମ ମାନ = 1

(ii) cos θର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ = –1

(iii) ଏହା ସବୁଠାରେ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ।

(iv) cos (θ+2π) = cos θ, cos (θ–2π) = cos θ । θ ର ମାନ 2π ବୃଦ୍ଧି ହେଲେ ବା 2π ହ୍ରାସ ହେଲେ, cos θର ମାନର ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୁଏ । ଏହାକୁ cos θର ଆବର୍ତ୍ତନୀୟ କୁହାଯାଏ । ଏହି ପାଠର ପରବର୍ତ୍ତୀ ଭାଗରେ ଏହା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପୁଙ୍ଖାନୁପୁଙ୍ଖ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

(v) [2π, 4π], [4π, 6π], [–2π, 0] ଅନ୍ତରାଳରେ cos θର ଲେଖ ଠିକ୍ [0, 2π] ଅନ୍ତରାଳରେ cos θ ର ଲେଖ ପରି ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 16.15

θ, –π ରୁ π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବଦଳିବା cos θ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ସେହି ଲେଖଚିତ୍ରରୁ θ ର କେଉଁମାନ ପାଇଁ cos θ = ±0.5 ହେବ, ତାହା ନିରୂପଣ କର ।

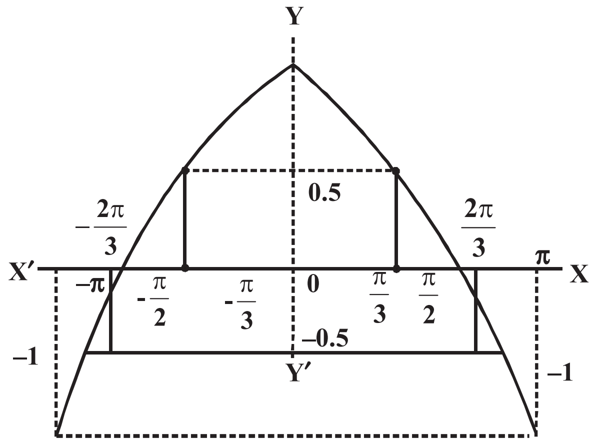
ସମାଧାନ :

θ :	$-\pi$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
cos θ :	–1·0	–0·87	–0·5	0	–0·50	–0·87	1·0	0·87	0·5	0	–0·5	–0·87	–1

$\cos\theta = 0{\cdot}5$

ଯେତେବେଳେ $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

$\cos\theta = -0{\cdot}5$, ଯେତେବେଳେ $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$ ।



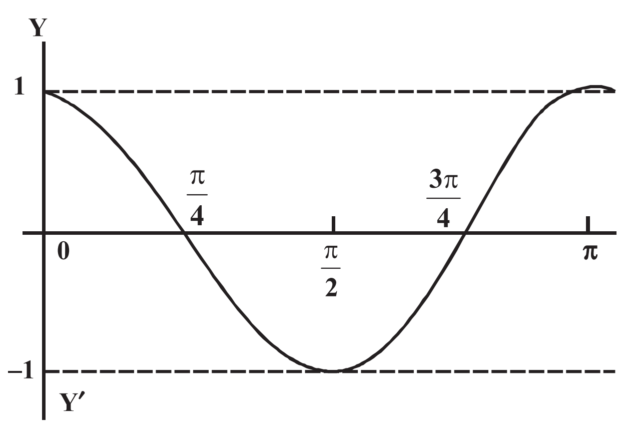
ଚିତ୍ର 16.19

ଉଦାହରଣ 16.16

0 ରୁ π ଅନ୍ତରାଳରେ cos 2θର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ :

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ :	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
cos 2θ :	0	0·5	0	–0·5	–1	–0·5	0	0·5	1



ଚିତ୍ର 16.20

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.7

1. (a) θର ମାନ $\frac{-\pi}{4}$ ରୁ $\frac{\pi}{4}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଉଥିଲାବେଳେ, $y = \cos\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

   (b) θର ମାନ 0 ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନେଇ, $y = 3\cos\theta$ର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର ।

   (c) θ କୁ –π ରୁ π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନେଇ, $y = 3\cos\theta$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । θ ର କେଉଁମାନ ପାଇଁ $\cos\theta = 0{\cdot}87$ ଏବଂ $\cos\theta = -0{\cdot}87$ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (d) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = \cos\theta$ ର ଲେଖ x-ଅକ୍ଷର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱରେ ଅଥବା ନିମ୍ନରେ ରହିଥାଏ କି ?

   (e) $[2\pi, 4\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $y = \cos\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

16.4.4 θର ମାନ 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଉଥିବାବେଳେ tan θର ଲେଖଚିତ୍ର

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ : tan θ କୁ $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । tan θର ସ୍ୱରୂପ, sin θ ଓ $\frac{1}{\cos\theta}$ ର ସ୍ୱରୂପ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ । ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦରେ, sin θ, 0 ରୁ 1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଏବଂ cos θ 1 ରୁ 0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ହ୍ରାସ ପାଏ । ମାତ୍ର $\frac{1}{\cos\theta}$ ଓ 1 ରୁ ଅସୀମ ଭାବରେ ବୃଦ୍ଧି ପାଏ (ଆମେ ଲେଖୁ, ଏହା 1 ରୁ ∞ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ) । ଏଣୁ $\tan\theta > 0$

∴ tan θ, 0 ରୁ ∞ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ । (tan θ ର ସାରଣୀ ଓ ଲେଖ ଚିତ୍ରକୁ ଦେଖ)

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

sin θ, 1 ରୁ 0 ହ୍ରାସ ପାଏ ।

cos θ, 0 ରୁ –1 କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ ।

tan θ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ଏବଂ ଏହା –∞ ରୁ 0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦରେ :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

sin θ, 0 ରୁ –1 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ହ୍ରାସପାଏ ।

cos θ, –1 ରୁ 0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

tan θ ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ଏବଂ 0 ରୁ ∞ କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦରେ :

