୧୫

ସେଟ୍, ସମ୍ବନ୍ଧ ଓ ଫଳନ

ଆସ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଏକଦା ଶ୍ରୀ ଓ ଶ୍ରୀମତୀ ମେହେଟା ବଜାରକୁ ଗଲେ । ଶ୍ରୀ ମେହେଟା ନିମ୍ନବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ କିଣିଲେ ।

"ଗୋଟିଏ ଖେଳନା, ଏକ କିଲୋ ମିଠେଇ ଓ ଗୋଟିଏ ପତ୍ରିକା" ।

ଶ୍ରୀମତୀ ମେହେଟା କିଣିଥିବା ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

"ଭେଣ୍ଡି, ଆଳୁ ଓ ବିଲାତି ବାଇଗଣ"

ଉଭୟ ଉଦାହରଣରେ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ସ୍ପଷ୍ଟଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ।

"ସତ୍ୟ କହୁଥିବା ଛାତ୍ର ସମୂହ" ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେ କ'ଣ କହିପାରିବ ? ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କି ? ବୋଧହୁଏ ନୁହେଁ ।

ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥିବା ଏକ ସମୂହକୁ ଏକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଗୋଟିଏ ସମୂହ ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହେଲେ ହିଁ ଏହା ଏକ ସେଟ୍ ହୋଇଥାଏ ।

ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌କୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିବାପାଇଁ;

"ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ" (Well defined) ଭାଷା ପ୍ରଥମେ ଜର୍ମାନ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜର୍ଜ କ୍ୟାଣ୍ଟର୍ (1845-1918 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ) ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ । ତାଙ୍କୁ ସେଟ୍‌ତତ୍ତ୍ୱର ଜନକ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଆଜିକାଲି ଗଣିତର ସମସ୍ତ ଧାରଣାର ଆଲୋଚନା ଲାଗି ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଉଛି ।

ଆମର ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଆମେ ବସ୍ତୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ସମ୍ବନ୍ଧ (relation) ଥିବାର ଦେଖିଥାଉ । ଗାଣିତିକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧର ଧାରଣା ସୃଷ୍ଟି ହେଲାଣି ।

1624 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦରେ ଲିବ୍‌ନିଜ୍ ପ୍ରଥମେ 'ଫଳନ (Function) ଶବ୍ଦର ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ । 'ଫଳନ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସମ୍ବନ୍ଧ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ, ମାତ୍ର **ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମ୍ବନ୍ଧ ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।**

ଏହି ପାଠରେ ଆମେ ସେଟ୍, ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ, ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ, ସମ୍ବନ୍ଧଟିଏ ଫଳନ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ, ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଫଳନ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ମୌଳିକ ସଂଜ୍ଞା ଓ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ି ସାରିବାପରେ, ତୁମେ

- ସେଟ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା ଦେଇପାରିବ ଓ ଏହାକୁ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିପାରିବ;
- ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ସେଟ୍, ଯଥା : ସସୀମ ସେଟ୍, ଅସୀମ ସେଟ୍, ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍, ଏକ ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍, ସମତୁଲ୍ୟ ସେଟ୍, ସମାନ ସେଟ୍, ଉପସେଟ୍ ଆଦିକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍, ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ପୂରକ ସେଟ୍ ଏବଂ ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତରକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦ, ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍, ଏକ ସେଟ୍‌ର ପୂରକ, ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର ଆଦି ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ଉପସ୍ଥାପନ କରିପାରିବ ।
- ବାସ୍ତବ ଜୀବନର ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ;
- ସମ୍ବନ୍ଧ ଓ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଦେବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ସେମାନଙ୍କର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ଏକ ଫଳନର ପରିସର ଓ ବ୍ୟାପ୍ତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାର ଫଳନ (ଏକ-ଏକ, ଅନେକ-ଏକ, ଆଚ୍ଛାଦକ (onto), ଅନ୍ତର୍କ୍ଷେପୀ ଓ ଏକ-ଏକ ଆଚ୍ଛାଦନ (bijection)ର ସଂଜ୍ଞା ଦେଇପାରିବ)
- ଏକ ଫଳନ, ଏକ-ଏକ, ଅନେକ-ଏକ, ଆଚ୍ଛାଦକ (onto) ବା ଅନ୍ତର୍କ୍ଷେପୀ (into) ତାହା ଜାଣିପାରିବ;
- ଫଳନର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବ;
- ଅଯୁଗ୍ମ ଓ ଯୁଗ୍ମ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଦେବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ତା'ର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ଏକ ଫଳନ ଯୁଗ୍ମ ବା ଅଯୁଗ୍ମ ଫଳନ ବା କୌଣସିଟି ନୁହେଁ, ତାହା ଜାଣିପାରିବ ।
- $|x|$, $[x]$ ଭଳି ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା କହିପାରିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଏହାର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ । ତା' ସହିତ 'ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଫଳନ' (greatest integer function), ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଫଳନ, ଲଗାରିଦିମ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଓ ଘାତଙ୍କୀୟ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଦେବା ସହ ସେଗୁଡ଼ିକର ଉଦାହରଣ ମଧ୍ୟ ଦେଇପାରିବ ।
- ପ୍ରତିଲୋମୀ ଫଳନର ସଂଜ୍ଞା ଦେଇପାରିବ ।
- ପ୍ରତିଲୋମୀ ଫଳନ ସମ୍ଭବ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ଜାଣିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ବ୍ୟବସ୍ଥା, କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିର ଧାରଣା ।

15.1 କେତେକ ମାନକ ସଙ୍କେତ

ଏହି ପାଠ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ବିଭିନ୍ନ ପଦର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ପୂର୍ବରୁ, ଆସ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା :

(i)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଡେଙ୍ଗା ପିଲାମାନଙ୍କର ସମୂହ	(i)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର 180 ସେ.ମି. ଅପେକ୍ଷା ଅଧିକ ଉଚ୍ଚତା ସମ୍ପନ୍ନ ପିଲାମାନଙ୍କର ସମୂହ
(ii)	ତୁମ କଲୋନୀରେ ଥିବା ସଚ୍ଚୋଟ ବ୍ୟକ୍ତିମାନଙ୍କର ସମୂହ	(ii)	ତୁମ କଲୋନୀର ଯେଉଁ ବ୍ୟକ୍ତିମାନେ କୌଣସି ଚୋରି ଘଟଣାରେ ସଂପୃକ୍ତ ହୋଇ ନାହାନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କର ସମୂହ ।
(iii)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ପାଠାଗାରରେ ଥିବା ମନୋଗ୍ରାହୀ ପୁସ୍ତକଗୁଡ଼ିକର ସମୂହ	(iii)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଲାଇବ୍ରେରୀରେ ଥିବା ଗଣିତ ବହି ସମୂହ ।
(iv)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ବୁଦ୍ଧିମାନ ପିଲାମାନଙ୍କର ସମୂହ	(iv)	ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ବାର୍ଷିକ ପରୀକ୍ଷାରେ 80%ରୁ ଅଧିକ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ପିଲାମାନଙ୍କର ସମୂହ ।

ଉପରେ ଥିବା ଅଭିଲମ୍ବ ଭାବରେ ଅଙ୍କିତ ରେଖାର ବାମ ପାଖରେ ଥିବା ସମୂହଗୁଡ଼ିକରେ କୁହାଯାଇଥିବା ପଦ 'ଡେଙ୍ଗା', 'ସଚ୍ଚୋଟ', 'ମନୋଗ୍ରାହୀ' ଓ 'ବୁଦ୍ଧିମାନ୍' ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକ ସ୍ପଷ୍ଟ ଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ । ସେହି ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଭିନ୍ନ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଧାରଣା ଭିନ୍ନ । ଏଣୁ ସେହି ସମୂହଗୁଡ଼ିକୁ 'ସେଟ୍' ବୋଲି କୁହାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ଅନ୍ୟପକ୍ଷେ, ଅଭିଲମ୍ବ ଭାବରେ ଅଙ୍କିତ ରେଖାର ଡାହାଣ ପାଖରେ ଥିବା '180 ସେ.ମି. ଅପେକ୍ଷା ଅଧିକ ଉଚ୍ଚତା ସମ୍ପନ୍ନ', 'ଗଣିତ ବହି', 'ଚୋରି ଘଟଣାରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ହୋଇନଥିବା', '80% ଠାରୁ ଅଧିକ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା' ଗୁଣଗୁଡ଼ିକ ସ୍ପଷ୍ଟଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ । ଏଣୁ ଏହି ସମୂହଗୁଡ଼ିକୁ **ସେଟ୍** ବୋଲି କୁହାଯାଇପାରିବ ।

କୌଣସି ସମୂହ ଏକ ସେଟ୍ ହେଲେ, ଏହି ସମୂହ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ବସ୍ତୁକୁ ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ର ଏକ **ଉପାଦାନ** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ସାଧାରଣତଃ ଏକ ସେଟ୍ ଇଂରେଜି ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ଗୋଟିଏ ବଡ ଅକ୍ଷର (Capital Letter) ଦ୍ୱାରା ଓ ଏହାର ଉପାଦାନକୁ ଛୋଟ ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, A = ଖେଳଣା ହାତୀ, ମିଠା ପ୍ୟାକେଟ୍, ପତ୍ରିକା

ସେଟ୍‌କୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ କେତେକ ମାନକ ସଙ୍କେତ

N : ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

W : ଅଖଣ୍ଡ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

Z ବା I : ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

Z^+ : ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

Z^- : ରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

Q : ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

R : ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍

C : ସମ୍ମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

ବାରମ୍ବାର ବ୍ୟବହୃତ ହେଉଥିବା ଆଉ କେତେକ ସଙ୍କେତ

$\in$: ର ଉପାଦାନ ଅଟେ

$\notin$: ର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ

$\exists$: ଅସ୍ତିତ୍ୱ ଅଛି,

$\nexists$: ଅସ୍ତିତ୍ୱ ନାହିଁ

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, N ହେଉଛି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଏବଂ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ 2 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା, ମାତ୍ର –2 ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । ଏହି କଥାକୁ ଆମେ ସଙ୍କେତ ବ୍ୟବହାର କରି ଲେଖୁ, $2 \in N$ ଏବଂ $-2 \notin N$.

15.2 ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ଉପସ୍ଥାପନା

ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌କୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରିବା ଲାଗି ଦୁଇଟି ପଦ୍ଧତି ଅଛି ।

15.2.1 (i) ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି (Tabular form)

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା କରି ଲେଖାଯାଏ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦୁଇଟି ଉପାଦାନ ମଧ୍ୟରେ କମା ଦିଆଯାଏ । ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ କୁଟିଳ ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଆବଦ୍ଧ କରି ରଖାଯାଏ ।

ଯଦି ଇଂରାଜି ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ (vowel) ଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍ V ହୁଏ, ତେବେ ଏହାକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଏ ।

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

(ii) ଯଦି 7 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ A ହୁଏ, ତେବେ, ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଆମେ ଲେଖୁ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

ଟୀକା : ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଏକ ସେଟ୍ ଲେଖିବା ବେଳେ, ଏହାର କୌଣସି ଉପାଦାନକୁ ବାରମ୍ବାର ଲେଖିବା ନାହିଁ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି Mathematics ଶବ୍ଦରେ ବ୍ୟବହୃତ ଅକ୍ଷରମାନଙ୍କର ସେଟ୍ A ହୁଏ, ତେବେ ଆମେ ଲେଖିବା

$$A = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$$

15.2.2 ସେଟ୍ ଗଠନକାରୀ ବା ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତି (Set-builder form)

ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା କରି ଲେଖାଯାଏ ନାହିଁ । ମାତ୍ର ସେଗୁଡ଼ିକର କୌଣସି ଏକ ସାଧାରଣ ଧର୍ମ ଦ୍ୱାରା ସେମାନଙ୍କୁ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଇଂରାଜି ବର୍ଣ୍ଣନମାଳା ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ (vowel) ମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ V କୁହାଯାଉ । V ସେଟ୍‌କୁ ସୂତ୍ରପଦ୍ଧତିରେ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଏ ।

V = {x : x ହେଉଛି ଇଂରାଜି ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ସ୍ୱରବର୍ଣ୍ଣ}

(ii) 7 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ A କୁହାଯାଉ ।

ତେବେ, $A = \{x : x \in N$ ଏବଂ $1 \leq x < 7\}$

ଟୀକା : ସଙ୍କେତ ':' କୁ ଯେପରିକି (such as) ବୋଲି ପଢ଼ିବା ।

ଉଦାହରଣ 15.1 : ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ :

(a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$

ସମାଧାନ : (a) $A = \{x : x \in Z$ ଏବଂ $-3 \leq x \leq 3\}$

(b) $B = \{x : x = 3n$ ଏବଂ $n \in N, n \leq 4\}$

ଉଦାହରଣ 15.2 : ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ :

(a) $C = \{x : x \in N$ ଏବଂ $50 \leq x \leq 60\}$

(b) $D = \{x : x \in R$ ଏବଂ $x^2-5x+6=0\}$

ସମାଧାନ : (a) C = {50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60}

(b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, 2$

$\therefore D = \{2, 3\}$

15.3 ସେଟ୍‌ର ବର୍ଗୀକରଣ

15.3.1 ସମୀମ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍

A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ଯେପରିକି

A = {x : x ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

B = {x : x ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଜଣେ ଛାତ୍ର}

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ Aର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ଅସୀମ ଓ B ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସସୀମ । ଏଣୁ Aକୁ ଅସୀମ ସେଟ୍ (Infinite set) ଓ Bକୁ ସସୀମ ସେଟ୍ (Finite set) କୁହାଯାଏ ।

ଏକ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣି ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରିଲେ, ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ସସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣି ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବା ସମ୍ଭବ ନ ହେଲେ, ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ଅସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

15.3.2 ଶୂନ୍ୟ ବା ରିକ୍ତ ସେଟ୍ (Empty Or Null set) :

ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର ।

A = {x : x ∈ R ଏବଂ $x^2+1 = 0$}

B = {x : x ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକି 7 ଅପେକ୍ଷା ବଡ ମାତ୍ର 5 ଅପେକ୍ଷା ସାନ}

A ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ମାତ୍ର ଏପରି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ଯାହାର ବର୍ଗ ହେଉଛି –1 । ଏଣୁ A ସେଟ୍‌ର କୌଣସି ଉପାଦାନ ନାହିଁ । ସେହିପରି, କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ, ଯାହାକି 7 ଅପେକ୍ଷା ବଡ ଓ 5 ଅପେକ୍ଷା ସାନ । ଏପରି ସେଟ୍‌କୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଏପରି ସେଟ୍‌କୁ ϕ ବା { } ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ର କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥାଏ, ତାକୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ବା ରିକ୍ତ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ϕ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

15.3.3 ଏକ ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ (Singleton set)

ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା :

A = {x : x ହେଉଛି ଏକ ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା}

ଯେହେତୁ 2 ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା, ଏଣୁ A ସେଟ୍‌ର ତାହା ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ଉପାଦାନ । ଏପରି ସେଟ୍‌କୁ ଏକ– ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ (Singleton set) କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ A = {2}

ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ ଥାଏ, ତାକୁ ଏକ–ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

15.3.4 ସମାନ ଓ ସଦୃଶ ସେଟ୍ (equal and equivalent sets) :

ନିମ୍ନସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

(i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, 3\}$ (ii) $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c\}$

ଉଦାହରଣ (i)ରେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଅଭିନ୍ନ । ଏପରି ସେଟ୍ ଦୁଇଟିକୁ ସମାନ ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ $A = B$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ (ii)ରେ D ଓ E ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟରେ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ରହିଛନ୍ତି, ମାତ୍ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଭିନ୍ନ । ଏଠାରେ ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟକୁ ସଦୃଶ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $A \approx B$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ Bର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟିକୁ ସଦୃଶ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ, ମାତ୍ର ସେ ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌କୁ ସମାନ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହେବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଅଭିନ୍ନ (ବା ସମାନ) ହୋଇଥା'ନ୍ତି ।

15.3.5 ଅଣଚ୍ଛେଦୀ ସେଟ୍ (Disjoint sets) :

ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନ ଥିଲେ, ସେ ଦୁଇଟିକୁ ଅଣଚ୍ଛେଦୀ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ସେଟ୍ $A = \{1, 3, 5\}$ ଏବଂ $B = \{2, 4, 6\}$ ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଅଣଚ୍ଛେଦୀ ସେଟ୍ ।

ଉଦାହରଣ 15.3 ଦତ୍ତ ଅଛି :

$A = \{2, 4\}$ ଏବଂ $B = \{x : x$ ହେଉଛି $x^2 + 6x + 8 = 0$ ର ସମାଧାନ$\}$

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ଅଣଚ୍ଛେଦୀ କି ?