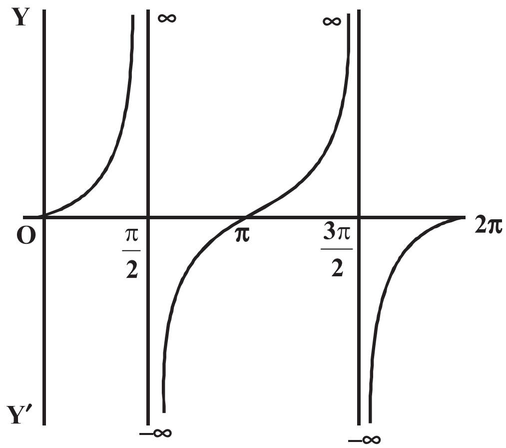
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

sin θ, –1 ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

cos θ, 0 ରୁ 1 ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

tan θ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ଏବଂ –∞ ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0^0$	$\frac{\pi}{2}+0^0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0^0$	$\frac{3\pi}{2}+0^0$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
tan θ :	0	0·58	1·73	+∞	−1·73	−0·58	0	0·58	1·73	+∞	−∞	−1·73	−0·58	0	0



ଚିତ୍ର 16.21

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(i) $\tan 180^0 + \theta = \tan\theta$ । ଏଣୁ tan θର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଲେଖଚିତ୍ରରେ ବାମକୁ ତଥା ଡାହାଣକୁ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ଆବର୍ତ୍ତନ ବା ପୁନରାବୃତ୍ତି ରହିଥାଏ ।

(ii) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ ହୋଇଥିବାରୁ, ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରେ $(0, \tan\theta)$ ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, $(-\theta, -\tan\theta)$ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

(iii) ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଫଳାଫଳରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $y = \tan\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ବିପରୀତ ବୃତ୍ତପାଦରେ ପ୍ରତିସମତା ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥାଏ ।

(iv) tan θର ମୂଲ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ ।

(v) tan θର ଲେଖଚିତ୍ର $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

(vi) θର ପୂର୍ବୋକ୍ତ ମାନ ଠାରେ tan θର ମାନ୍ ତତ୍କ୍ଷଣାତ୍ +∞ ରୁ −∞ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

16.4.5 θର ମାନ 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହେଉଥିବାବେଳେ cot θର ଲେଖଚିତ୍ର

cot θର ସ୍ୱରୂପ, cos θ ଓ $\frac{1}{\sin\theta}$ର ସ୍ୱରୂପ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ, କାରଣ $\cot\theta = \cos\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}$ i

ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଏହାର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ :

$$\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$$

cos θ, 1 ରୁ 0 କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ

sin θ, 0 ରୁ 1 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ

$\therefore$ cot θ ର ମାନ $+\infty$ ରୁ 0କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ । କିନ୍ତୁ $\cot\theta > 0$

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$

cos θର ମାନ 0 ରୁ –1 କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ

sin θ ର ମାନ 1 ରୁ 0 କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ

$\Rightarrow \cot\theta < 0$ ବା cot θର ମାନ 0 ରୁ $-\infty$ କୁ ହ୍ରାସପାଏ ।

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$

cos θ ର ମାନ –1 ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

sin θ ର ମାନ 0 ରୁ –1 କୁ ହ୍ରାସପାଏ ।

$\therefore$ cot θ ର ମାନ $+\infty$ ରୁ 0 କୁ ହ୍ରାସପାଏ ।

ଚତୁର୍ଥବୃତ୍ତପାଦ : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$

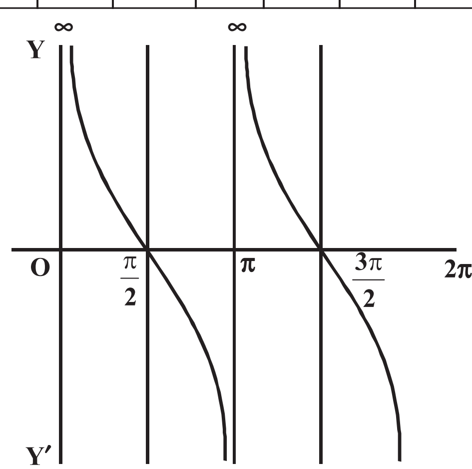
cos θ ର ମାନ 0 ରୁ 1 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ

sin θ ର ମାନ –1 ରୁ 0 କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ

$\therefore \cot\theta < 0$

cot θ ର ମାନ 0 ରୁ $-\infty$ କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ ।

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cot θ :	∞	1·73	0·58	0	–58	–1·73	$-\infty$	$+\infty$	1·73	0·58	0	–58	–1·73	$-\infty$



ଚିତ୍ର 16.22

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(i) $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$ ହୋଇଥିବାରୁ, cot θର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଲେଖଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରେ $\theta = 0$ ରୁ $\theta = \pi$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅଥବା $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ରୁ $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲେଖର ଅଂଶଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ମିଳିତ ଭାବେ ରହିଥାଏ ।

(ii) $\cot\theta$ ର ମାନ ଯେକୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବା ରଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ ।

(iii) $\cot\theta$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $0, \pi$ ଓ 2π ଠାରେ ଏହା ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

(iv) θ ର ମାନ $0, \pi, 2\pi$ ହୋଇଥିବାବେଳେ $\cot\theta$ ର ମାନ ତତ୍‌କ୍ଷଣାତ୍ $-\infty$ ରୁ $+\infty$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.8

1. (a) $\tan\theta$ ର ବୃହତ୍ତମ ମାନ କେତେ ?

(b) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ଠାରେ $\tan\theta$ର ମାନରେ କି ପରିବର୍ତ୍ତନ ଦେଖିଥାଅ ?

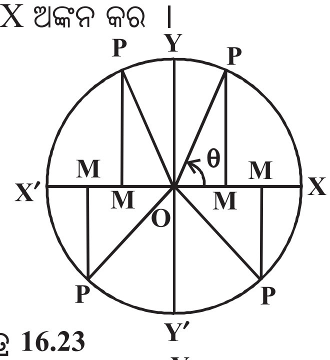
(c) $-\pi$ ରୁ π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ $y = \tan\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । θ ର କେଉଁମାନ ପାଇଁ $\tan\theta = 1{\cdot}7$ ତାହା ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ନିରୂପଣ କର ।

2. (a) $\cot\theta$ ର ବୃହତ୍ତମ ମାନ କେତେ ?