ସମାଧାନ : $x^2 + 6x + 8 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା $x = -4, -2$

$\therefore B = \{-4, -2\}$ ଏବଂ $A = \{2, 4\}$

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ନ ଥିବାରୁ A ଓ B ଅଣଚ୍ଛେଦୀ ।

ଉଦାହରଣ 15.4 ଯଦି $A = \{x : x$ ହେଉଛି ଇଂରାଜି ବର୍ଣ୍ଣମାଳାର ସ୍ୱର ବର୍ଣ୍ଣ$\}$

ଏବଂ $B = \{y : y \in N$ ଓ $y \le 5\}$ । ସ୍ଥିର କର :

(i) $A = B$ କି ? (ii) $A \approx B$ କି ?

ସମାଧାନ : $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ରେ ପାଞ୍ଚଟି ଉପାଦାନ ରହିଛି ଏବଂ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଭିନ୍ନ ।

$\therefore A \ne B$ ମାତ୍ର $A \approx B$

ଉଦାହରଣ 15.5

$A = \{x : x$ ହେଉଛି ଏକ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ$\}$

$B = \{y : y \in N$ ଏବଂ $y \le 50\}$

A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସସୀମ ସେଟ୍ ଓ କେଉଁଟି ଅସୀମ ସେଟ୍ ?

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ଅସୀମ, ତେଣୁ A ଏକ ଅସୀମ ସେଟ୍ । ମାତ୍ର 50 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣନ କରି ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରି ହେବ, ତେଣୁ B ଏକ ସସୀମ ସେଟ୍ ।

ଉଦାହରଣ 15.6

$A = \{x : x$ ଅପରିମେୟ ଏବଂ $x^2 - 1 = 0\}$

$B = \{x : x \in Z$ ଏବଂ $-2 \le x \le 2\}$

ପୂର୍ବୋକ୍ତ କେଉଁସେଟ୍‌ଟି ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଅଟେ ?

ସମାଧାନ : ଯେଉଁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $x^2 - 1 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରେ ସେଗୁଡ଼ିକ A ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଆମେ $x^2 - 1 = 0$ ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କଲେ, ପାଇବା $x = \pm 1$ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ± 1 ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । ଏଣୁ A ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ।

ମାତ୍ର $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ । Bରେ 5ଟି ଉପାଦାନ ରହିଛି । ଏଣୁ B ଏକ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 15.7

ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଏକ–ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ ।

$A = \{x : x \in Z$ ଏବଂ $x - 2 = 0\}$, $B = \{y : y \in R$ ଏବଂ $y^2 - 2 = 0\}$

ସମାଧାନ : ସେଟ୍ Aର ଉପାଦାନ ହେଲେ $x - 2 = 0$ର ସମାଧାନ ।

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

$\therefore A = \{2\} \Rightarrow$ A ଗୋଟିଏ ଏକ–ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ ।

$y^2 - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ବାସ୍ତବ ସମାଧାନଗୁଡ଼ିକ A ର ଉପାଦାନ ।

$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$

$\therefore B = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$ । ଏଣୁ B ଏକ–ଉପାଦାନୀ ସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସମୂହ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ?

(i) ରବିବାରରୁ ଆରମ୍ଭ କରି, ଗୋଟିଏ ସପ୍ତାହର ଦିନଗୁଡ଼ିକ ।

(ii) 50 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହ ।

(iii) ତୁଳସୀ ଦାଶଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଲିଖିତ କବିତାସମୂହ ।

(iv) ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ବୃନ୍ଦ ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନରେ ଉପଯୁକ୍ତ ସଙ୍କେତ ବସାଅ :

ଯଦି $A = \{1, 2, 3\}$

(i) 1 .... A (ii) 4 ....A

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ :

(i) $A = \{x : x \in Z$ ଏବଂ $-5 \le x \le 0\}$

(ii) $B = \{x : x \in R$ ଏବଂ $x^2 - 1 = 0\}$

(iii) C = {x : x ହେଉଛି banana ଶବ୍ଦରେ ଥିବା ଅକ୍ଷର}

(iv) D = {x : x ହେଉଛି ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହା 60ର ଏକ ଗୁଣନୀୟକ}

4. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ :

(i) $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B = \{3, 6, 9, ..., \infty\}$

(iii) $C = \{2, 3, 5, 7\}$ (iv) $D = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$

A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ କି ?

5. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ସେଟ୍ ସସୀମ ଓ କେଉଁ ସେଟ୍ ଅସୀମ ଚିହ୍ନାଅ :

(i) ଏକ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ସମସ୍ତ ରେଖାର ସେଟ୍ ।

(ii) ଭୂପୃଷ୍ଠରେ ଥିବା ପ୍ରାଣୀମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

(iii) ପଚାଶ ଶହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ ଛୋଟ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

ଟିପ୍ପଣୀ

6. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ ଓ ଏକଉପାଦାନୀ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ଚିହ୍ନାଅ ।

(i) $A = \{x : x \in R$ ଏବଂ x ହେଉଛି $x^2 + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଏକ ସମାଧାନ$\}$

(ii) $B = \{x : x \in Z$ ଏବଂ x ହେଉଛି $x - 3 = 0$ ର ସମାଧାନ$\}$

(iii) $C = \{x : x \in Z$ ଏବଂ x ହେଉଛି $x^2 - 2 = 0$ ର ସମାଧାନ$\}$

(iv) $D = \{x : x$ ହେଉଛି ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର XI ଓ XII ଉଭୟ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢୁଥିବା ଗୋଟିଏ ପିଲା$\}$

7. ନିମ୍ନରେ ଥିବା A ଓ B ସେଟ୍ ଯୋଡା ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ $A = B$ ଅଥବା କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ $A \approx B$ ତାହା ଚିହ୍ନଟ କର :

(i) $A = \{a\}$, $B = \{x : x$ ହେଉଛି ଏକ ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x : x$ ହେଉଛି guava ଶବ୍ଦରେ ଥିବା ଅକ୍ଷର$\}$

(iii) $A = \{x : x$ ହେଉଛି $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ$\}$ $B = \{2, 3\}$

15.4 ଉପସେଟ୍ (Subset)

ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ସମସ୍ତ ପିଲାଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ A ଏବଂ ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଦ୍ୱାଦଶ ଶ୍ରେଣୀର ସମସ୍ତ ପିଲାଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ B କୁହାଯାଉ । ଏହି ଦୁଇ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କଲେ ଦେଖିବା ଯେ Bର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ A ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଏପରି କ୍ଷେତ୍ରରେ B ସେଟ୍‌କୁ A ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ $B \subseteq A$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ଦୁଇଟିକୁ ଦେଖ :

$$D = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

$$E = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$$

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ Dର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, E ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ଅଟେ ।

$$\therefore D \subseteq E$$

ଯଦି A ଓ B ଏପରି ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ଯେପରିକି ସେଟ୍ Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ, ସେଟ୍ Bର ମଧ୍ୟ ଉପାଦାନ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ A ସେଟ୍‌କୁ B ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ

(i) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ତା' ନିଜର ଉପସେଟ୍, ଅର୍ଥାତ୍ $A \subseteq A$ ।

(ii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥାଏ । ଏଣୁ ଉପସେଟ୍ ହେବାର ସର୍ତ୍ତ ସ୍ୱତଃ ସିଦ୍ଧ ହୁଏ । ଫଳରେ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ଅଟେ

(iii) ଯଦି $A \subseteq B$ ଓ $B \subseteq A$ ତେବେ $A = B$ ।

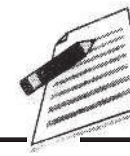
(iv) ଯଦି $A \subseteq B$ ଏବଂ $A \neq B$, ତେବେ Aକୁ Bର ପ୍ରକୃତ ଉପସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ B କୁ Aର ଅଧିସେଟ୍ (super set) ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ, $A \subset B$ ଓ $B \supset A$ ଏକା ଅର୍ଥ ବୁଝାଏ ।

ଉଦାହରଣ 15.8

ଯଦି $A = \{x : x$ ହେଉଛି 5 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$ ଏବଂ $B = \{y : y$ ହେଉଛି ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$, ତେବେ B ସେଟ୍‌ଟି A ସେଟ୍‌ର ଏକ ପ୍ରକୃତ ଉପସେଟ୍ କି ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $A = \{2, 3\}$, $B = \{2\}$

ଏଠାରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $B \subseteq A$ ଏବଂ $B \neq A$ ।



ଆମେ ଲେଖୁ, $B \subset A$ ଏବଂ ଆମେ କହୁ ଯେ B ସେଟ୍‌ଟି A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରକୃତ ଉପସେଟ୍ ।

ଉଦାହରଣ 15.9

ଯଦି $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, ହୁଏ, ତେବେ $A \subseteq B$ କି ? $B \subseteq A$ କି ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $1 \in A$, ମାତ୍ର $1 \notin B \Rightarrow A \not\subseteq B$; ପୁନଶ୍ଚ $5 \in B$, ମାତ୍ର $5 \notin A \Rightarrow B \not\subseteq A$

ଏଣୁ A ସେଟ୍‌ଟି B ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ, କିମ୍ବା B ସେଟ୍‌ଟି A ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 15.10

ଯଦି $A = \{a, e, i, o, u\}$ ଏବଂ $B = \{e, i, o, u, a\}$

କହିଲ ଦେଖି

$A \subseteq B$ ଠିକ୍ କି ?

$B \subseteq A$ ଠିକ୍ କି ?

$A \subseteq B$ ଏବଂ $B \subseteq A$ ଉଭୟ ଠିକ୍ କି ?

ସମାଧାନ : ପୂର୍ବୋକ୍ତ ସେଟ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ Bର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

$\therefore A \subseteq B$ ... (i)

ପୁନଶ୍ଚ Bର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ Aର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ

$\therefore B \subseteq A$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) ଅନୁଯାୟୀ

$A = B$

15.5 ଘାତ ସେଟ୍ (Power Set)

$A = \{a, b\}$ ହେଉ ।

Aର ଉପସେଟ୍‌ମାନ ହେଲେ ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$ ଏବଂ $\{a, b\}$ । ଆମେ ଯଦି ଏହି ଉପସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ନୂତନ ସେଟ୍ B (ମନେକରାଯାଉ)ର ଉପାଦାନ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରୁ, ତେବେ

$B = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

ଏହି ସ୍ଥଳେ Bକୁ Aର ଘାତସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ସଙ୍କେତ : A ସେଟ୍‌ର ଘାତ ସେଟ୍‌କୁ P(A) ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । Aର ସମସ୍ତ ଉପସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଉପାଦାନ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ Aର ଘାତ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 15.11 ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ର ଘାତ ସେଟ୍ ଲେଖ ।

(i) $A = \{x : x \in R$ ଏବଂ $x^2+7 = 0\}$ (ii) $B = \{y : y \in N$ ଏବଂ $1 \le y \le 3\}$

ସମାଧାନ : (i) ଏହାସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $A = \phi$ (ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍)

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସେଟ୍‌ର ଏକମାତ୍ର ଉପସେଟ୍ ହେଉଛି ϕ ।

$\therefore P(A) = \{\phi\}$

(ii) ଆମେ ସେଟ୍ Bକୁ $B = \{1, 2, 3\}$ ଭାବରେ ଲେଖିପାରିବା ।

Bର ଉପସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$ ।

$\therefore P(B) = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ ।

15.6 ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (Universal Set)

ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

A = {x : x ହେଉଛି ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ପଢୁଥିବା ଗୋଟିଏ ପିଲା}

B = {y : y ହେଉଛି ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ପଢୁଥିବା ଏକ ପୁଅ ପିଲା}

C = {z : z ହେଉଛି ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ପଢୁଥିବା ଏକ ଝିଅ ପିଲା}

D = {a : a ହେଉଛି ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଦ୍ୱାଦଶ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢୁଥିବା ଗୋଟିଏ ପିଲା}

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ B, C, D ପ୍ରତ୍ୟେକ A ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ।

ଏହି ଉଦାହରଣରେ Aକୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ରୂପେ ବିଚାର କରାଯାଇପାରେ । ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌କୁ ସାଧାରଣତଃ U ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ କଲାବେଳେ, ପ୍ରଶ୍ନରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଥିବା ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ, U ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ହୋଇଥିଲେ, Uକୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ରୂପେ ନିଆଯାଏ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ :

(i) ବିଶ୍ୱର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଯେ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ, ତାହା ବୁଝିବା ଉଚିତ ନୁହେଁ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ପ୍ରଶ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ନିଆଯାଇଥିବା ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ଟି ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରଶ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ହୋଇ ନପାରେ ।

ଉଦାହରଣ 15.12

ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସେଟ୍‌କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ରୂପେ ବିଚାର କରାଯାଇପାରେ ?

X = {x : x ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା}

Y = {y : y ଏକ ରଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା}

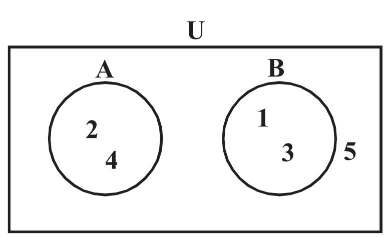
Z = {z : z ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

ସମାଧାନ : ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ Y ଓ Z ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍, X ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ । ଏହି ପ୍ରଶ୍ନକ୍ଷେତ୍ରରେ X ହେଉଛି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ।

15.7 ଭେନ୍ ଚିତ୍ର

ବ୍ରିଟିଶ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜନ୍ ଭେନ୍ (1834-1883 ଖ୍ରୀ.ଅ.) ସେଟ୍‌ର ଉପସ୍ଥାପନା ଲାଗି ଚିତ୍ରର ବ୍ୟବହାର କରିବା ଧାରଣାର ପରିକଳ୍ପନା ଆରମ୍ଭ କରିଥିଲେ । ତାଙ୍କ ଅନୁଯାୟୀ, ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌କୁ ଆୟତଚିତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଓ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ସେଟ୍‌କୁ ଆୟତଚିତ୍ରର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦେଶ ଦ୍ୱାରା ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ U = {1, 2, 3, 4, 5}, A = {2, 4} ଓ B = {1, 3} ହେଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଇଥାଉ ।



ଚିତ୍ର 15.1

ସେଟ୍‌କୁ ଯେଉଁ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଏ, ତାକୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

15.8 ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର :

ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

A = {1, 2, 3, 4, 5} ଓ B = {2, 4, 6}

ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ Aରେ ଥିବ ମାତ୍ର Bରେ ନ ଥିବ, ସେହି ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ 'A ଓ B ର ଅନ୍ତର ବା A ଅନ୍ତର B' ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ A – B ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$\therefore A - B = \{1, 3, 5\}$

ସେହିପରି, ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ Bରେ ଥିବ, ମାତ୍ର Aରେ ନ ଥିବ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ 'B ଅନ୍ତର A' ବା 'B ଓ Aର ଅନ୍ତର' ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ B – A ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

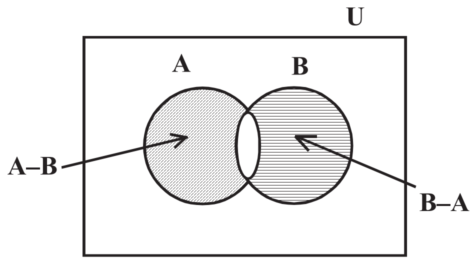
$\therefore B - A = \{6\}$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ହେଲେ,

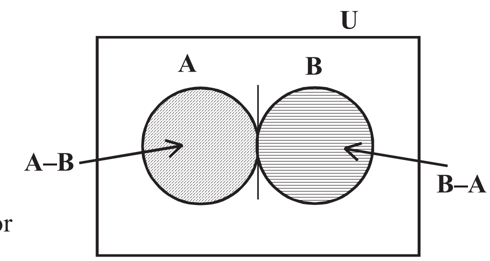
$A - B = \{x : x \in A$ ଏବଂ $x \notin B\}$

$B - A = \{x : x \in B$ ଏବଂ $x \notin A\}$

ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତରକୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଯାଏ ।



or



A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହୋଇ ନଥିଲେ
ଚିତ୍ର 15.2

A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହୋଇଥିଲେ
ଚିତ୍ର 15.3

15.9 ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ପୂରକ ସେଟ୍

Xକୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଧରାଯାଉ ଏବଂ Y ଓ Z ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ଯେଉଁଠି

X = {x : x ହେଉଛି ପରିବାରର କୌଣସି ସଭ୍ୟ}

Y = { x : x ହେଉଛି ସେହି ପରିବାରର ପୁରୁଷ ବ୍ୟକ୍ତି}

Z = {x : x ହେଉଛି ସେହି ପରିବାରର ମହିଳା}

X – Y ହେଉଛି ପରିବାରର ମହିଳାମାନଙ୍କ ସେଟ୍

X – Z ହେଉଛି ପରିବାରର ପୁରୁଷମାନଙ୍କର ସେଟ୍

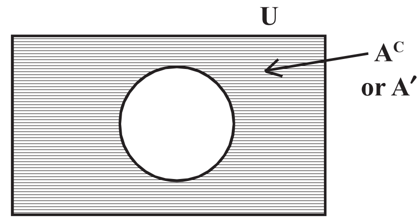
X – Yକୁ Yର ପୂରକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ Y' ବା Y^C ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