(b) θର କେଉଁମାନ ପାଇଁ $\cot\theta = -1$ ତାହା ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ନିରୂପଣ କର ।

16.4.6 θର ମାନ 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନେଇ sec θର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା sec θ ଓ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା

X′OX ଏବଂ Y′OY ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ହୁଅନ୍ତୁ । O କୁ କେନ୍ଦ୍ର ନେଇ, ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତଟିଏ ଅଙ୍କନ କର । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ । OP ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ $PM \perp X'OX$ ଅଙ୍କନ କର ।



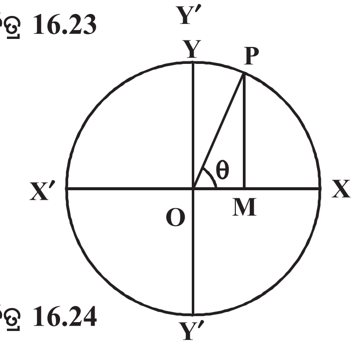
ଚିତ୍ର 16.23

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{OM}$$

$\therefore$ $\sec\theta$ ର ମାନରେ ହେଉଥିବା ପରିବର୍ତ୍ତନ, OM ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ : OM ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥିବାରୁ, $\sec\theta$ ଧନାତ୍ମକ ହେବ ।

$\sec 0 = 1$ ଏବଂ $\sec\frac{\pi}{2} = \infty$ ଯେତେବେଳେ ଆମେ ଡାହାଣ ପାଖରୁ $\frac{\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଯାଉ ।

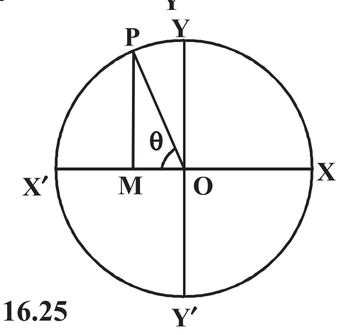


ଚିତ୍ର 16.24

$\therefore$ θର ମାନ 0 ରୁ $\frac{\pi}{2}$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, $\sec\theta$ର ମାନ 1 ରୁ ∞ କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଇଥାଏ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : OM ରଣାତ୍ମକ ହୋଇଥିବାରୁ $\sec\theta$ ରଣାତ୍ମକ ହେବ ।

ଆମେ ବାମରୁ $\frac{\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଗଲେ, $\sec\theta = -\infty$ ହେବ । $\sec\pi = -1$

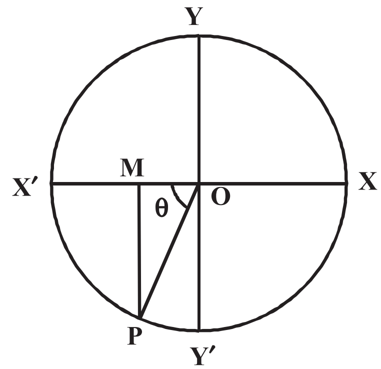


ଚିତ୍ର 16.25

$\therefore$ θର ମାନ $\frac{\pi}{2}$ ରୁ π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, $\sec\theta$ ର ମାନ $-\infty$ ରୁ 1 କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବ ।

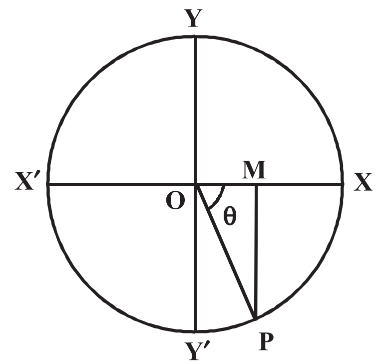
ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ θ, $\frac{\pi}{2}$ କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, $\sec\theta$ର ମାନ $+\infty$ ରୁ $-\infty$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ ।

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : OM ଋଣାତ୍ମକ ହେତୁ $\sec\theta$ ମଧ୍ୟ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ । $\sec\pi = -1$ ଏବଂ $\sec\frac{3\pi}{2} = -\infty$ ଯେତେବେଳେ କୋଣଟି ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ $\frac{3\pi}{2}$କୁ ଯାଏ । θ, πରୁ $\frac{3\pi}{2}$କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, $\sec\theta$ର ମାନ -1 ରୁ $-\infty$ ହ୍ରାସପାଏ ।



ଚିତ୍ର 16.26

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦ : OM ଧନାତ୍ମକ ହେତୁ $\sec\theta$ ମଧ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ ହେବ । θର ମାନ $\frac{3\pi}{2}$ଠାରୁ ସମାନ୍ୟ ଅଧିକ ହେଲେ, $\sec\theta$ର ମାନ ଧନାତ୍ମକ ଓ ଏବଂ ଖୁବ୍ ବଡ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ । $\sec 2\pi = 1$ । ଏଣୁ $\theta, \frac{3\pi}{2}$ ରୁ 2πକୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, $\sec\theta$ ର ମାନ ∞ ରୁ 1 କୁ ହ୍ରାସ ପାଏ ।

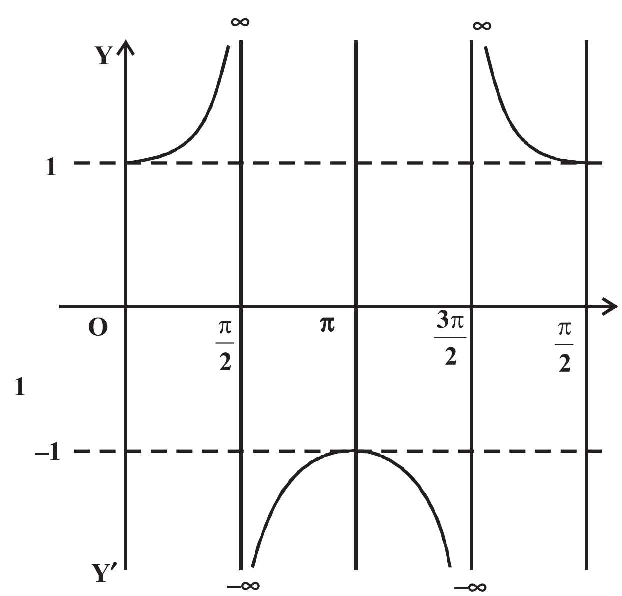


ଚିତ୍ର 16.27

ଏହା ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ θର ମାନ $\frac{3\pi}{2}$କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, $\sec\theta$ର ମାନ $-\infty$ ରୁ $+\infty$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଥାଏ ।

θର ମାନ 0 ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନେଇ $\sec\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0$	$\frac{\pi}{2}+0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sec\theta$:	1	6·15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	$-1·15$	-1	-1.15	-2	$-\infty$	2	1.15	1



ଚିତ୍ର 16.28

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(a) sec θ ର ମାନ 1 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ ।

(b) sec θ ର ଲେଖଚିତ୍ର ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ଏବଂ $\frac{\pi}{2}$ ଓ $\frac{3\pi}{2}$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନତା ରହିଥାଏ ।

(c) $\theta, \frac{\pi}{2}$ କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ sec θ ର ମାନ $+\infty$ ରୁ $-\infty$ କୁ ଏବଂ $\theta, \frac{3\pi}{2}$ କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ sec θ ର ମାନ $-\infty$ ରୁ $+\infty$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

16.4.7 θର 0ରୁ 2π ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ମାନ ଲାଗି cosec θ ର ଲେଖଚିତ୍ର

X′OX ଓ Y′OY ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ହୁଅନ୍ତୁ । O କୁ କେନ୍ଦ୍ର କରି ଏକ ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର । ଏହି ବୃତ୍ତ ଉପରେ P ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ । OP ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ X′OX ପ୍ରତି PM ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{MP}$$

ଚିତ୍ର 16.29 ରହିବ

∴ cosec θ ର ମାନରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ MP ଉପରେ ନିର୍ଭର କରେ ।

ପ୍ରଥମ ବୃତ୍ତପାଦ : MP ଧନାତ୍ମକ ହୋଇଥିବାରୁ, cosec θ ଧନାତ୍ମକ ହେବ । $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ । θ ଅତ୍ୟନ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ର ହେଲେ, MP ମଧ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ର ହେବ । ଏଣୁ cosec θର ମାନ ଅତ୍ୟନ୍ତ ବୃହତ୍ ହେବ ।

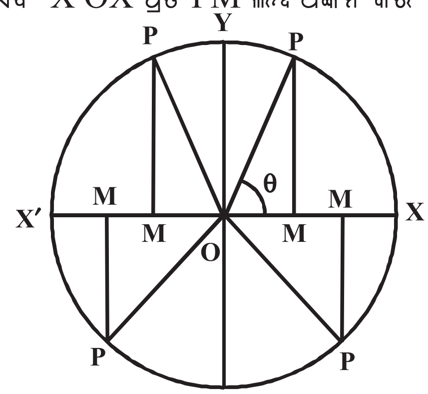
θ ର ମାନ 0ରୁ $\frac{\pi}{2}$ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, cosec θ ର ମାନ ∞ ରୁ 1 କୁ ହ୍ରାସ ପାଇବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : PM ଧନାତ୍ମକ । ଏଣୁ cosec θ ମଧ୍ୟ ଧନାତ୍ମକ । $\operatorname{cosec} = \frac{\pi}{2} = 1$ ଏବଂ cosec π = ∞, ଯେତେବେଳେ ଘୂର୍ଣ୍ଣାୟମାନ ରେଖା, ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ ଘୁରିବା ବେଳେ, πର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ ।

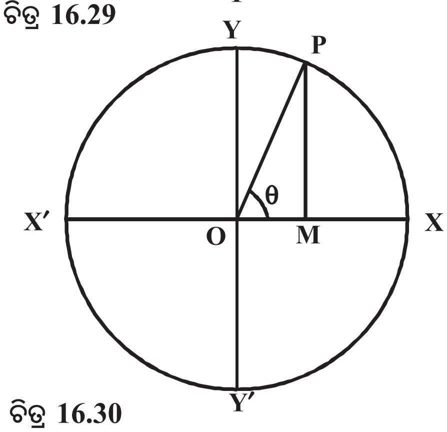
∴ $\theta, \frac{\pi}{2}$ ରୁ π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବାବେଳେ cosec θର ମାନ 1 ରୁ ∞ କୁ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ।

ତୃତୀୟ ବୃତ୍ତପାଦ : PM ଋଣାତ୍ମକ । ଏଣୁ cosec θ ମଧ୍ୟ ଋଣାତ୍ମକ । θର ମାନ, π ଠାରୁ ସାମାନ୍ୟ ଅଧିକ ହେଲେ, cosec θ ଅତ୍ୟନ୍ତ ବୃହତ୍ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ।

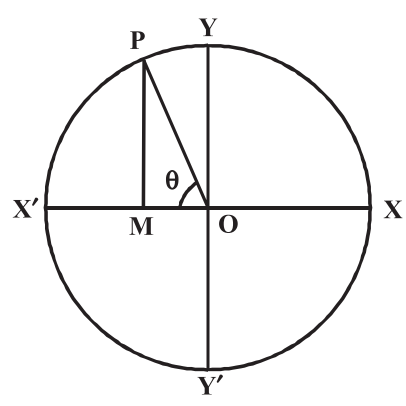
$$\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1$$



ଚିତ୍ର 16.29



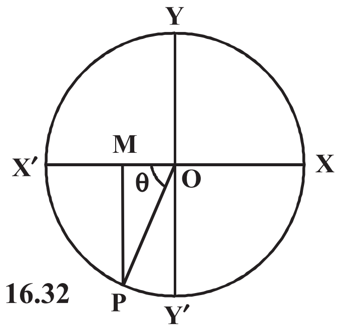
ଚିତ୍ର 16.30



ଚିତ୍ର 16.31

ଏଣୁ θର ମାନ πରୁ $\frac{3\pi}{2}$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, cosec θର ମାନ –∞ ରୁ –1 କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

ଏହା ମଧ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ θର ମାନ πକୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, cosec θ, + ∞ ରୁ –∞କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।

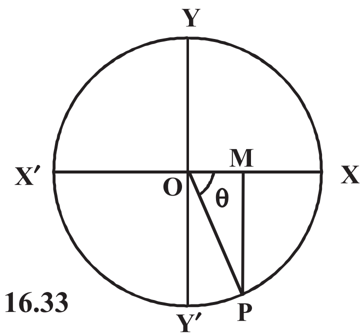


ଚିତ୍ର 16.32

ଚତୁର୍ଥ ବୃତ୍ତପାଦ : PM ରଣାତ୍ମକ ।

ଏଣୁ cosec θ = –∞, କାରଣ θର ମାନ 2πର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି ।