X – Zକୁ Zର ପୂରକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ Z' ବା Z^C ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଯଦି U ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ହୁଏ ଏବଂ A ଏହାର ଉପସେଟ୍ ହୁଏ, ତେବେ Aର ପୂରକ ସେଟ୍ ହେବ, Uର ଯେଉଁ ଉପାଦାନ Aରେ ନ ଥିବ ସେହି ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ଏହି ସେଟ୍‌କୁ A' ବା A^c ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$A' = U - A = \{x : x \in U$ ଏବଂ $x \notin A\}$

ଏକ ସେଟ୍‌ର ପୂରକସେଟ୍‌କୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 15.4

ମନ୍ତବ୍ୟ

(i) ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ଅନ୍ୟଟିର ଉପସେଟ୍ ନ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ସେ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ସେଟ୍, ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ହେଲେ ହିଁ, ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌ର ପୂରକ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସମ୍ଭବ ।

(ii) $\phi^c = U$ (iii) $U^c = \phi$

ଉଦାହରଣ 15.13 ଦତ୍ତ ଅଛି

A = {x : x ହେଉଛି 10 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବା 10 ସହ ସମାନ ଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

ଏବଂ B = {x : x ହେଉଛି 10 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବା 10 ସହ ସମାନ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $A - B$ (ii) $B - A$ (iii) $A - B = B - A$ ଠିକ୍ କି ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ତେଣୁ

(i) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

(ii) $B - A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(iii) ପ୍ରଶ୍ନ (i) ଓ (ii)ର ଉତ୍ତରରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ

$A - B \neq B - A$

ଉଦାହରଣ 15.14

U ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଓ A ଏହାର ଉପସେଟ୍ ହେଉ, ଯେଉଁଠି

$U = \{x : x \in N$ ଓ $x \leq 10\}$

A = {y : y ହେଉଛି 10 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା}

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) A^c (ii) A^c କୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ଦର୍ଶାଅ ।

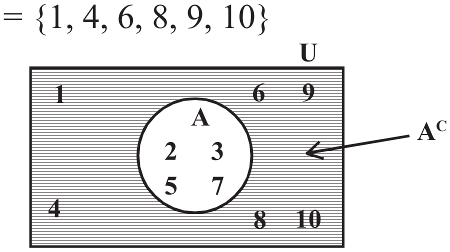
ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି -

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 3, 5, 7\}$

(i) $A^c = U - A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

(ii)



ଚିତ୍ର 15.5

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.2

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନରେ ଉପଯୁକ୍ତ ସଙ୍କେତ ବସାଅ । ଦତ୍ତ ଅଛି ।

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) ϕ .... A (iii) $\{2, 3, 9\}$ .... A

(iii) 3 .... A (iv) 10 .... A

2. ଦତ୍ତ ଅଛି : $A = \{a, b\}$

P(A)ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

3. $A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ହେଉ । ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ଓ କେଉଁଟି ଭୁଲ ?

(i) $\{1, 2\} \subset A$ (ii) $\phi \in A$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ଓ କେଉଁଟି ମିଥ୍ୟା ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) ସମସ୍ତ ବାଳକଙ୍କ ସମୂହ, ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ସମୂହ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

(ii) ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ସମସ୍ତ ଛାତ୍ର ସମୂହ, ତୁମ ବିଦ୍ୟାଳୟର ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ସମୂହ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

(iii) ଆୟତଚିତ୍ର ସମୂହ, ଚତୁର୍ଭୁଜ ସମୂହର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

(iv) ମୂଳବିନ୍ଦୁ (origin)କୁ କେନ୍ଦ୍ର ରୂପେ ନେଇ ଯେତେ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ, ସେଗୁଡ଼ିକର ସମୂହ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ର ଥିବା ଉପବୃତ୍ତ (ellipse) ସମୂହ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ଓ $B = \{5, 6, 7\}$ ହେଲେ, (i) A – B ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ii) B – A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. N କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଧରାଯାଉ ଏବଂ A, B, C, D ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ, ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ ହୁଅନ୍ତୁ । ଦତ୍ତ ଅଛି

A = {x : x ହେଉଛି ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

B = {x : $x \in N$ ଏବଂ x ହେଉଛି 3ର ଏକ ଗୁଣିତକ}

C = {x : $x \in N$ଏବଂ $x \geq 5$}

D = {x : $x \in N$ ଏବଂ $x \leq 10$}

A, B, C ଓ Dର ପୂରକ ଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15.10 ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କର ଛେଦ (Intersection of sets)

ନିମ୍ନସ୍ଥ ସେଟ୍ ଦୁଇଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଏବଂ $B = \{2, 4, 6\}$

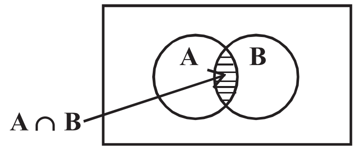
ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି । ଏହି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ସେଟ୍‌ର ଛେଦ ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ $A \cap B$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଏଠାରେ, $A \cap B = \{2, 4\}$

A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ ସେଟ୍‌ରେ ଥା'ନ୍ତି, ସେଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍‌କୁ A ଓ Bର ଛେଦ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ $A \cap B$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$A \cap B$ = {x : $x \in A$ ଏବଂ $x \in B$}

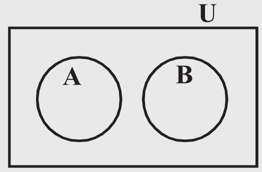
$A \cap B$କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 15.6

ମନ୍ତବ୍ୟ :

$A \cap B = \phi$ ହେଲେ, A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ହୋଇଥାନ୍ତି । ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରେ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍‌କୁ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଯାଇଥାଏ ।



ଚିତ୍ର 15.7

ଉଦାହରଣ : 15.15

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ

A = {x : x ହେଉଛି 52 ଗୋଟି ତାସ ପଟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ ରଜା}

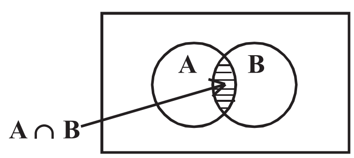
ଏବଂ B = {y : y ହେଉଛି 52 ଗୋଟି ତାସ ପଟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକ କଳାପାନ}

(i) $A \cap B$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ii) $A \cap B$ କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ : (i) 52 ପଟ ତାସ ମଧ୍ୟରେ କେବଳ 4 ଗୋଟି ରାଜାଥିବାରୁ ସେଟ୍ Aର କେବଳ 4 ଗୋଟି ଉପାଦାନ ଅଛି । ତାସ୍ ମୁଠାରେ 13ଗୋଟି କଳାପାନ ତାସ ଥିବାରୁ, B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା 13 ଏବଂ ଏହି 13 ଗୋଟି କଳାପାନ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ରାଜା ଅଛି । ଏଣୁ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଅଛି ।

$\therefore$ $A \cap B$ = {କଳାପାନ ରାଜା}

(ii)



ଚିତ୍ର 15.8

15.11 ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କର ସଂଯୋଗ

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର :

(i) ଭାରତୀୟ ପୁରୁଷ କ୍ରିକେଟ୍ ଟିମ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍ A ଏବଂ ଭାରତୀୟ ମହିଳା କ୍ରିକେଟ୍ ଟିମ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍ B ରୂପେ ନିଆଯାଉ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ । ଏହି ଦୁଇ ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି ଉଭୟ ଟିମ୍‌ର ସମସ୍ତ ଖେଳାଳି ଏବଂ ଏହାକୁ $A \cup B$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(ii) ତୁମ ସ୍କୁଲର କ୍ରିକେଟ୍ ଟିମ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍ D ଏବଂ ତୁମ ସ୍କୁଲର ହକି ଟିମ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କୁ ସେଟ୍ E ରୂପେ ନିଆଯାଉ । ଧରି ନିଆଯାଉ 3 ଜଣ ଖେଳାଳି ଉଭୟ ଟିମ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ D ଓ E ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି ଉଭୟ ଟିମ୍‌ର ସମସ୍ତ ଖେଳାଳିମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ଏହି

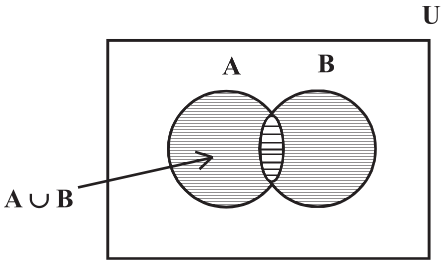
ସଂଯୋଗ ସେଟ୍‌ର ଖେଳାଳିମାନଙ୍କର ନାମ ଲେଖିବା ବେଳେ ପୂର୍ବୋକ୍ତ 3 ଜଣ ଖେଳାଳିଙ୍କର ନାମ ଥରେ ଲେଖାଏଁ ଲେଖାଯିବ ।

କେବଳ ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ Bର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି A ବା B ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

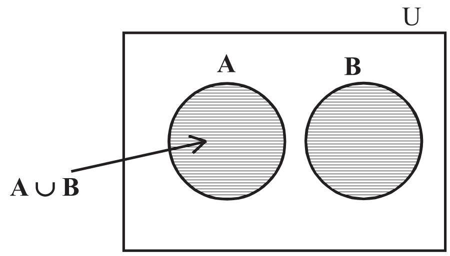
ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଆମେ ଲେଖିବା : $A \cup B = \{x : x \in A$ ବା $x \in B\}$

ଅଥବା, $A \cup B = \{x : x \in A - B$ ବା $x \in B - A$ ବା $x \in A \cap B\}$

$A \cup B$କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ :



ଚିତ୍ର 15.9



ଚିତ୍ର 15.10

$n(A \cup B) = n(A-B) + n(B-A) + n(A \cap B)$

ବା $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

ଯେଉଁଠି $n(A \cup B)$ ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା $A \cup B$ ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ : 15.16

$A = \{x : x \in Z^+$ ଏବଂ $x \leq 5\}$

$B = \{y : y$ ହେଉଛି 10 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$

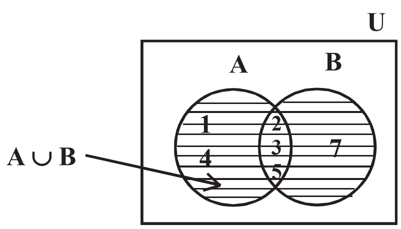
(i) $A \cup B$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ii) $A \cup B$ ର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ।

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

(ii)



ଚିତ୍ର 15.12

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.3

1. ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ଯୋଡ଼ା ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ଓ କେଉଁ ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ନୁହଁନ୍ତି ତାହା ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) $\{x : x$ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$, $\{y : y$ ହେଉଛି ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା$\}$

(ii) $\{x : x$ ହେଉଛି 12ର ମୌଳିକ ଗୁଣନୀୟକ$\}$, $\{y : y \in N$ ଏବଂ $3 \leq y \leq 5\}$

(iii) $\{x : x$ ହେଉଛି 52 ପଟ ମଧ୍ୟରୁ ଏକ ରାଜା$\}$ $\{y : y$ ହେଉଛି 52 ପଟ ତାସ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଠିକିରି$\}$

(iv) $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, e, i, o, u\}$

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ A ଓ B ସେଟ୍‌ର ଛେଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $A = \{x : x \in z\}, B = \{x : x \in N\}$ (ii) A = {ରାମ, ରହିମ୍, ଗୋବିନ୍ଦ, ଗଉତମ}
B = {ସୀତା, ମିରା, ଫତିମା, ମନ୍‌ପ୍ରୀତ}

3. ଦତ୍ତ ଅଛି : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$

4. ଯଦି $A = \{x : x \in N\}, B = \{y : y \in Z\}$ ଏବଂ $-10 \le y \le 0\}$ ହୁଏ, ତେବେ $A \cup B$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ତୁମ ଉତ୍ତରକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି ଓ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

5. ଯଦି $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{8, 10, 12, 14\}, C = \{14, 16, 18, 20\}$ ହୁଏ, ତେବେ
(i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cap C)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଧରି ନିଆଯାଉ $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}, A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$
ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । (i) $(A \cup B)'$ (ii) $(A \cap B)'$ (iii) $(B')'$ (iv) $(B-A)'$

7. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲାଗି ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର :

(i) $A \cap B$ ଯେଉଁଠି $B \subset A$ (ii) $A \cap B$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍

(iii) $A \cap B$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ଅନ୍ୟର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ସେ ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ନୁହନ୍ତି ।

8. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ଲାଗି ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(i) $A \cup B$ ଯେଉଁଠି $A \subset B$ । (ii) $A \cup B$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ।

(iii) $A \cup B$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ଅନ୍ୟର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ସେ ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ନୁହନ୍ତି ।

9. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଦର୍ଶାଅ :

(i) $A - B$ ଏବଂ $B - A$ ଯେଉଁଠି $A \subset B$

(ii) $A - B$ ଏବଂ $B - A$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ହେଉଛନ୍ତି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।

(iii) $A - B$ ଏବଂ $B - A$ ଯେଉଁଠି A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ଅନ୍ୟର ଉପସେଟ୍ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ସେ ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ନୁହନ୍ତି ।

15.12 ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ସେଟ୍

ନିମ୍ନ ସେଟ୍ ଦୁଇଟି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

$A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$

A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ହେଉଛି

$\{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

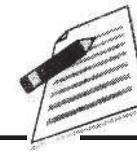
ଏହି ସେଟ୍‌କୁ $A \times B$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ଏବଂ ଏହାକୁ A ଓ Bର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍

$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

B ସେଟ୍ ଓ A ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ସେଟ୍‌କୁ $B \times A$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଏହି ଉଦାହରଣରେ

$B \times A = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $A \times B \neq B \times A$



ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଆମେ ଲେଖୁ :

$A \times B = \{(a, b) : a \in A$ ଏବଂ $b \in B\}$

$B \times A = \{(b, a) : b \in B$ ଏବଂ $a \in A\}$

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର : $A = \phi$, ବା $B = \phi$ ବା $A, B = \phi$ ହେଲେ, $A \times B = B \times A = \phi$ ।

ଉଦାହରଣ 15.17

(i) $A = \{a, b, c\}, B = \{d, e\}, C = \{a, d\}$ ହେଉ

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \cap C) \times B$ (v) $(A \cap B) \times C$ (vi) $A \times (B - C)$

ସମାଧାନ : (i) $A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$

(ii) $B \times A = \{(d, a), (d, b), (d, c), (e, a), (e, b), (e, c)\}$

(iii) $A = \{a, b, c\}, B \cup C = \{a, d, e\}$

$\therefore$ $A \times (B \cup C) = \{(a, a), (a, d), (a, e), (b, a), (b, d), (b, e), (c, a), (c, d), (c, e)\}$

(iv) $A \cap C = \{a\}, B = \{d, e\}$

$\therefore$ $(A \cap C) \times B = \{(a, d), (a, e)\}$

(v) $A \cap B = \phi, C = (a, d), \therefore (A \cap B) \times C = \phi$

(vi) $A = \{a, b, c\}, B - C = \{e\}$

$\therefore A \times (B - C) = \{(a, e), (b, e), (c, e)\}$

15.13 ସମ୍ବନ୍ଧ

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କର :

A = {ମୋହନ, ସୋହନ୍, ଡାଭିଡ୍, କରିମ୍}

B = {ରିତା, ମ୍ୟାରି, ଫତିମା}

ଧରି ନିଆଯାଉ ଯେ ରିତାର ମୋହନ ଓ ସୋହନ୍ ଦୁଇଟି ଭାଇ । ମ୍ୟାରିର ଗୋଟିଏ ଭାଇ ଓ ସେ ହେଉଛି ଡାଭିଡ୍ ଏବଂ ଫତିମାର ଗୋଟିଏ ଭାଇ ଓ ସେ ହେଉଛି କରିମ୍ । ଆମେ ଯଦି Aର ଉପାଦାନ ସହିତ B ର ଉପାଦାନକୁ 'ର ଭଉଣୀ' ସମ୍ବନ୍ଧ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରୁ, ତେବେ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଆମେ ପାଇବା – ମୋହନ R ରିତା, ସୋହନ R ରିତା, ଡାଭିଡ୍ R ମ୍ୟାରି, କରିମ୍ R ଫାତିମା । ଦୁଇଟି ନାମ ମଧ୍ୟରୁ 'R' କୁ ବାଦ୍ ଦେଇ ଲେଖିଲେ, ଉପରୋକ୍ତ କଥାଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିତ ଯୋଡିରେ ପରିଣତ ହେବ, ଯଥା :

(ମୋହନ, ରିତା), (ସୋହନ୍, ରିତା), (ଡାଭିଡ୍, ମ୍ୟାରି), (କରିମ୍, ଫତିମା) ।

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ କ୍ରମିତ ଯୋଡିମାନଙ୍କର ସେଟ୍ R ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ, ଯଥା :

R = {(ମୋହନ୍, ରିତା), (ସୋହନ, ରିତା), (ଡାଭିଡ୍, ମ୍ୟାରି), (କରିମ୍, ଫତିମା)}

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $R \subseteq A \times B$, ଅର୍ଥାତ୍

$R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ ଏବଂ $a R b\}$

A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ହେଲେ, Aରୁ B କୁ ସମ୍ବନ୍ଧ R ହେଉଛି $A \times B$ର ଏକ ଉପସେଟ୍ ।

ଯଦି (i) $R = \phi$, R କୁ ଶୂନ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

(ii) $R = A \times B$, R କୁ ବ୍ୟାପକ ସମ୍ବନ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

(iii) R ସମ୍ବନ୍ଧଟି Aର A କୁ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ହେଲେ, ଏହାକୁ A ଉପରେ ସମ୍ବନ୍ଧ ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

(iv) $R = \{(a, a) \forall a \in A\}$, ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ତତ୍‌ସମ ସମ୍ବନ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

15.13.1 ସମ୍ବନ୍ଧର ପରିସର (domain) ଓ ବିସ୍ତାର (range)

ଯଦି ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ରୁ ଆଉ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌କୁ R ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଏହାର ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବା କ୍ରମିତ ଯୋଡିମାନଙ୍କର ପ୍ରଥମ ଅଂଶମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧର ପରିସର ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଂଶମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧର ବିସ୍ତାର କୁହାଯାଏ ।

ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉଦାହରଣକୁ ବିଚାର କରାଯାଉ :

ପରିସର = {ମୋହନ୍, ସୋହନ୍, ଡାଭିଡ୍, କରିମ୍}

ବିସ୍ତାର = {ରିତା, ମ୍ୟାରି, ଫତିମା}

ଉଦାହରଣ 15.18

ଦତ୍ତ ଅଛି $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3\}$ Aରୁ B କୁ ସମ୍ବନ୍ଧ R ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ।

$R = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ ଏବଂ a, ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ}

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

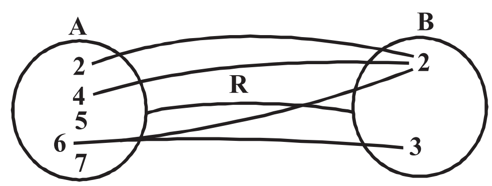
(i) Rକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର

(iii) Rର ବିସ୍ତାର ଏବଂ (iv) ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ Rକୁ ଉପସ୍ଥାପନ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $R = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$

(ii) Rର ପରିସର = $\{2, 4, 6\}$ (iii) Rର ବିସ୍ତାର = $\{2, 3\}$ ।

(iv)



ଚିତ୍ର 15.12

ଉଦାହରଣ 15.19

ଯଦି Aରୁ Bକୁ ସମ୍ବନ୍ଧ R 'ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର' ହୁଏ । ଯେଉଁଠି $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ଓ $B = \{1, 2, 6\}$, ହୁଏ ତା'ହେଲେ

(i) R କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର ଏବଂ (iii) Rର ବିସ୍ତାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) $R = \{(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

(ii) Rର ପରିସର = $\{3, 4, 5\}$, (iii) Rର ବିସ୍ତାର = $\{1, 2\}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.4

1. ଦତ୍ତ : $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{10\}$

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

2. U ହେଉଛି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଏବଂ A ଓ B ଏହାର ଉପସେଟ୍, ଯେଉଁଠି $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, B = {x : x ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା $A' \times B'$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$

Aରୁ Bକୁ ସମ୍ବନ୍ଧ R ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ :

R = {(a, b) : $a \in A$, $b \in B$ ଏବଂ a ହେଉଛି bର ଏକ ଗୁଣିତକ}

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) Rକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର (iii) Rର ବିସ୍ତାର ।

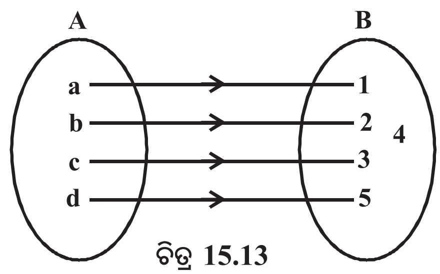
4. Nରୁ Nକୁ R ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ଓ R ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ : $R = \{(x, y) : 4x + y = 12, x, y \in N\}$
ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) Rକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର (iii) Rର ବିସ୍ତାର

5. Nରେ R ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ଓ R ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ :
$R = \{(x, x^2)$: x ହେଉଛି 15ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା}
ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) Rକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର (iii) Rର ବିସ୍ତାର ।

6. ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ R ସମ୍ବନ୍ଧଟି ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ : $R = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 0\}$
ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) Rକୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ (ii) Rର ପରିସର (iii) Rର ବିସ୍ତାର ।

15.13 ଫଳନ (Function)ର ସଂଜ୍ଞା

ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ବିଚାର କର : f : {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 5)} ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ଦେଖୁଛୁ ଯେ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଲାଗି B ସେଟ୍‌ରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଅଛି ।



ଚିତ୍ର 15.13

A ସେଟ୍‌ରୁ B ସେଟ୍‌କୁ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧ f, A ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ B ସେଟ୍‌ର ଏକ ଅନନ୍ୟ ଉପାଦାନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରୁଥିଲେ, ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧକୁ Aରୁ Bକୁ ଏକ ଫଳନ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏଣୁ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଏକ ଫଳନ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କୌଣସି ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିରେ, ପ୍ରଥମ ଉପାଦାନ ସମାନ ହୋଇନଥାଏ ।

ଆମେ ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଦେଖୁଛୁ ଯେ B ସେଟ୍‌ରେ ଏପରି ଏକ ଉପାଦାନ 4 ଅଛି, ଯାହାର A ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ପ୍ରାକ୍ ପ୍ରତିବିମ୍ବ (pre-image) ନାହିଁ, ଅର୍ଥାତ୍ A ସେଟ୍‌ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନାହିଁ, ଯାହାର B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ 4 ହେଉଛି ପ୍ରତିବିମ୍ବ । ଏଣୁ ଏଠାରେ :

(i) B ସେଟ୍‌କୁ ସହ ପରିସର କୁହାଯାଏ । (ii) {1, 2, 3, 5} ସେଟ୍‌କୁ ବିସ୍ତାର (range) କୁହାଯାଏ ।

ଏଥିରୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିପାରିବା ଯେ **ବିସ୍ତାର ହେଉଛି ସହପରିସରର ଉପସେଟ୍** । ସଙ୍କେତରେ ଫଳନକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଏ ।

$f : A \to B$ ଅଥବା $A \xrightarrow{f} B$

ଉଦାହରଣ 15.20

ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସମ୍ବନ୍ଧ Aରୁ Bକୁ ଫଳନ ଅଟେ ? ସେମାନଙ୍କର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ଲେଖ । ଏହା ଯଦି ଫଳନ ନୁହେଁ ତାହାର କାରଣ ଦର୍ଶାଅ ।

(a) $\{(1, -2), (3, 7), (4, -6), (8, 1)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 1, 2\}$

(b) $\{(1, 0), (1, -1), (2, 3), (4, 10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a, b), (b, c), (c, b), (d, c)\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c\}$

(d) $\{(2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36)\}$
$A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 9, 16, 25, 36\}$

(e) $\{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (5, -5)\}$
$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) $\left\{\left(\sin\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\cos\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\tan\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\cot\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)\right\}$

ଟିପ୍ପଣୀ

$$A = \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\},\ B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 1\right\}$$

(g) $\{(a, b), (a, 2), (b, 3), (b, 4)\}, A = \{a, b\}, B = \{b, 2, 3, 4\}$

ସମାଧାନ : (a) ଏହା ଏକ ଫଳନ ।

ପରିସର $= \{1, 3, 4, 8\}$, ବିସ୍ତାର $= \{-2, 7, -6, 1\}$

(b) ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ । କାରଣ ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡିର ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ସମାନ ।

(c) ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

ପରିସର $= \{a, b, c, d\} \neq A$, ବିସ୍ତାର $= \{b, c\}$

(d) ଏହା ଏକ ଫଳନ ।

ପରିସର $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$, ବିସ୍ତାର $= \{4, 9, 16, 25, 36\}$

(e) ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

$= \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq A$, ବିସ୍ତାର $= \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) ଏହା ଏକ ଫଳନ ।

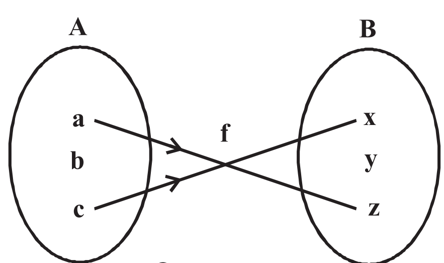
ବିସ୍ତାର $= \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\}$, ବିସ୍ତାର $= \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$

(g) ଏହା ଫଳନ ନୁହେଁ । କାରଣ : ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡିର ପ୍ରଥମ ଅଂଶଦ୍ୱୟ ସମାନ ଏବଂ ଶେଷରେ ଥିବା କ୍ରମିତ ଯୋଡି ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟ ସମାନ ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ।

ଉଦାହରଣ 15.21

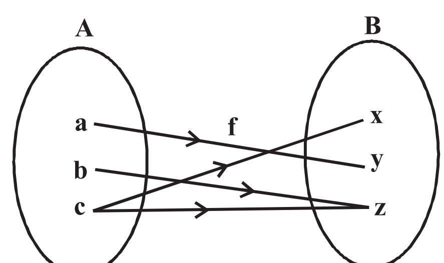
ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମ୍ବନ୍ଧ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଫଳନ ଅଥବା ନୁହେଁ ତାହା ଲେଖ ।

(a)



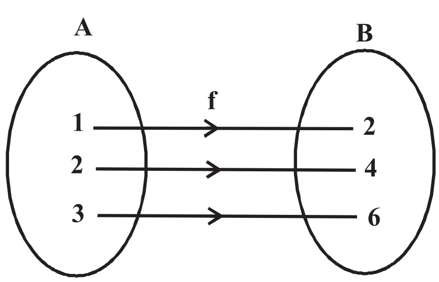
ଚିତ୍ର 15.14

(b)



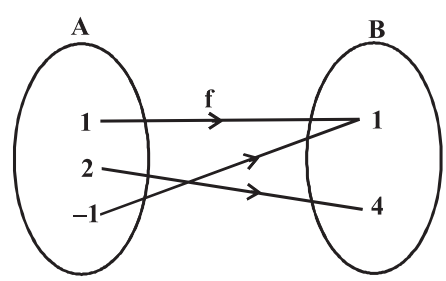
ଚିତ୍ର 15.15

(c)



ଚିତ୍ର 15.16

(d)



ଚିତ୍ର 15.17

ସମାଧାନ :

(a) f ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ, କାରଣ A ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ bର ପ୍ରତିବିମ୍ବ B ସେଟ୍‌ରେ ନାହିଁ ।

(b) f ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ, କାରଣ A ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ c ଲାଗି B ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ଅନନ୍ୟ ନୁହେଁ । C ଲାଗି ଦୁଇଟି ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଅଛି ।

(c) f ଏକ ଫଳନ, କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଲାଗି B ସେଟ୍‌ରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ (ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର) ପ୍ରତିବିମ୍ବ ରହିଛି ।

(d) f ଏକ ଫଳନ, କାରଣ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଲାଗି B ସେଟ୍‌ରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ରହିଛି ।

ଉଦାହରଣ 15.22

ନିମ୍ନରେ ଥିବା $R \to R$ ସମ୍ବନ୍ଧ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଫଳନ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(a) $y = 3x + 2$ (b) $y < x + 3$ (c) $y = 2x^2 + 1$

ସମାଧାନ :

(a) $y = 3x + 2$

ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ $x \in R$ ଲାଗି ଏକ ଅନନ୍ୟ ଉପାଦାନ $y \in R$ ରହିଛି ।

$\therefore$ ଏହା ଏକ ଫଳନ ।

(b) $y < x + 3$

x ର ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବମାନ ଲାଗି ଆମେ y ଲାଗି ଏକାଧିକ ବାସ୍ତବ ମାନ ପାଇଥାଉ ।

$\therefore$ ଏହା ଫଳନ ନୁହେଁ ।

(c) $y = 2x^2+1$

x ର ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ମାନ ଲାଗି ଆମେ y ଲାଗି ଏକ ଅନନ୍ୟ ବାସ୍ତବମାନ ପାଇବା ।

$\therefore$ ଏହା ଏକ ଫଳନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.5

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ A ରୁ Bକୁ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଫଳନ ?

(a) $\{(1, -2), (3, 7), (4, -6), (8, 11)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 11\}$

(b) $\{(1, 0), (1, -1), (2, 3), (4, 10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a, 2), (b, 3), (c, 2), (d, 3)\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3\}$

(d) $\{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (-3, 4)\}$, $A = \{1, 2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

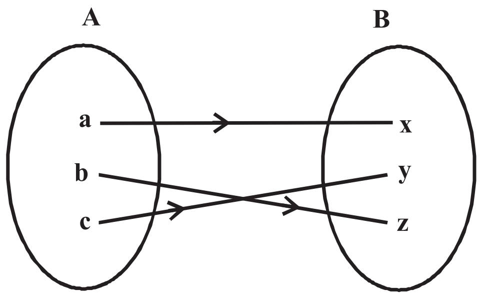
(e) $\left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\ldots\left(10,\frac{1}{10}\right)\right\}$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{11}\right\}$

(f) $\{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}$, $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $B = \{1, 4\}$

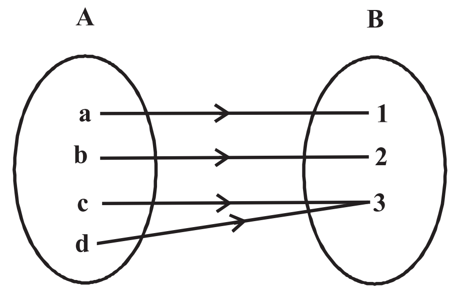
2. ନିମ୍ନବର୍ତ୍ତୀ କେଉଁ ସମ୍ବନ୍ଧ ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ?

(a)



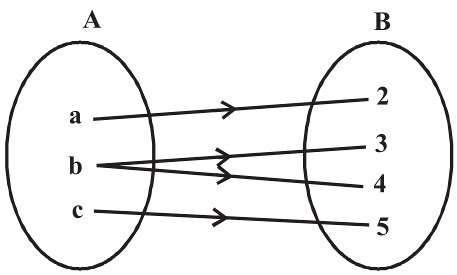
ଚିତ୍ର 15.18

(b)



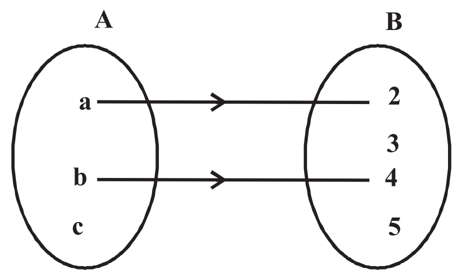
ଚିତ୍ର 15.19

(c)



ଚିତ୍ର 15.20

(d)



ଚିତ୍ର 15.21

3. $R \to R$ କୁ ଥିବା ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସମ୍ବନ୍ଧଗୁଡ଼ିକ ଫଳନ ?