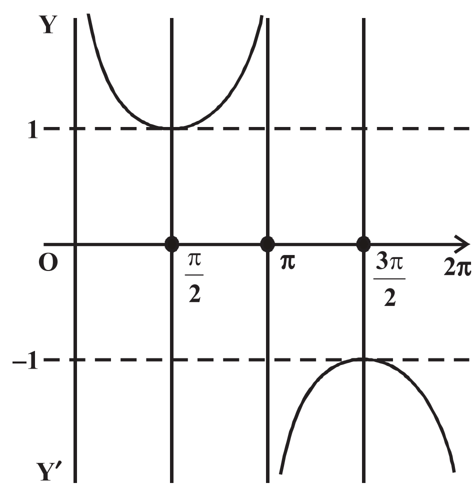
∴ θର ମାନ $\frac{3\pi}{2}$ ରୁ 2π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବା ସହ, cosec θର ମାନ –1 ରୁ –∞କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ ।



ଚିତ୍ର 16.33

cosec θ ର ଲେଖଚିତ୍ର

θ :	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π–0	π+0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cosec θ :	∞	2	1·15	1	1.15	2	+∞	–∞	–2	–1.15	–1	–1.15	–2	–∞



ଚିତ୍ର 16.34

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ

(a) cosec θର ସାଂଖ୍ୟିକମାନ 1 ରୁ କମ୍ ହେବ ନାହିଁ ।

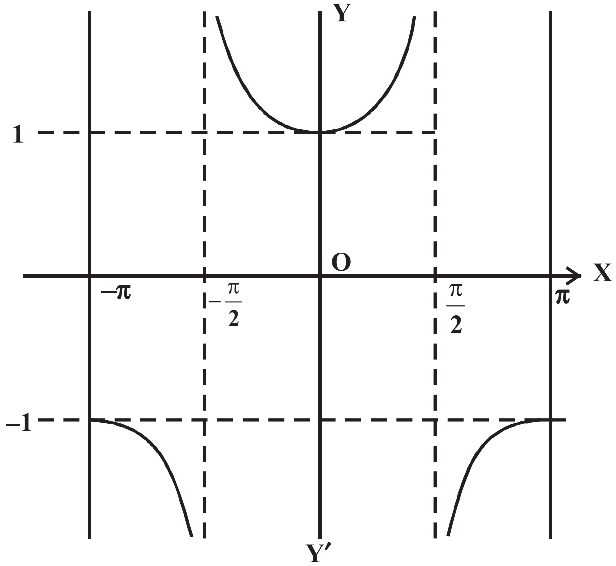
(b) cosec θର ଲେଖ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ । θ = 0, π, 2π ଠାରେ ଲେଖଟି ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

(c) θର ମାନ π କୁ ଅତିକ୍ରମ କଲାବେଳେ, cosec θ ର ମାନ +∞ ରୁ –∞ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ । θର ମାନ 0 ହେବାବେଳେ cosec θର ମାନ +∞ ଓ θର ମାନ 2π ହେବା ବେଳେ cosec θ ର ମାନ –∞ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 16.17

θର ମାନ $-\pi$ ରୁ $+\pi$ କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଉଥିବା ବେଳେ, sec θ ର ମାନରେ ଘଟୁଥିବା ପରିବର୍ତ୍ତନକୁ ଦେଖାଅ ।

ସମାଧାନ :



ଚିତ୍ର 16.35

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.9

1. (a) θ ର ମାନ -2π ରୁ 2π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେବାବେଳେ, sec θର ମାନରେ କି ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

   (b) θର ମାନ -2π ରୁ 2π କୁ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ, cosec θର ଲେଖଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଅ ।

16.5 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ଆବର୍ତ୍ତିତା (Periodicity)

ତୁମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଅଭିଜ୍ଞତାରୁ ତୁମେ ଜାଣିଥିବ ଯେ ନିୟମିତ ସମୟ ଅନ୍ତରାଳରେ କେତେକ ପରିସ୍ଥିତିର ପୁନରାବୃତ୍ତି ଘଟିଥାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସପ୍ତାହ ପରେ ସପ୍ତାହର ଦିନଗୁଡ଼ିକର ପୁନରାବୃତ୍ତି ଘଟିଥାଏ ପ୍ରତି 12 ମାସ ପରେ ବର୍ଷର ମାସଗୁଡ଼ିକର ପୁନରାବୃତ୍ତି ଘଟିଥାଏ । ଗଡୁଥିବା ଚକଟିଏ ଉପରେ ଲାଗିଥିବା ଏକ ଧୂଳିକଣାର ଅବସ୍ଥିତି କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ତାହା ହିଁ ଘଟିଥାଏ । ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟ ଅନ୍ତରାଳରେ ଗୋଟିଏ ପରିସ୍ଥିତିର ପୁନରାବୃତ୍ତିକୁ ଆବର୍ତ୍ତିତା (periodicity) କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି ଗୋଟିଏ ଫଳନ f(x) ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚଳରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ଫଳନ f(x) ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ, ଅର୍ଥାତ୍ x ର ସମସ୍ତମାନ ପାଇଁ $f(x+p) = f(x)$, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ f(x)କୁ ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଯଦି p ଏହି ପ୍ରକାର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଧନାତ୍ମକ ସ୍ଥିର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ pକୁ ଫଳନ f(x)ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ (period) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି p ଆବର୍ତ୍ତକାଳରେ f(x) ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନ ତେବେ $\frac{1}{f(x)}$ ମଧ୍ୟ ହୁଏ ସେହି ଆବର୍ତ୍ତୀକାଳ pରେ ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନ ହେବ ।

16.5.1 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନମାନଙ୍କର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ

(i) $\sin x = \sin(x+2n\pi),\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

(ii) $\cos x = \cos(x+2n\pi),\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

0 ରୁ 2π ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି P ନାହିଁ, ଯାହା ଲାଗି ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିମାନ ସତ୍ୟ ହେବ ।

$\sin x = \sin(x+p)$

$\cos x = \cos(x+p)$, x ର ସମସ୍ତ ମାନ ପାଇଁ

$\therefore$ 2π ହେଉଛି କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଲାଗି

$\sin(x+2\pi) = \sin x$ ଏବଂ $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