(a) $y = 2x + 1$ (b) $y > x + 3$ (c) $y < 3x + 1$ (d) $y = x^2 + 1$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନମାନଙ୍କର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ଲେଖ :

(a) $\left\{\left(\sqrt{2}, 2\right), \left(\sqrt{5}, -1\right), \left(\sqrt{3}, 5\right)\right\}$

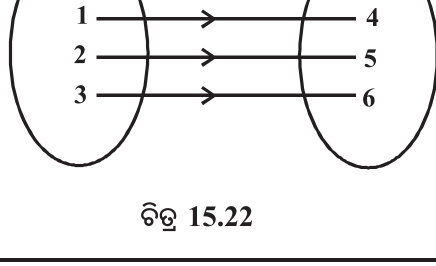
(b) $\left\{\left(-3, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(c) $\{(1, 1), (0, 0), (2, 2), (-1, -1)\}$

(d) {(ଦୀପକ, 16), (ସନ୍ଦୀପ, 28), (ରାଜନ୍, 24)}

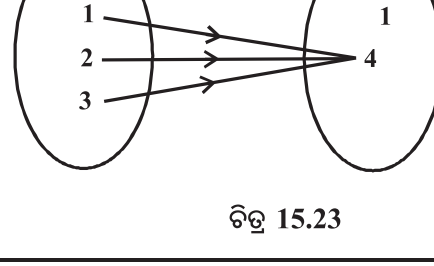
5. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚିତ୍ରଣରେ ଥିବା ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ନିରୂପଣ କର ।

(a)



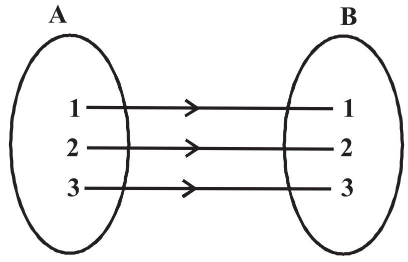
ଚିତ୍ର 15.22

(b)



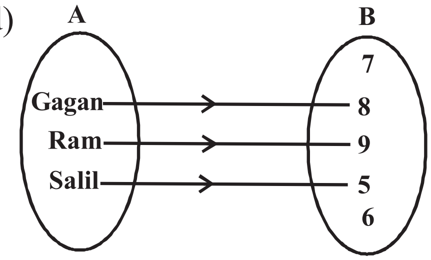
ଚିତ୍ର 15.23

(c)



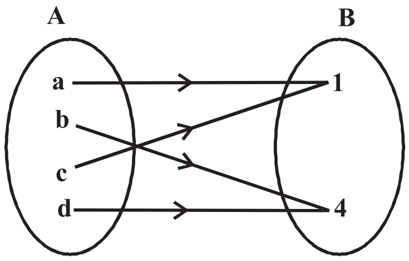
ଚିତ୍ର 15.24

(d)



ଚିତ୍ର 15.25

(e)



ଚିତ୍ର 15.26

15.4.1 ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାରର କେତେକ ଅଧିକ ଉଦାହରଣ :

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପସେଟ୍‌ରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କେତେକ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା :

ଉଦାହରଣ 15.23

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନଗୁଡ଼ିକର ପରିସର ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

(a) $y=\frac{1}{x}$ (b) $y=\frac{1}{x-2}$ (c) $y=\frac{1}{(x+2)(x-3)}$

ସମାଧାନ : $y=\frac{1}{x}$ ଫଳନକୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଦ୍ୱାରା ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇପାରିବ ।

$$\left\{\ldots\left(-2,-\frac{1}{2}\right),(-1,-1),(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\ldots\right\}$$

ଏଠାରେ ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ x ଲାଗି 0 ଭିନ୍ନ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନିଆଯାଇପାରେ । x ଲାଗି 0 ନିଆଯାଇପାରିବ ନାହିଁ । କାରଣ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ହେବ $\frac{1}{0}$ ଏବଂ ଏହା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ ପରିସର $R-\{0\}$ [0 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍]

ଲକ୍ଷ୍ୟକର : ଏଠାରେ ବିସ୍ତାର $= R-\{0\}$

(b) ଏଠାରେ x ଲାଗି 2 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନିଆଯାଇପାରେ । x ଲାଗି 2 ନିଆଯାଇପାରିବ ନାହିଁ କାରଣ ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ହେବ $\frac{1}{2-2}=\frac{1}{0}$ ଯାହାକି ସଂଜ୍ଞାକୃତ ନୁହେଁ ।

$\therefore$ ପରିସର $= R-\{2\}$

(c) y ଲାଗି କୌଣସି ମାନ ମିଳିବ ନାହିଁ ଯଦି $x=-2$ ଓ $x=3$ ନିଆଯାଏ ।

$\therefore$ ପରିସର $= R-\{-2, 3\}$

ଉଦାହରଣ 15.24

ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଲାଗି ପରିସର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $y = +\sqrt{x-2}$ (b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

ସମାଧାନ : (a) $y = +\sqrt{x-2}$ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

y ଲାଗି ବାସ୍ତବମାନ ପାଇବା ପାଇଁ ହେଲେ ଆମକୁ $(x-2) \geq 0$ ନେବାକୁ ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $x \geq 2$

$\therefore$ ଫଳନର ପରିସର ହେବ 2 ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ବା 2 ସହ ସମାନ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ ।

(b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

y ଲାଗି ବାସ୍ତବମାନ ପାଇବାକୁ ହେଲେ, $(2-x)(4+x) \geq 0$ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଆମେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଏହା ପାଇପାରିବା :

ପରିସ୍ଥିତି - I : $(2-x) \geq 0$ ଏବଂ $(4+x) \geq 0$

$\Rightarrow x \leq 2$ and $x \geq -4$

$\therefore$ xର ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବମାନ, ଯେପରି $-4 \leq x \leq 2$ର ସେଟ୍ ହେବ ପରିସର ।

ପରିସ୍ଥିତି - II : $2-x \leq 0$ ଏବଂ $4 + x \leq 0$

$\Rightarrow 2 \leq x$ ଏବଂ $x \leq -4$

ମାତ୍ର 2 ବା 2 ଠାରୁ ବଡ ଏବଂ –4 ସହ ସମାନ ବା –4 ଠାରୁ ସାନ କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା x ଲାଗି ନିଆଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

$\therefore$ ଉପରିସ୍ଥ ଉଭୟ ପରିସ୍ଥିତିରୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ ଯେ

ପରିସର $= \{x : -4 \leq x \leq 2 \ \forall \ x \in R\}$

ଉଦାହରଣ 15.25

$f(x) = y = 2x + 1$ ଫଳନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିସର $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ଲାଗି ବିସ୍ତାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : xର ଦତ୍ତମାନ (ପରିସରର ଦତ୍ତ ଉପାଦାନ) ଲାଗି ଆମେ ପାଇବା,

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -5$

$f(-2) = 2(-2) + 1 = -3$

$f(-1) = 2(-1) + 1 = -1$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1$

$f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$f(2) = 2(2) + 1 = 5$

$f(3) = 2(3) + 1 = 7$

ଏହି ଫଳନକୁ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ରୂପେ ଲେଖା ଯାଇପାରିବ ।

ଦତ୍ତ ଫଳନ ହେଉଛି $\{(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1), (1, 3), (2, 5), (3, 7)\}$

ବିସ୍ତାର $= \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

ଉଦାହରଣ 15.26

ଯଦି $f(x) = x+3,\ 0 \le x \le 4$ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ପରିସର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$0 \le x \le 4$ ହେଲେ

ଅର୍ଥାତ୍ $0 + 3 \le x + 3 \le 4 + 3$

ଅର୍ଥାତ୍ $3 \le f(x) \le 7$

$\therefore$ ବିସ୍ତାର $= \{f(x) : 3 \le f(x) \le 7\}$

ଉଦାହରଣ 15.27

ଯଦି $f(x) = x^2,\ -3 \le x \le 3$ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ବିସ୍ତାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଅଛି $-3 \le x \le 3$

ବା, $0 \le x^2 \le 9$ ବା $0 \le f(x) \le 9$

$\therefore$ ବିସ୍ତାର $= \{f(x) : 0 \le f(x) \le 9\}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.6

1. ନିମ୍ନ ଫଳନ ଲାଗି ପରିସର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି $x \in R$.

(a) (i) $y = 2x$ (ii) $y = 9x + 3$ (iii) $y = x^2 + 5$

(b) (i) $y = \frac{1}{3x-1}$ (ii) $y = \frac{1}{(4x+1)(x-5)}$

(iii) $y = \frac{1}{(x-3)(x-5)}$ (iv) $y = \frac{1}{(3-x)(x-5)}$

(c) (i) $y = \sqrt{6-x}$ (ii) $y = \sqrt{7+x}$

(iii) $y = \sqrt{3x+5}$

(d) (i) $y = \sqrt{(3-x)(x-5)}$ (ii) $y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$

(iii) $y = \frac{1}{\sqrt{(3+x)(7+x)}}$ (iv) $y = \frac{1}{\sqrt{(x-3)(7+x)}}$

2. ନିମ୍ନରେ କେତେକ ଫଳନର ପରିସର ଦିଆଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତାର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) (i) $f(x) = 3x + 10,\quad x \in \{1, 5, 7, -1, -2\}$

(ii) $f(x) = 2x^2 + 1,\quad x \in \{-3, 2, 4, 0\}$

(iii) $f(x) = x^2 - x + 2,\quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) (i) $f(x) = x-2,\ 0 \le x \le 4$ (ii) $f(x) = 3x + 4,\ -1 \le x \le 2$

(c) (i) $f(x) = x^2,\ -5 \le x \le 5$ (ii) $f(x) = 2x,\ -3 \le x \le 3$

ମଡ୍ୟୁଲ-IV

ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

(iii) $f(x) = x^2 + 1, -2 \le x \le 2$ (iv) $f(x) = \sqrt{x}, 0 \le x \le 25$

(d) (i) $f(x) = x + 5, x \in R$ (ii) $f(x) = 2x - 3, x \in R$

(iii) $f(x) = x^3, x \in R$ (iv) $f(x) = \frac{1}{x}, \{x : x < 0\}$

(v) $f(x) = \frac{1}{x-2}, \{x : x \le 1\}$ (vi) $f(x) = \frac{1}{3x-2}, \{x : x \le 0\}$

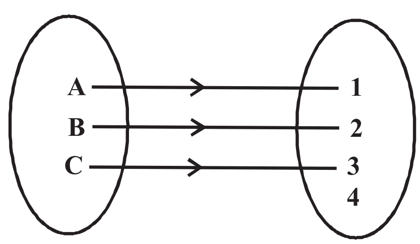
(vii) $f(x) = \frac{2}{x}, \{x : x > 0\}$ (viii) $f(x) = \frac{x}{x+5}, \{x : x \ne -5\}$

15.15 ଫଳନର ବର୍ଗୀକରଣ :

A ସେଟ୍‌ରୁ B ସେଟ୍‌କୁ f ଏକ ଫଳନ ହେଉ । ଯଦି Bର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ Aର ଅତିକମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନର ପ୍ରତିବିମ୍ବ ହୋଇଥାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇନଥିବା କୌଣସି ଉପାଦାନ Bରେ ନ ଥାଏ, ତେବେ f ଫଳନକୁ A ସେଟ୍‌ରୁ B ସେଟ୍‌କୁ **ଆଚ୍ଛାଦକ ଚିତ୍ରଣ (onto mapping)** ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଏହା ହୋଇନଥିଲେ, ଆମେ A ସେଟ୍‌ରୁ B ସେଟ୍‌କୁ **ଅନ୍ତର୍କ୍ଷେପୀ ଚିତ୍ରଣ (into mapping)** ହୋଇଥିବାର କୁହାଯାଏ ।

ଯେଉଁ ଫଳନରେ A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ B ସେଟ୍‌ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଉପାଦାନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ହୋଇଥାଏ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଫଳନକୁ **ଏକୈକ** ଫଳନ କହୁ ।

ଏକୈକ ଫଳନ



ଚିତ୍ର 15.27

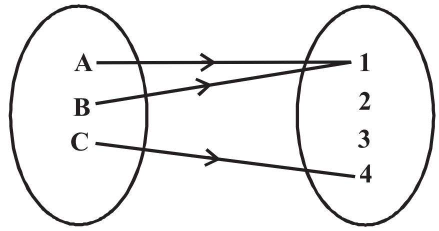
ପରିସର ହେଉଛି {A, B, C}

ସହ ପରିସର ହେଉଛି {1, 2, 3, 4}

ବିସ୍ତାର ହେଉଛି {1, 2, 3}

ଏକ ଫଳନ, A ସେଟ୍‌ର ଏକାଧିକ ଉପାଦାନକୁ B ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଉପାଦାନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ କରିପାରେ । ଏଠାରେ ଫଳନକୁ **ଅନେକ - ଏକ ଫଳନ (many-one function)** କୁହାଯାଏ ।

ଅନେକ - ଏକ ଫଳନ



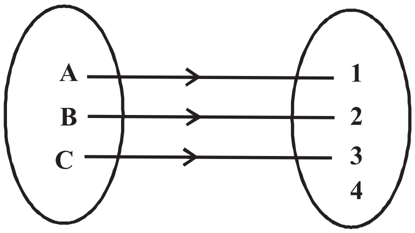
ଚିତ୍ର 15.28

ପରିସର ହେଉଛି {A, B, C}

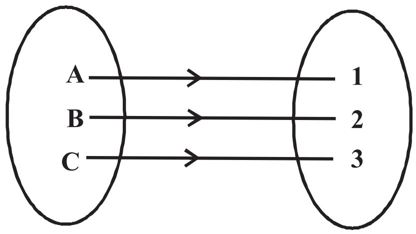
ସହ ପରିସର ହେଉଛି {1, 2, 3, 4}

ବିସ୍ତାର ହେଉଛି {1, 4}

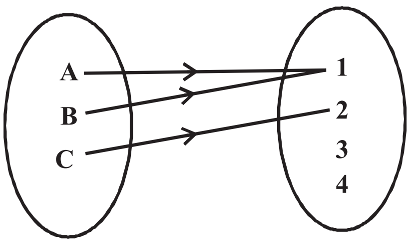
ଯେଉଁ ଫଳନଟି ଏକୈକ (one-to one) ଏବଂ ଆଚ୍ଛାଦକ (on to) ତାକୁ **ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ** (bijective function) କୁହାଯାଏ ।



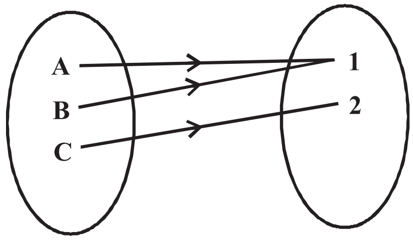
ଚିତ୍ର **15.29**



ଚିତ୍ର **15.30**



ଚିତ୍ର **15.31**



ଚିତ୍ର **15.32**

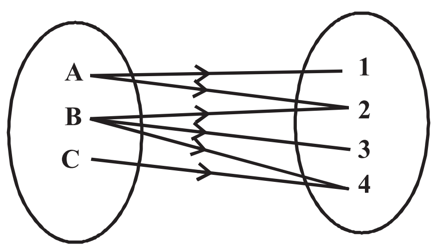
ଚିତ୍ର 15.29 ରେ, {A, B, C} ସେଟ୍‌ରୁ {1, 2, 3, 4} ସେଟ୍‌କୁ ଏକୈକ ଫଳନର ଚିତ୍ରଣ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 15.30 ରେ, {A, B, C} ସେଟ୍‌ରୁ {1, 2, 3} ସେଟ୍‌କୁ ଏକୈକ ଫଳନର ଚିତ୍ରଣ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 15.31 ରେ, {A, B, C} ସେଟ୍‌ରୁ {1, 2, 3, 4} ସେଟ୍‌କୁ ଅନେକ-ଏକ ଫଳନର ଚିତ୍ରଣ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 15.32 ରେ, {A, B, C} ସେଟ୍‌ରୁ {1, 2} ସେଟ୍‌କୁ ଅନେକ-ଏକ ଫଳନର ଚିତ୍ରଣ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଟୀକା : ଏକ-ଅନେକ ସମ୍ବନ୍ଧ ରହିବା ସମ୍ଭବ, ମାତ୍ର ଏପରି ସମ୍ବନ୍ଧ ଫଳନ ହୁଏ ନାହିଁ । ଏହି ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାଯିବ ।



ଚିତ୍ର **15.33**

ଉଦାହରଣ 15.28

ଲେଖ ଅଙ୍କନ ନ କରି ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $f(x) = 4 + 3x$ ଲାଗି ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥିବା ଫଳନ $F : R \rightarrow R$ ହେଉଛି ଏକୈକ ଫଳନ ।

ସମାଧାନ : ଏକ ଫଳନ ଏକୈକ ଫଳନ ହେବା ଲାଗି

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \ \forall \ x_1, x_2 \in \text{ପରିସର}$$

∴ ବର୍ତ୍ତମାନ $f(x_1) = f(x_2)$ ରୁ ପାଇବା

$4+3x_1 = 4+3x_2$ ବା $x_1 = x_2$

∴ F ହେଉଛି **ଏକୈକ ଫଳନ**

ଉଦାହରଣ 15.29

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $f(x) = 4x^3 - 5$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $F : R \to R$ ହେଉଛି ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ।

ସମାଧାନ : ବର୍ତ୍ତମାନ $f(x_1) = f(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in$ ପରିସର ।

∴ $4x_1^3 - 5 = 4x_2^3 - 5 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3$

$$\Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow (x_2 - x_1)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

ବା $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$ (ଏହା ଗ୍ରହଣଯୋଗ୍ୟ ନୁହେଁ, କାରଣ ଏଥିରୁ x_2 ଓ x_1 ଲାଗି କୌଣସି ବାସ୍ତବମାନ ମିଳେନାହିଁ ।)

∴ F ହେଉଛି ଏକୈକ ଫଳନ ।

ପୁନଶ୍ଚ, $y = (x)$ ହେଉ ଯେଉଁଠି $y \in$ ସହ ପରିସର ଏବଂ $x \in$ ପରିସର ।

ଆମେ ଜାଣୁ, $y = 4x^3 - 5$ ବା $x = \left(\frac{y+5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$