$\Rightarrow$ sin x ଓ cos x ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲାଗି ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି 2π ।

(iii) cosec xର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ମଧ୍ୟ 2π, କାରଣ $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$ ।

(iv) sec x ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ମଧ୍ୟ 2π, କାରଣ $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ ।

(v) $\tan(x + \pi) = \tan x$

ମନେକରାଯାଉ $p(0 < p < \pi)$ ହେଉଛି tan x ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ,

ତେବେ $\tan(x+p) = \tan x$, x ର ସମସ୍ତମାନ ପାଇଁ

$x = 0$ ନିଅ । ତେବେ $\tan p = 0$, ଅର୍ଥାତ୍ $p = 0$ ବା π

$\Rightarrow$ tan x ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି π ।

$\therefore$ 0 ଏବଂ π ମଧ୍ୟରେ p ଲାଗି କୌଣସି ମାନ ନାହିଁ,

ଯେପରି $\tan x = \tan(x+p)$ ଏଣୁ tan x ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି π ।

ଉଦାହରଣ 16.18

ନିମ୍ନ ଫଳନ ଗୁଡ଼ିକର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $3 \sin 2x$ (b) $y = \cos\dfrac{x}{2}$ (c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$

ସମାଧାନ :

(a) ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି $\dfrac{2\pi}{2}$, ଅର୍ଥାତ୍ π ।

(b) $y = \cos\dfrac{1}{2}x$; ଏଣୁ ଆବର୍ତ୍ତକାଳ $= \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

(c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ $= \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.10

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = 2 \sin 3x$ (b) $y = 3 \cos 2x$

(c) $y = \tan 3x$ (d) $y = \sin^2 2x$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଗୋଟିଏ ରଶ୍ମିର ଘୂର୍ଣ୍ଣନରୁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ।
- ରଶ୍ମିର ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟା ଦିଗରେ (ଦକ୍ଷିଣାବର୍ତ୍ତୀ) ହେଲେ କୋଣଟି ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଘଣ୍ଟାକଣ୍ଟାର ବିପରୀତ ଦିଗରେ (ବାମାବର୍ତ୍ତୀ) ହେଲେ, କୋଣଟି ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ।
- ଏକ ଡିଗ୍ରୀ ହେଉଛି କୋଣ ମାପର ଗୋଟିଏ ଏକକ ଏବଂ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ଘୂର୍ଣ୍ଣନ ଦ୍ୱାରା 360^0 କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ ।
- ଏକ କୋଣକୁ ରେଡିୟାନ୍ ଏକକରେ ମପାଯାଇ ପାରେ ଏବଂ 360^0 ହେଉଛି 2π ରେଡିୟାନ୍ ସହ ସମାନ ।
- ଏକକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ଏହାର l ଏକକ ଦୀର୍ଘଚାପ θ ରେଡିୟାନ ପରିମିତ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କଲେ, $l = r\theta$ ହୁଏ ।
- ଏକକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ହେଲେ, ଛଅ ଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନମତେ ହୋଇଥାଏ ।

  $\sin \theta = y, \cos \theta = x, \tan\theta = \frac{y}{x}, \cot\theta = \frac{x}{y}, \sec\theta = \frac{1}{x}$ ଏବଂ $\text{cosec}\,\theta = \frac{1}{y}$ ।

  P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ l କୁ $(\cos \theta, \sin \theta)$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ କେନ୍ଦ୍ର ଓ P ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖା x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ ଅଙ୍କନ କରୁଥିବା କୋଣ ହେଉଛି θ

- θ ର ମାନ $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ ହେଲେ $\sin \theta$ ଓ $\cos \theta$ ଲାଗି ଯେଉଁ ମାନ ମିଳିବ, ତାହା ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

- θର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନଠାରେ $\sin\theta$ ଓ $\cos\theta$ର ଲେଖଚିତ୍ର ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ଅଟେ । 1 ।
  - $\sin\theta$ ଓ $\cos\theta$ ଉଭୟର ବୃହତ୍ତମ ମାନ ହେଉଛି 1 ।
  - $\sin\theta$ ଓ $\cos\theta$ ଉଭୟର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ ହେଉଛି -1 ।
  - ପୂର୍ବୋକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି 2π ।
- $\tan\theta$ ଓ $\cot\theta$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲାଗି $-\infty$ ଓ $+\infty$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଯେକୌଣସି ମାନ ଥାଇପାରେ ।
  - $\tan\theta$ଫଳନର ଲେଖ, $(0, 2\pi)$ ଅନ୍ତରାଳରେ $\frac{\pi}{2}$ ଏବଂ $\frac{3\pi}{2}$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।
  - $\tan\theta$ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି π ।
  - $\cot\theta$ର ଲେଖ θର ମାନ $0, \pi, 2\pi$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ । ଏହାର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି π ।
- $\sec\theta$ର ସାଂଖ୍ୟିକମାନ 1 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ହେବ ନାହିଁ ।

(i) $\frac{\pi}{2}$ ଓ $\frac{3\pi}{2}$ଠାରେ ଏହାର ଲେଖ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ 2π ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହାର ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୋଇଥାଏ ।

(ii) $\operatorname{cosec}\theta$ର ମାନ -1 ଓ $+1$ ମଧ୍ୟରେ ରହେନାହିଁ । $0, \pi, 2\pi$ ଠାରେ $\operatorname{cosec}\theta$ର ଲେଖ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ । ପ୍ରତ୍ୟେକ 2π ଅନ୍ତରାଳରେ ଏହାର ପୁନରାବୃତ୍ତି ହୋଇଥାଏ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- *http://www.wikipedia.org*
- *http://mathworld.wolfram.com*

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. 2500 ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଆକୃତିର ରେଳପଥରେ ଗୋଟିଏ ରେଳଗାଡ଼ି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି 75 କି.ମି. ବେଗରେ ଗତି କଲେ, ଗାଡିଟି ପ୍ରତି ମିନିଟ୍‌ରେ କେତେ ରେଡିୟାନ୍ ଘୂରିଥାଏ ?
2. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏହାର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର 0.357 ଗୁଣ, ଉକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥିବା କୋଣଟି କେତେ ଡିଗ୍ରୀ ?
3. ଗୋଟିଏ ଘଣ୍ଟାର ମିନିଟ୍ କଣ୍ଟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 30 ସେ.ମି. । ସେହି କଣ୍ଟାଟିର ଅଗ୍ରଭାଗ 15 ମିନିଟ୍ ସମୟ ମଧ୍ୟରେ ଅତିକ୍ରମ କରିଥିବା ଦୂରତା କେତେ ?
4. ପ୍ରମାଣ କର :