∴ ପ୍ରତ୍ୟେକ $y \in$ ସହ ପରିସର, ପରିସର ଏପରି ହେବ ଯେ $f(x) = y$ ।

ଏଣୁ F ହେଉଛି ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ

∴ F ହେଉଛି ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ।

ଉଦାହରଣ 15.30

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $F(x) = x^2 + 3$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $F : R \to R$ ଏକୈକ ଫଳନ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ, $F(x_1) = F(x_2)\ \forall\ x_1, x_2 \in$ ପରିସର

ଏଥିରୁ ଆମେ ପାଉଛୁ

$$x_1^2 + 3 = x_2^2 + 3 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

ବା $x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ ବା $x_1 = -x_2$

∴ F ଏକୈକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

ପୁନଶ୍ଚ $y = F(x)$ ଯେଉଁଠି $y \in$ ପରିସର ଏବଂ $x \in$ ସହ ପରିସର ।

$$\Rightarrow y = x^2 + 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-3}$$

$\Rightarrow \forall\ y < 3\ \exists$ ପରିସରରେ x ଲାଗି କୌଣସି ବାସ୍ତବମାନ ନାହିଁ ।

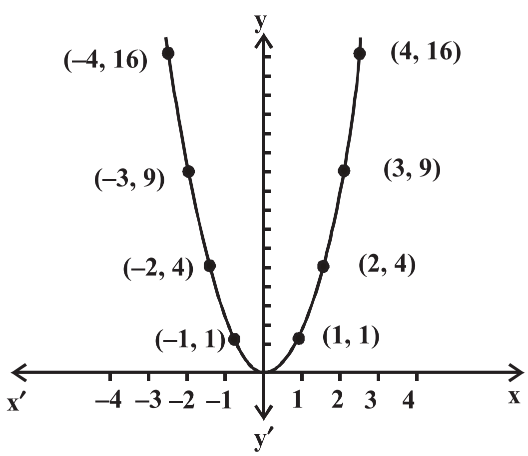
∴ F ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

15.13 ଫଳନର ଲୈଖିକ ଉପସ୍ଥାପନା

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନକୁ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିର ସେଟ୍‌ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ । ଏଣୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନକୁ ଲେଖଚିତ୍ରରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $y = x^2$ ଫଳନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରାଯାଉ ।

$y = x^2$

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



ଚିତ୍ର 15.34

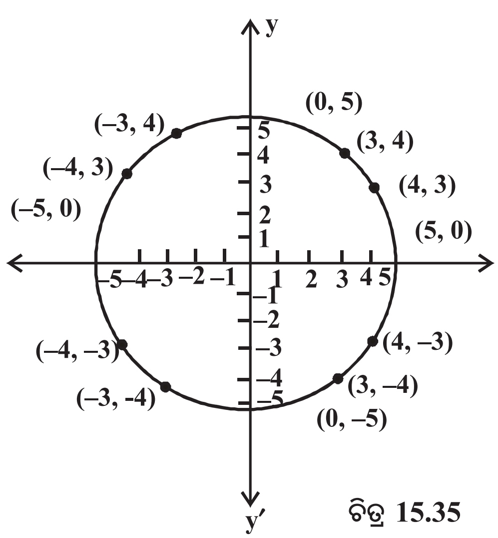
ଏହି ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଏକ ଫଳନର ପରିପ୍ରକାଶ ହେଉଛି କି ?

ହଁ, ଏହା ଦ୍ୱାରା ଏକ ଫଳନ ଉପସ୍ଥାପିତ ହେଉଛି । କାରଣ, xର ପ୍ରତ୍ୟେକମାନ ପାଇଁ yର ଏକ ଅନନ୍ୟମାନ ରହିଛି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମୀକରଣ $x^2+y^2=25$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।

$$x^2 + y^2 = 25$$

x	0	0	3	3	4	4	5	–5	–3	–3	–4	–4
y	5	–5	4	–4	3	–3	0	0	4	–4	3	–3



ଚିତ୍ର 15.35

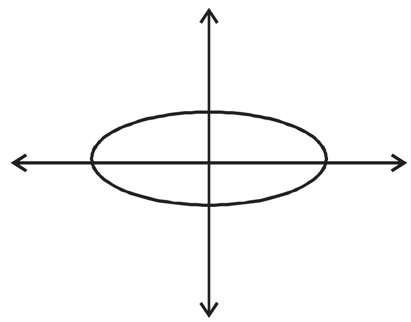
ଏହି ଗ୍ରାଫ୍ ଦ୍ୱାରା ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି ।

ଏହାଦ୍ୱାରା ଏକ ଫଳନର ପରିପ୍ରକାଶ ହେଉଛି କି ?

ନାଁ, ଏହା ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଉ ନାହିଁ । କାରଣ x ର କେତେକ ମାନ ପାଇଁ y ର ଅନନ୍ୟମାନ ମିଳୁନାହିଁ ।

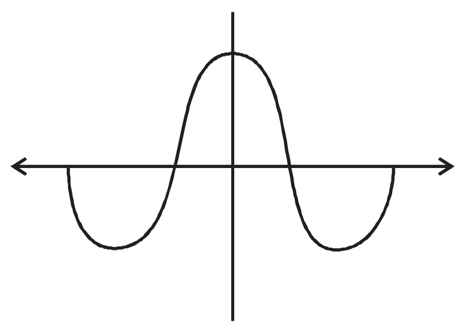
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.7

1. (i) ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଉଛି କି ?



ଚିତ୍ର 15.36

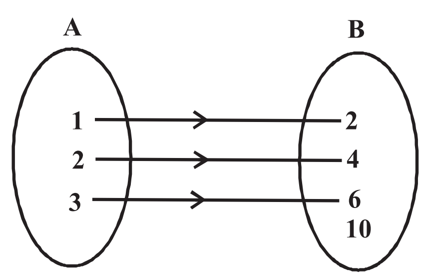
(ii) ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଉଛି କି ?



ଚିତ୍ର 15.37

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଫଳନଟି ଅନ୍ତର୍କ୍ଷେପୀ ଫଳନ ?

(a)



ଚିତ୍ର 15.38

(b) $f(x) = x^2$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : N \rightarrow N$ ।

ଏଠାରେ N ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌କୁ ସୂଚାଏ ।

(c) $f(x) = x$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : N \rightarrow N$

3. $f : R \rightarrow R$ କ୍ଷେତ୍ରରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ?

(a) $f(x) = 115x + 49$ (b) $f(x) = |x|$

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଏକୈକ ଫଳନ ?

(a) $f : \{20, 21, 22\} \rightarrow \{40, 42, 44\}$, ଫଳନ $f(x) = 2x$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ।

(b) $f(x) = 10$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : \{7, 8, 9\} \rightarrow \{10\}$

(c) $f(x) = x^3$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : I \rightarrow R$ ।

(d) $f(x) = 2+x_4$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : R \rightarrow R$ ।

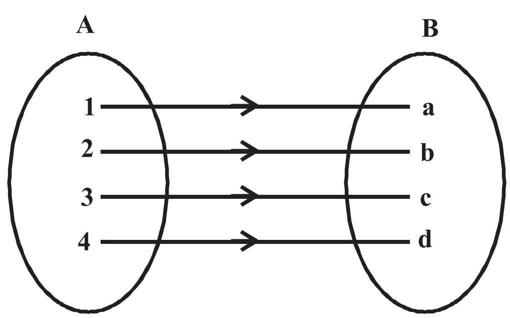
(e) $f(x) = x^2 + 2x$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : N \rightarrow N$ ।

5. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଫଳନ ଅନେକ–ଏକ ଅଟନ୍ତି ?

(a) $f(x) = x^2 + 1$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : \{-2, -1, 1, 2\} \rightarrow \{2, 5\}$

(b) $f(x) = 1$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{1\}$

(c)



ଚିତ୍ର 15.39

(d) $f(x) = 5x + 7$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $f : N \rightarrow N$ ।

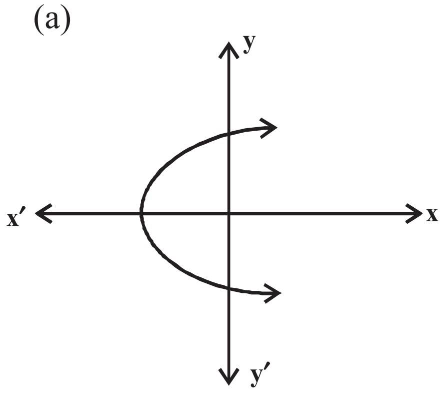
6. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଲାଗି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

(a) $y = 3x^2$ (b) $y = -x^2$ (c) $y = x^2 - 2$

(d) $y = 5 - x^2$ (e) $y = 2x^2 + 1$ (f) $y = 1 - 2x^2$

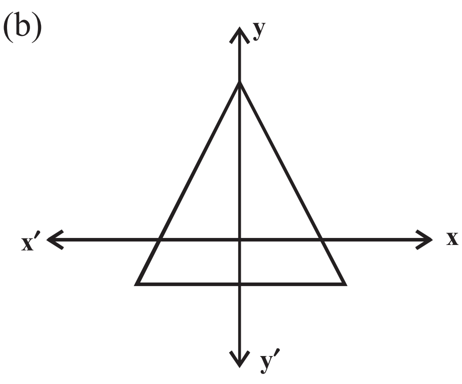
7. ନିମ୍ନରେ ଥିବା ଚିତ୍ରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଫଳନ ସୂଚାଉଛନ୍ତି ?

(a)



ଚିତ୍ର 15.40

(b)

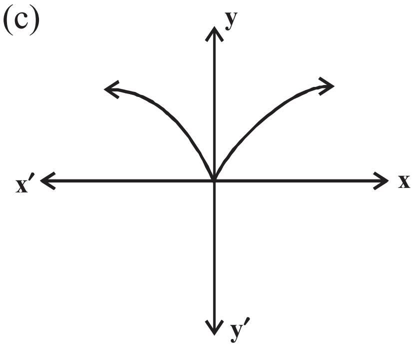


ଚିତ୍ର 15.41

ମଡ୍ୟୁଲ-IV
ଫଳନ

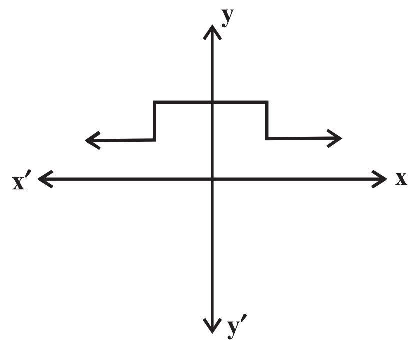
ଟିପ୍ପଣୀ

(c)



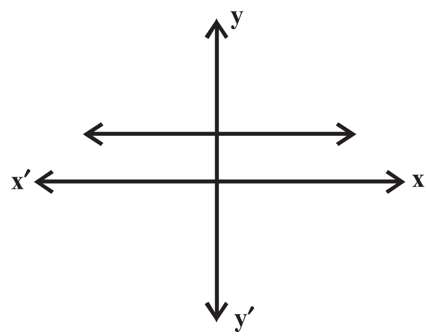
ଚିତ୍ର 15.42

(d)



ଚିତ୍ର 15.43

(e)



ଚିତ୍ର 15.44

ସୂଚନା : ଯଦି y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କୌଣସି ରେଖା ଦ୍ୱାରା ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକାଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦିତ ହୁଏ, ତେବେ ଗ୍ରାଫଟି କୌଣସି ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ନାହିଁ ।

15.17 କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଫଳନ

15.17.1 ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ (Monotonic Function)

$F : A \to B$ ଏକ ଫଳନ ହେଉ । ଏହା ଯଦି ଏକ ଅନ୍ତରାଳ (a, b)ରେ ହୁଏତ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଅଥବା ହ୍ରାସ ପାଏ, ତେବେ ଏହି ଫଳନକୁ ଏକ ଅନ୍ତରାଳ (a, b) ମଧ୍ୟରେ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।

ଫଳନଟି (a, b) ଅନ୍ତରାଳରେ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହେବା ଲାଗି

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \ \forall\ x_1x_2 \in (a, b)$

ଏବଂ ଫଳନଟି (a, b) ଅନ୍ତରାଳରେ ହ୍ରାସମାନ ଫଳନ ହେବା ଲାଗି

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2) \ \forall\ x_1x_2 \in (a, b)$$

ସମଗ୍ର ପରିସରରେ ଫଳନଟିଏ ଏକଦିଷ୍ଟ ନ ହୋଇପାରେ, ମାତ୍ର ଏହା ପରିସରର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକଦିଷ୍ଟ ହୋଇପାରେ । (a, b) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2) \ \forall\ x_1x_2 \in (a, b)$

ଏକ ଅନ୍ତରାଳ ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଫଳନ ବର୍ଦ୍ଧମାନ ଫଳନ ହେବାଲାଗି $x_1 < x_2 = F(x_1) < F(x_2) \ \forall\ x_1\ x_2 \in (a, b)$

$F(x) = x^2$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $F : R \to R$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରାଯାଉ । ବର୍ତ୍ତମାନ $\forall\ x_1, x_2 \in [0, \infty]$

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

$\Rightarrow$ ଅନ୍ତରାଳ $[0, \infty]$ ମଧ୍ୟରେ F ଫଳନଟି **ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ** ଅଟେ ।

[$\because$ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଫଳନଟି କେବଳ ବର୍ଦ୍ଧମାନ]

ମାତ୍ର $\forall\ x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$

$\Rightarrow [-\infty, 0]$ ଅନ୍ତରାଳରେ F ଫଳନଟି ***ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ*** ।

[$\because$ ଏହି ଅନ୍ତରାଳରେ ଫଳନଟି ହ୍ରାସମାନ ଅଟେ]

ଏଣୁ ସମଗ୍ର ପରିସରକୁ ବିଚାରକୁ ନେଲେ ଫଳନଟି R ପରିସରରେ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ନୁହେଁ, ମାତ୍ର ଏହା $(-\infty, 0)$ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏବଂ

$(0, \infty)$ ଅନ୍ତରାଳରେ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ ଅଟେ ।

ପୁନଶ୍ଚ $f(x) = x^3$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଫଳନ $F : R \to R$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରାଯାଉ ।

ସ୍ପଷ୍ଟଭାବରେ, $\forall\ x_1\ x_2 \in$ ପରିସର

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$

$\therefore$ ସମଗ୍ର ପରିସରରେ ଦତ୍ତ ଫଳନଟି R ଉପରେ ***ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ*** ଅଟେ ।

15.17.2 ସମଫଳନ (Even Function)

ଏକ ଫଳନକୁ ସମଫଳନ କୁହାଯାଏ ଯଦି ପରିସର ମଧ୍ୟରେ xର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ପାଇଁ

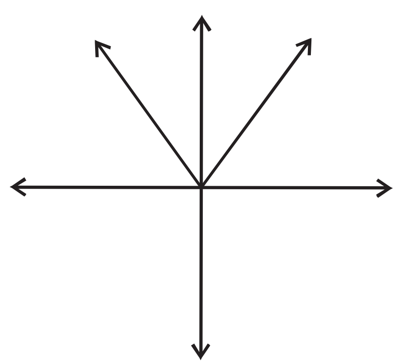
$F(-x) = F(x)$

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ **ସମଫଳନ** ଅଟେ ।

(i) $F(x) = x^2$ ହେଲେ, $F(-x) = (-x)^2 = x^2 = F(x)$

(ii) $F(x) = \cos x$ ହେଲେ, $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x)$

(iii)



ଚିତ୍ର 15.45

ସମଫଳନ (ମାପାଙ୍କ ଫଳନ)ର ଲେଖଚିତ୍ର ଉପରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ : ଲେଖ ଚିତ୍ରଟି y-ଅକ୍ଷର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମମିତ (symmetric) ଅଟେ ।

15.7.3 ବିଷମ ଫଳନ (Odd Function) :

ଏକ ଫଳନକୁ ବିଷମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ପରିସର ମଧ୍ୟରେ xର ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାନ ପାଇଁ

$f(-x) = -f(x)$

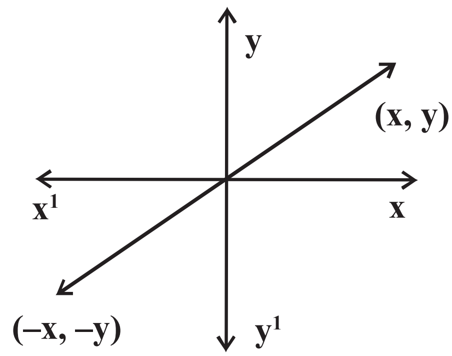
ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

(i) $f(x) = x^3$ ହେଲେ,

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

(ii) $f(x) = \sin x$ ହେଲେ,

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$



ଚିତ୍ର 15.46

ବିଷମ ଫଳନ $y = x$ର ଲେଖଚିତ୍ର 15.46 ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ : ଏହି ଲେଖଚିତ୍ର ମୂଳବିନ୍ଦୁ ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ସମମିତ ଅଟେ ।