(a) $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (b) $\frac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

(c) $\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \frac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ (d) $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = (\tan\theta + \sec\theta)^2$

(e) $\sin^8\theta - \cos^8\theta = (\sin^2\theta - \cos^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta)$

(f) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

5. $\theta = \frac{\pi}{4}$ ହେଲେ, $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରି ।

6. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $\sin\frac{25\pi}{6}$ (b) $\sin\frac{21\pi}{4}$ (c) $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

(d) $\sin\frac{17}{4}\pi$ (e) $\cos\frac{19}{3}\pi$

7. $x = -\frac{\pi}{2}$ ରୁ $x = \frac{3\pi}{2}$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ $\cos x$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର :

8. xର ଆବର୍ତ୍ତୀ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କର ଏବଂ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\tan x$ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି π । ଅର୍ଥାତ୍ $x = \pi$ରୁ $x = 2\pi$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲେଖ ହେଉଛି $x = 0$ ରୁ $x = \pi$ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଲେଖର ପୁନରାବୃତ୍ତି ।

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.1

1. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{5\pi}{12}$ (iv) $\frac{7\pi}{12}$ (v) $\frac{3\pi}{2}$
2. (i) 45^0 (ii) 15^0 (iii) 9^0 (iv) 3^0 (v) 120^0
3. $\frac{\pi}{4}, \frac{13\pi}{36}, \frac{14\pi}{36}$ 4. $\frac{5\pi}{6}$ 5. $\frac{\pi}{3}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.2

1. (a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{5\pi}{6}$
2. (a) 36^0 (b) 30^0 (c) 20^0
3. $\frac{1}{6}$ ରେଡିୟାନ୍; 9.55^0 4. $\frac{1}{5}$ ରେଡିୟାନ୍ 5. 95.54 ମି.
6. (a) 0.53 ମି. (b) 38.22 ସେ.ମି. (c) 0.002 ରେଡିୟାନ୍
   (d) 12.56 ମି. (e) 31.4 ସେ.ମି. (f) 3.75 ରେଡିୟାନ୍
   (g) 6.28 ମି. (h) 2 ରେଡିୟାନ୍ (i) 19.11 ମି.

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.3

1. (i) ଋଣାତ୍ମକ (ii) ଋଣାତ୍ମକ (iii) ଋଣାତ୍ମକ (iv) ଧନାତ୍ମକ
   (v) ଧନାତ୍ମକ (vi) ଋଣାତ୍ମକ (vii) ଧନାତ୍ମକ (viii) ଋଣାତ୍ମକ
2. (i) ଶୂନ (ii) ଶୂନ (iii) $-\frac{1}{2}$ (iv) -1 (v) 1
   (vi) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ (vii) ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ (viii) 1

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.4

2. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}, \sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $\sin\theta = \frac{a}{b}, \cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}, \sec\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$

   $\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}, \cot\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$

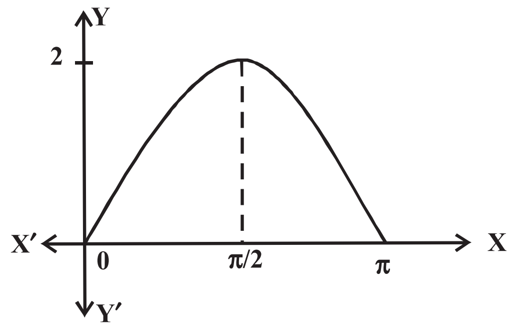
6. $\frac{2m}{1+m^2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.5

1. (i) $4\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{1}{2}$ (iii) -1 (iv) $\frac{22}{3}$ (v) ଶୂନ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.6

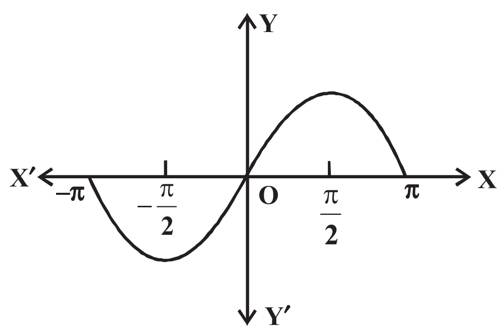
1. 1, –1 3. $y = 2\sin\theta$ ର ଲେଖ $[0, \pi]$



ଚିତ୍ର 16.36

4. (a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

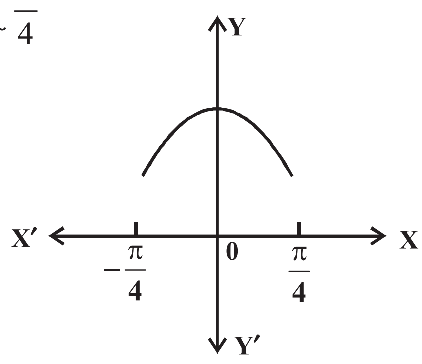
5. $y = \sin x$, $-\pi$ ରୁ π



ଚିତ୍ର 16.37

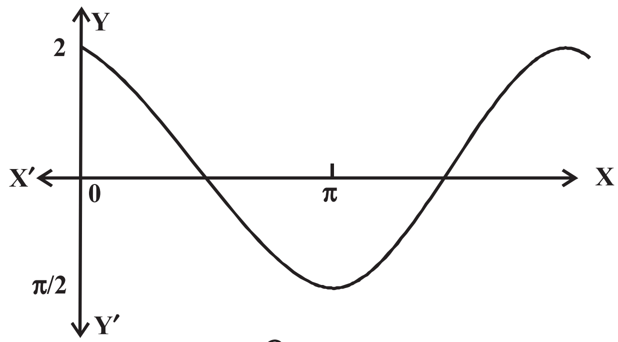
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.7