15.17.4 ସୋପାନ ଫଳନ ବା ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଫଳନ (Greatest integer function)

$f(x) = [x]$ ହେଉଛି ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍ଗ ଯାହାକି x ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବା ତା' ସହ ସମାନ ।

f(x)କୁ ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଫଳନ ବା ସୋପାନ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର ସୋପାନ ଭାବେ ରହିଥାଏ ଯାହାକି ଚିତ୍ର 16.47ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଆସ $y = [x], x \in R$ର

ଲେଖ ଅଙ୍କନ କରିବା

$[x] = 1, \quad 1 \le x < 2$

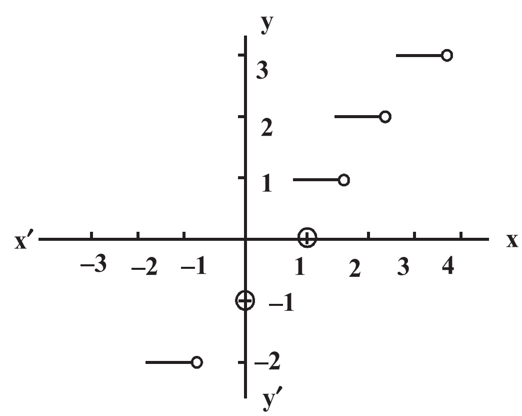
$[x] = 2, \quad 2 \le x < 3$

$[x] = 3, \quad 3 \le x < 4$

$[x] = 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = -1, \quad -1 \le x < -0$

$[x] = -2, \quad -2 \le x < -1$



ଚିତ୍ର 15.47

- ସୋପାନ ଫଳନର ପରିସର ହେଉଛି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ।
- ସୋପାନ ଫଳନର ବିସ୍ତାର ହେଉଛି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ।

15.17.5 ବହୁପଦ ଫଳନ (Polynomial function) :

ଯେଉଁ ଫଳନ ବହୁପଦ ରୂପରେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୋଇଥାଏ,
ତାକୁ ବହୁପଦ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

(i) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$

(ii) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$

(iii) $f(x) = 3$

ଏହି ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ହେଉଛନ୍ତି ବହୁପଦ ଫଳନ ।

ଟୀକା : $f(x) = k$ ଯେଉଁଠି k ଏକ ଧ୍ରୁବକ, ଏହି ପ୍ରକାର ଫଳନକୁ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।

15.17.6. ପରିମେୟ ଫଳନ (Rational function)

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$, ଯେଉଁଠି $h(x)\neq 0$ ଏବଂ $g(x)$ ଓ $h(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବହୁପଦ ଫଳନ, ଏହି ପ୍ରକାର ଫଳନକୁ ପରିମେୟ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+1}, x\neq -1$ ହେଉଛି ଏକ ପରିମେୟ ଫଳନ ।

15.17.7 ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ (Reciprocal function)

$y=\dfrac{1}{x}, x\neq 0,$ ଏହି ପ୍ରକାର ଫଳନକୁ ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।

15.17.8 ଘାତାଙ୍କ ଫଳନ (Exponential function)

ଜଣେ ସ୍ୱିସ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ଲିଓନାର୍ଡ ଅଏଲର୍ ସଂଖ୍ୟା e କୁ ଏକ ଅସୀମ ଶ୍ରେଣୀ ସମ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ଅବଗତ କରାଇଥିଲେ, ବାସ୍ତବତଃ

$$e=1+\frac{1}{\underline{|1}}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{1}{\underline{|n}}+\ldots \qquad \ldots (1)$$

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଏକ ଅସୀମ ଶ୍ରେଣୀର ସମଷ୍ଟିର ସୀମା ସସୀମ ସଂଖ୍ୟା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏହି ଶ୍ରେଣୀ ହେଉଛି ଅଭିସାରୀ) ଏଣୁ ଏହା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକୁ e ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଏହି ସଂଖ୍ୟା e ହେଉଛି ଏକ ଅବୀଜୀୟ (transcendental) ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ 2 ଓ 3ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅସୀମ ଶ୍ରେଣୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର :

$$1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{x^n}{\underline{|n}}+\ldots \qquad \ldots (2)$$

ଏହି ଅସୀମ ଶ୍ରେଣୀର ସମଷ୍ଟି ଯେ ଏକ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବ୍ୟାପ୍ତ ତାହା ପ୍ରତିପାଦିତ କରାଯାଇପାରିବ ଏବଂ ଏହାକୁ ଆମେ e^x ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରିଥାଉ । ଏଣୁ

$$e^x=1+\frac{x}{\underline{|1}}+\frac{x^2}{\underline{|2}}+\frac{x^3}{\underline{|3}}+\ldots+\frac{x^n}{\underline{|n}}+\ldots \qquad \ldots (3)$$

ଏହାକୁ **ଘାତାଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ** ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଅସୀମ ଶ୍ରେଣୀକୁ **ଘାତାଙ୍କ ଶ୍ରେଣୀ** କୁହାଯାଏ । ଆମେ ସହଜରେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ (2) ଉକ୍ତିରେ $x = 1$ ବସାଇଲେ ଆମେ ଉକ୍ତି (1) ପାଇବା ।

$f(x) = e^x$ ଫଳନ, ଯେଉଁଠି x ହେଉଛି ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ଏହି ଫଳନକୁ ଏକ **ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ** କୁହାଯାଏ ।

ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ $y = e^x$ର ଲେଖ ପାଇବା ପାଇଁ ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଏ ।

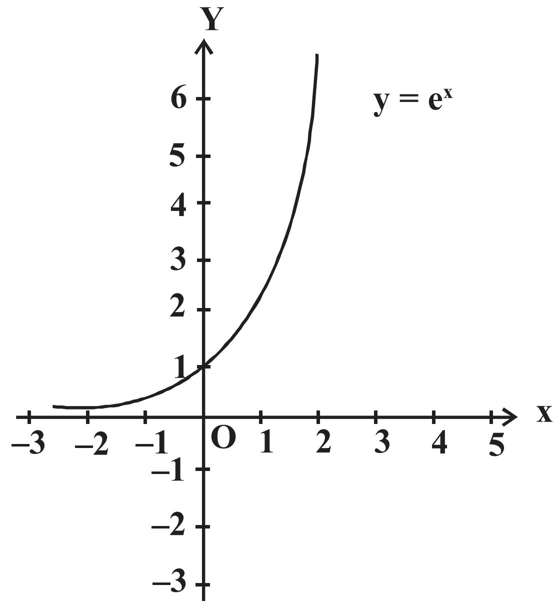
(i) xର ମାନ ବୃଦ୍ଧି ପାଇଲେ, yର ମାନ କ୍ଷିପ୍ର ଭାବରେ ବୃଦ୍ଧିପାଏ, ମାତ୍ର xର ମାନ ହ୍ରାସ ପାଇଲେ, yର ମାନ 0ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହୁଏ ।

(ii) $e^x \neq 0$ ହେତୁ x-ଛେଦାଂଶ ନାହିଁ (ଲେଖଚିତ୍ର x-ଅକ୍ଷକୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ ।)

(iii) y-ଛେଦାଂଶ ହେଉଛି 1, ଯେହେତୁ $e^0 = 1$ ଏବଂ $e \neq 0$ ।

(iv) ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିଗୁଡ଼ିକ e^xର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ଲାଗି ମାର୍ଗଦର୍ଶକ ହେବ ।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y=e^x$	0.04	0.13	0.36	1.00	2.71	7.38	20.08



ଚିତ୍ର 15.48

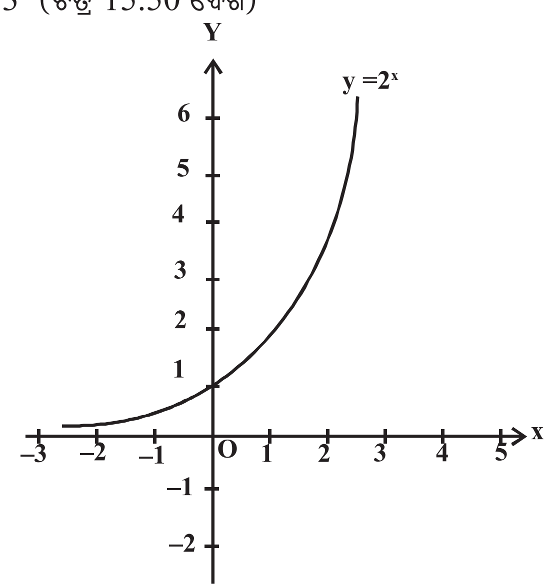
ଆଧାରକୁ e ପରିବର୍ତ୍ତେ a ନେଲେ, ଆମେ ଯେଉଁ ଘାତାଙ୍କୀ ଫଳନ ପାଇବା ତାହା ହେବ

$f(x) = a^x$, ଯେଉଁଠି $a > 0, a \neq 1$ ।

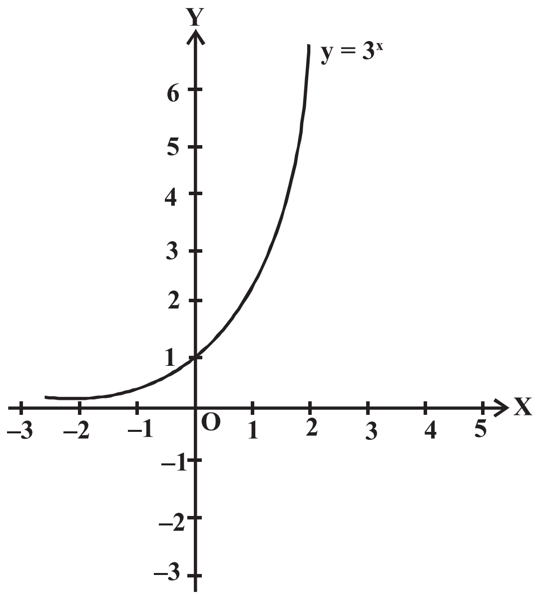
ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଆମେ ନେବା $a = 2$ ବା $a = 3$ । ତେବେ ଆମେ ଯେଉଁ ଫଳନ ପାଇବା ଓ ତା'ର ଲେଖଚିତ୍ର ହେବ

$y = 2^x$ (ଚିତ୍ର 15.49 ଦେଖ)

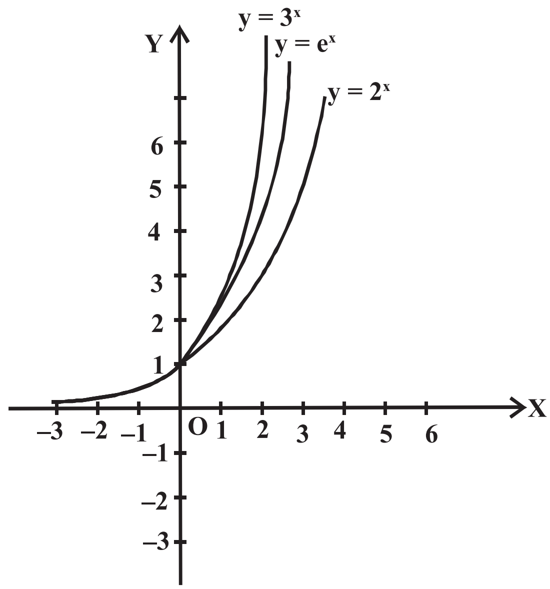
ଏବଂ $y = 3^x$ (ଚିତ୍ର 15.50 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର 15.49



ଚିତ୍ର 15.50



ଚିତ୍ର 15.51

15.17.9 ଲଗାରିଦମ୍-ଫଳନ (Logarithmic function)

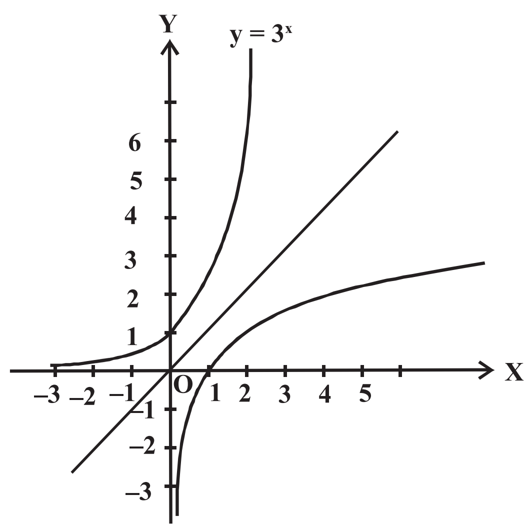
$y = e^x$ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବର୍ତ୍ତମାନ ବିଚାର କରିବା :

ଆମେ ଏହାକୁ ସମତୁଲ୍ୟ ଭାବରେ

$x = \log_e y$ ଲେଖୁ

ଏଣୁ $y = \log_e x$ ହେଉଛି $y = e^x$ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଫଳନ । ଲଗାରିଦମ୍ ଫଳନର ଆଧାର e ହୋଇଥିଲେ, ଏହାକୁ ଲେଖାଯାଏ ନାହିଁ । ଏଣୁ $\log_e x$ କୁ ସାଧାରଣତଃ $\log x$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । $y = e^x$ ଏବଂ $y = \log x$ ହେଉଛନ୍ତି ପରସ୍ପର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଫଳନ, ତେଣୁ $y = x$ ରେଖା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ଉକ୍ତ ଫଳନ ଦ୍ୱୟର ଲେଖ ସମମିତ ହୋଇଥା'ନ୍ତି ।

ଫଳରେ $y = e^x$ ଫଳନର ଲେଖକୁ $y = x$ ରେଖାରେ ପ୍ରତିଫଳିତ କରି $y = \log x$ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ମିଳିପାରିବ ।



ଚିତ୍ର 15.52

ଟୀକା :

(i) ଶିକ୍ଷାର୍ଥୀ ପୂର୍ବରୁ ମାଧ୍ୟମିକ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢିଥିବା ଘାତାଙ୍କ ନିୟମକୁ ମନେ ପକାଇଲେ ମନେପଡିବ - ଯଦି $a > 0$ ଏବଂ m ଓ n ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି । ତେବେ

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$
$$a^0 = 1$$

(ii) ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଅନୁରୂପ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ

$\log_a(mn) = \log_a m + \log_a n$

$\log_a \dfrac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$

$\log_a m^n = n \log_a m$

$\log_b m = \dfrac{\log_a m}{\log_a b}$ ବା $\log_b m = \log_a m \times \log_b a$

ଏଠାରେ $a, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.8

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାଖରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନ (✓) ଦିଅ :

(i) ଫଳନ $f(x) = 2x^4 + 7x^2 + 9x$ ହେଉଛି ଏକ ସମଫଳନ ।

(ii) ବିଷମ ଫଳନର ଲେଖ y-ଅକ୍ଷର ଉଭୟପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମମିତ ଅଟେ ।

(iii) $f(x) = x^{\frac{1}{2}} - x^3 + x^5$ ଏକ ବହୁପଦ ଫଳନ ।

(iv) $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ ହେଉଛି ସମସ୍ତ $x \in R$ ଲାଗି ଏକ ପରିମେୟ ଫଳନ ।

(v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ହେଉଛି ଏକ ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ ।

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ଫଳନର ପରିସର ହେଉଛି 0 ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

(vii) ବୃହତ୍ତମ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ ଫଳନ ସମଫଳନ ନୁହେଁ କିମ୍ବା ବିଷମ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

2. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସମଫଳନ ଓ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ବିଷମ ଫଳନ ?