1. (a) $y = \cos\theta$, $-\frac{\pi}{4}$ ରୁ $\frac{\pi}{4}$



ଚିତ୍ର 16.38

(b) $y = 3\cos\theta$, 0 ରୁ 2π



ଚିତ୍ର 16.36

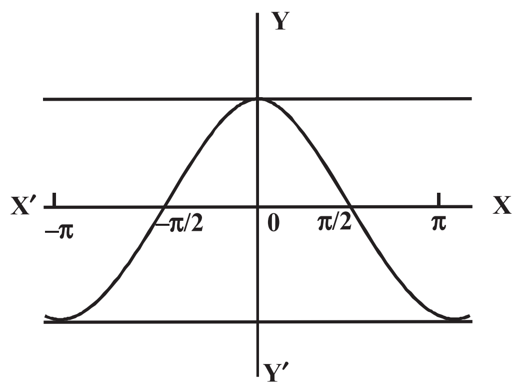
(c) $y = \cos 3\theta$, $-\pi$ ରୁ π

$\cos\theta = 0.87$

$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$

$\cos = -0.87$

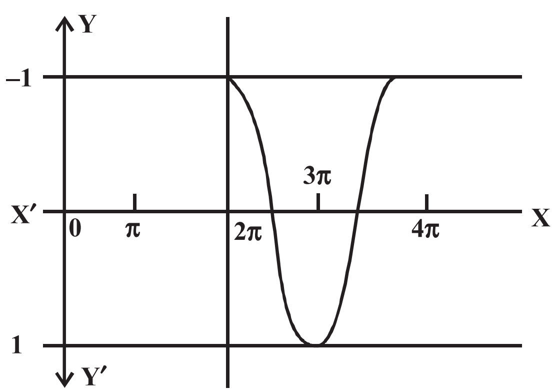
$\theta = \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$



ଚିତ୍ର 16.40

(d) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ମଧ୍ୟରେ $y = \cos\theta$ ର ଲେଖ x-ଅକ୍ଷର ନିମ୍ନରେ ରହିଛି ।

(e) $y = \cos\theta$, θ, 2π ରୁ 4π ମଧ୍ୟରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



ଚିତ୍ର 16.41

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.8

1. (a) ଅସୀମ (b) ଲେଖ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ଠାରେ

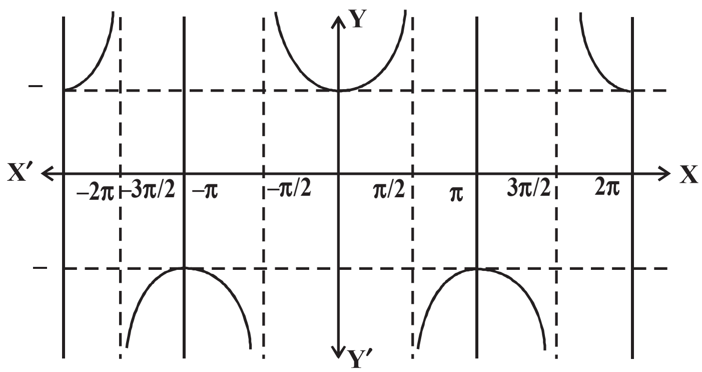
(c) $y = \tan 2\theta, -\pi$ ରୁ π

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ଠାରେ, $\tan\theta = 1.7$

2. (a) ଅସୀମ (b) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ଠାରେ $\cot\theta = -1$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.9

1. (a) $y = \sec\theta$



ଚିତ୍ର 16.42

$\sec 2\theta$ ଲେଖ $[0, 2\pi]$ ଅନ୍ତରାଳରେ $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ ଠାରେ ବିଚ୍ଛିନ୍ନ ହୋଇଥାଏ ।

(b) 0 ରୁ -2π ମଧ୍ୟରେ ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ ସମ୍ପର୍କକୁ ବ୍ୟବହାର କର ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 16.10

1. (a) ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି : $\frac{2\pi}{3}$ (b) ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି $\frac{2\pi}{2} = \pi$

(c) yର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି $\frac{\pi}{3}$

(d) $y = \sin^2 2x = \frac{1-\cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$; y ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

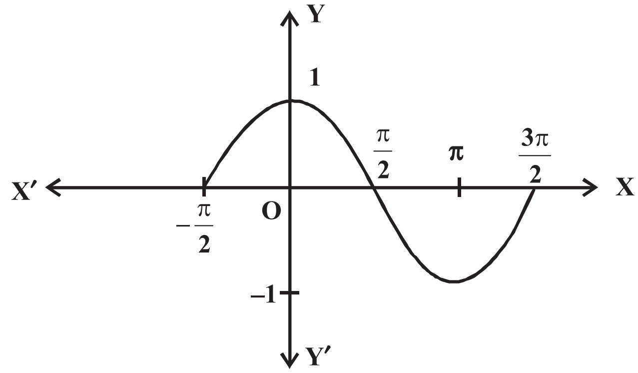
(e) $3\cot\left(\frac{x+1}{3}\right)$, y ର ଆବର୍ତ୍ତକାଳ ହେଉଛି $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

ପାଠଶେଷ / ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. $\frac{1}{2}$ ରେଡିୟାନ୍ 2. 20.45^0 3. 15π ସେ.ମି.

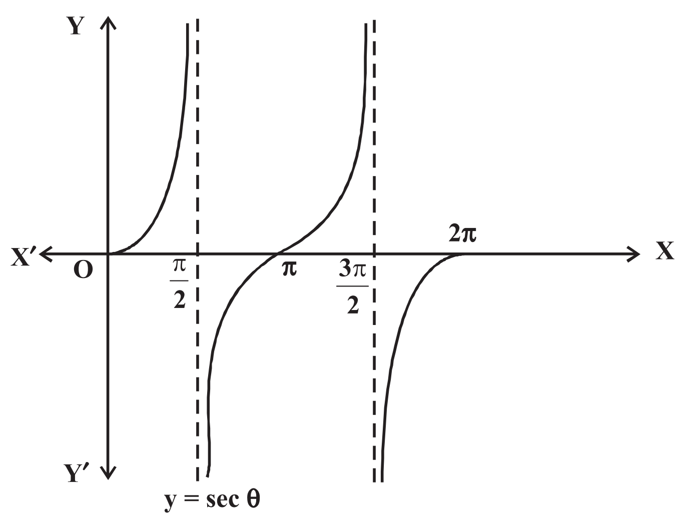
6. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) -1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{2}$

7.



ଚିତ୍ର 16.43

8.



ଚିତ୍ର 16.44