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5+x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

(g) $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ (h) $f(x) = x - x^3$

3. $y = [x]-2$ ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

4. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ବହୁପଦ ଫଳନ, ପରିମେୟ ଫଳନ, ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନ ଅଥବା ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ କିଏ ତାହା ଚିହ୍ନଟ କର ।

(a) $y = 3x^8 - 5x^7 + 8x^5$ (b) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^3-2x+3}$ ଯେଉଁଠି $x^3 - 2x + 3 \neq 0$

(c) $y = \dfrac{3}{x^2}, x \neq 0$ (d) $y = 3 + \dfrac{2x+1}{x}, x \neq 0$

(e) $y = 1 - \dfrac{1}{x}, x \neq 0$ (f) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, x \neq 2$

(g) $y = \dfrac{1}{9}$

15.18 ଫଳନ ମାନଙ୍କର ସଂଯୋଗ

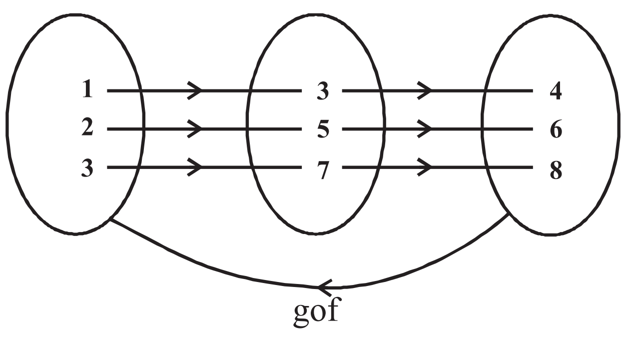
ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଫଳନ ଦୁଇଟିକୁ ବିଚାର କର :

$y = 2x + 1, \quad x \in \{1, 2, 3\}$

$z = y + 1, \quad y \in \{3, 5, 7\}$

z ହେଉଛି x ଓ y ଫଳନ ଦୁଇଟିର ସଂଯୋଗ, କାରଣ y ମାଧ୍ୟମରେ z ସଂଜ୍ଞାକୃତ ଏବଂ x ମାଧ୍ୟମରେ y ସଂଜ୍ଞାକୃତ । ଏହାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ଲେଖଚିତ୍ରରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ :

$f(x) = y = 2x + 1 \quad g(y) = z = y = +1$



ଚିତ୍ର 15.53

ଫଳନ g ଓ ଫଳନ fର ସଂଯୋଗ (gof କୁହାଯାଉ)କୁ ଫଳନ fର ଫଳନ g ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ଯଦି $f : A \rightarrow B$ ଏବଂ $g : B \rightarrow C$ ହୁଏ, ତେବେ gof : A ରୁ C

ଧରିନିଆଯାଉ, $f(x) = 3x + 1$ ଏବଂ $g(x) = x^2 + 2$

ତେବେ $fog(x) = f(g(x))$

$= f(x^2+2)$

$= 3(x^2+2) + 1 = 3x^2 + 7$

ଏବଂ $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(3x+1)$

$= (3x+1)^2+2 = 9x^2 + 6x + 3$

(i) ଓ (ii)ରୁ ପରୀକ୍ଷାକରି ଦେଖ,

ଯଦି fog = gof

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $fog \neq gof$

ସେହିପରି (fof) (x) = f(f(x)) = f(3x+1) [ଫଳନ f ର ଫଳନ ବୋଲି ପଢ]

$= 3(3x+1) + 1$

$= 9x+3+1 = 9x+4$

$(gog)(x) = g(g(x)) = g(x^2+2)$ [ଫଳନ g ର ଫଳନ ବୋଲି ପଢ]

$= (x^2+2)^2 + 2$

$= x^4 + 4x^2 + 4 + 2$

$= x^4 + 4x^2 + 6$

ଉଦାହରଣ 15.31 ଯଦି $f(x) = \sqrt{x+1}$ ଏବଂ $g(x) = x^2 + 2$ ହୁଏ, fog ଏବଂ gof ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $fog(x) = f(g(x))$

$= f(x^2+2)$

$= \sqrt{x^2+2+1} = \sqrt{x^2+3}$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

$= \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 + 2$

$= x + 1 + 2$

$= x + 3$

ଏଠାରେ ପୁନଶ୍ଚ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ $(fog) \neq gof$

ଉଦାହରଣ 15.32

ଯଦି $f(x) = x^3$, $f : R \to R$

$g(x) = \frac{1}{x}$, $g: R - \{0\} \to R - \{0\}$ ହୁଏ, ତେବେ fog ଏବଂ gof ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : $(fog)(x) = f(g(x))$

$$= f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^3 = \frac{1}{x^3}$$

(gof) (x) = g(f(x))

$$= g(x^3) = \frac{1}{x^3}$$

ଏଠାରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ fog = gof

ଟୀକା : ଆମେ ଉଦାହରଣ 15.31 ଓ ଉଦାହରଣ 15.32ରୁ ଦେଖିଲେ ଯେ fog ଏବଂ gof ସମାନ ହୋଇପାରେ ବା ଅସମାନ ହୋଇପାରେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.9

1. ନିମ୍ନ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି fog, gof, fof ଏବଂ gog ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

$$f(x) = x^2 + 2,\ g(x) = 1 - \frac{1}{1-x},\ x \neq 1$$ ।

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନ ଲାଗି fog, gof, fof ଏବଂ gog ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $f(x) = x^2–4,\ g(x)=2x+5$

(b) $f(x) = x^2,\ g(x) = 3$

(c) $f(x) = 3x – 7,\ g(x) = \frac{2}{x},\ x \neq 0$

3. $f(x) = |x|,\ g(x) = [x]$ ନେଇ, ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ $fog \neq gof$ ।

4. $f(x) = x^2+3,\ g(x) = x–2$ ନେଇ, ପ୍ରମାଣ କର $fog \neq gof$ ଏବଂ $f\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right) = g\left(f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ ।

5. $f(x) = x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$ ହେଲେ, fog = gof ।

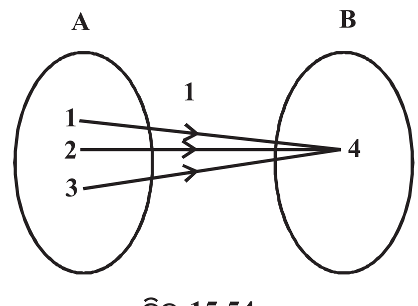
6. $f(x) = |x|,\ g(x) = (x)^{\frac{1}{3}},\ h(x) = \frac{1}{x};\ x \neq 0$ ନେଇ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) fog (b) goh (c) foh (d) hog (e) fogoh

ସୂଚନା : (fogoh) (x) = f(g(h(x))) $= f\left\{g\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$

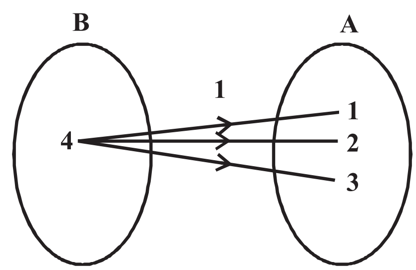
15.18 ଏକ ଫଳନର ପ୍ରତିଲୋମ

(A) ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ବିଚାର କର :



ଚିତ୍ର 15.54

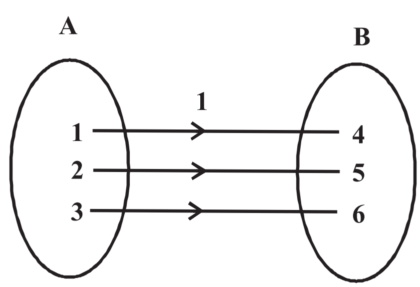
ଏହା ହେଉଛି ଅନେକ-ଏକ ଫଳନ । ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧର ପ୍ରତିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଚିତ୍ରରେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଦର୍ଶାଯାଇ ପାରେ ।



ଚିତ୍ର 15.55

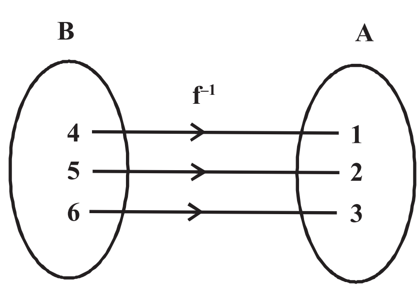
ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧଟି ଫଳନ ନୁହେଁ (କାହିଁକି ?)

(B) ବର୍ତ୍ତମାନ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ନେବା ।



ଚିତ୍ର 15.56

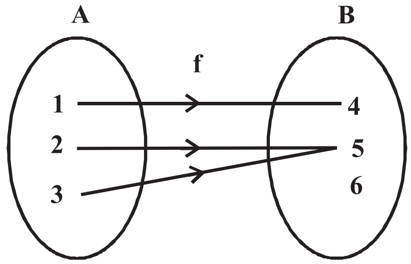
ଏହା ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ସମ୍ବନ୍ଧର ପ୍ରତିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଏହାକୁ ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 15.57

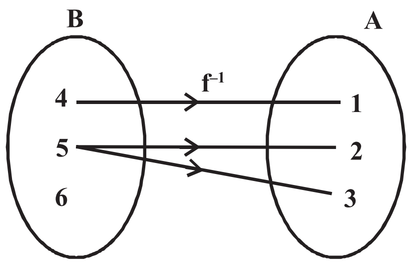
ଏହା ଏକ ଫଳନ ଅଟେ ।

(C) ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ବିଚାର କର :



ଚିତ୍ର 15.58

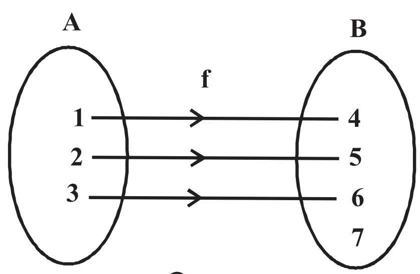
ଏହା ଅନେକ ଏକ ଫଳନ ଅଟେ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହାର ପ୍ରତିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଏହାର ଚିତ୍ରଗତ ଉପସ୍ଥାପନା ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।



ଚିତ୍ର 15.59

ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ । କାରଣ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ 6 ଟି, A ସେଟ୍‌ର କୌଣସି ଉପାଦାନ ସହିତ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ନୁହେଁ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ Bର ଉପାଦାନ 5, ଏକାଧିକ ଉପାଦାନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ।

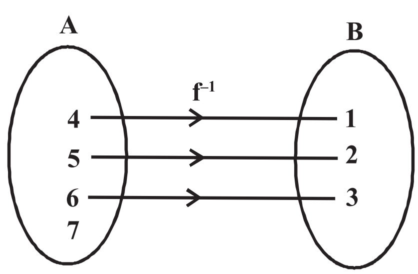
(D) ଆସ ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ ବିଚାର କରିବା



ଚିତ୍ର 15.60

ଏହା ଏକୈକ ଫଳନ ଅଟେ ।

ଏହାର ପ୍ରତିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 15.61

ଚିତ୍ର 15.61ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଏହା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ, କାରଣ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ 7 ସେଟ୍ A ର କୌଣସି

ଉପାଦାନ ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ନୁହେଁ । ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଫଳନ ହୋଇଥିବା ଗୋଟିଏ ସମ୍ବନ୍ଧର ବିଲୋମ ସର୍ବଦା ଏକ ଫଳନ ନୁହେଁ ।

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ କେବଳ ଏକୈକ ଫଳନର ବିଲୋମ ସର୍ବଦା ଏକ ଫଳନ । ଅର୍ଥାତ୍ ଫଳନଟି ଏକୈକ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ହୋଇଥିଲେ ହିଁ ଏହାର ପ୍ରତିଲୋମ ଏକ ଫଳନ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.10

1. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $y = 4x - 7$ ଫଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ରହିଛି ।

(ii) ମନେକରାଯାଉ f ହେଉଛି ଏକୈକ ଓ ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ଯାହାର ପରିସର A ଏବଂ ବିସ୍ତାର B । ଏହାର ପ୍ରତିଲୋମ ଫଳନର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ଲେଖ ।

2. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ପ୍ରତିଲୋମ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ଯଦି ଥାଏ) ।

(a) $f(x) = x + 3\ \forall\ x \in R$ (b) $f(x) = 1-3x\ \forall\ x \in R$

(c) $f(x) = x^2\ \forall\ x \in R$ (d) $f(x) = \dfrac{x+1}{x},\ x \neq 0,\ x \in R$

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ସେଟ୍ ହେଉଛି ବସ୍ତୁମାନଙ୍କର ଉତ୍ତମ ଭାବେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ ସମୂହ ।
- ଏକ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ବେଳେ, ଏହାର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଲେଖାଯାଏ, କିନ୍ତୁ ଏକ ସେଟ୍‌କୁ ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖିବା ବେଳେ, ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ଏକ ସାଧାରଣ ଧର୍ମ ଲେଖାଯାଏ ।
- ଏକ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣନା କରି ସେଗୁଡ଼ିକର ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେଲେ, ଏହାକୁ ସସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣିବା ସମ୍ଭବ ନ ହୁଏ, ତାକୁ ଅସୀମ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।
- ଯଦି Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ Bର ଏକ ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ Aକୁ B ର ଏକ ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ।
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B କ୍ଷେତ୍ରରେ, A–B ହେଉଛି ଏକ ସେଟ୍ ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ Aର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ମାତ୍ର Bର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ ।
- A ସେଟ୍‌ର ଅନୁପୂରକ ଏକ ସେଟ୍ ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ମାତ୍ର Aସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ଫଳନରେ

  $A^c = U - A$ ।
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ଛେଦ ହେଉଛି ଏକ ସେଟ୍ ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ସଂଯୋଗ ହେଉଛି ଏକ ସେଟ୍ ଯାହାର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ପୃକ୍ତ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍‌ର ଅଥବା ଅନ୍ୟ ସେଟ୍‌ର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ।
- ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ Bର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ହେଉଛି Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ପ୍ରଥମ ଅଂଶ ଓ Bର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଂଶ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ କ୍ରମିତଯୋଡି ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ । ଏହାକୁ A×B ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

  $A \times B = \{(a, b) : a \in A$ ଏବଂ $b \in B\}$

ଟିପ୍ପଣୀ

- A ରୁ B କୁ ଏକ ସମ୍ବନ୍ଧ ହେଉଛି $A \times B$ର ଉପସେଟ୍ ।
  ଅର୍ଥାତ୍ $R \subseteq A \times B = \{(a, b) : a \in A$ ଏବଂ $b \in B$ ଏବଂ $a R b\}$
- ଫଳନ ହେଉଛି ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାର ସମ୍ବନ୍ଧ ।
- ଫଳନ $f : A \to B$ ହେଉଛି A ରୁ B କୁ ଥିବା ଆନୁରୂପ୍ୟର ଏକ ନିୟମ ଯେପରିକି Aର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦାନ ଲାଗି Bରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ (ଅଦ୍ୱିତୀୟ) ଉପାଦାନ ଥିବ ।
- ଫଳନକୁ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍ ବୋଲି କୁହାଯାଇପାରେ ।
- A ରୁ B କୁ f ଏକ ଫଳନ ହେଉ ।
  ପରିସର : f ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ପ୍ରଥମ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍ ।
  ବିସ୍ତାର : f ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କର ଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।
- ଫଳନକୁ ଏକ ସମୀକରଣ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରେ, ଯଥା : $y = f(x)$ ଯେଉଁଠି x ହେଉଛି ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ଏବଂ y ହେଉଛି ନିର୍ଭରଶୀଳ ଚଳ ।
  ପରିସର : ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।
  ବିସ୍ତାର : ନିର୍ଭରଶୀଳ ଚଳମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।
  ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ନାହିଁ ।
- **ଭୂଲମ୍ବ ରେଖାଦ୍ୱାରା ପରୀକ୍ଷା :** ଗୋଟିଏ ଲେଖ ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ କି ନାହିଁ ଯାଞ୍ଚ କରିବାଲାଗି, ଆମେ y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର କର ଏକ ରେଖା ଅଙ୍କନ କରୁ । ଏହି ରେଖା, ସମ୍ପୃକ୍ତ ଲେଖକୁ ଏକାଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ, ଲେଖଟି ଗୋଟିଏ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ନାହିଁ ।
- A ସେଟ୍‌ରୁ B ସେଟ୍‌କୁ f ଏକ ଫଳନ ହେଉ । ସଙ୍କେତ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖୁ ।
  $f : A \to B$
  (i) Bର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୌଣସି ଏକ ଉପାଦାନ ଯଦି Aର କୌଣସି ଉପାଦାନ ପ୍ରତିବିମ୍ବ ହୋଇନଥାଏ, ତେବେ fକୁ ଅନ୍ତର୍କ୍ଷେପୀ (into) ଫଳନ କୁହାଯାଏ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିସ୍ତାର $\subset$ ସହପରିସର ।
  (ii) ଯଦି ବିସ୍ତାର = ସହ ପରିସର, ତେବେ ଫଳନଟି ଆଚ୍ଛାଦକ ଫଳନ ।
  (iii) ଯଦି A ସେଟ୍‌ର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉପାଦାନର ପ୍ରତିବିମ୍ବ, B ସେଟ୍‌ର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଫଳନକୁ ଏକୈକ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।
  (iv) ଯଦି ଫଳନର ପରିସର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଅନେକ ଉପାଦାନର ପ୍ରତିବିମ୍ବ ଏକା ହୋଇଥାଏ, ଫଳନକୁ ଅନେକ-ଏକ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।
- **ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାଦ୍ୱାରା ପରୀକ୍ଷା :** ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଫଳନଟି ଏକୈକ ଫଳନ ବା ନୁହେଁ ଜାଣିବା ପାଇଁ x-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କରିବା । ଏହି ରେଖା ଲେଖକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ଆମେ ଏହାକୁ ଏକୈକ ଫଳନ କହିଥାଉ ।
- ଗୋଟିଏ ଫଳନ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅନ୍ତରାଳରେ କ୍ରମବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା କ୍ରମ ହ୍ରାସମାନ ହୋଇଥିଲେ, ଏହାକୁ ଏକଦିଷ୍ଟ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।
- ଏକ ଫଳନ $f(x) = f(-x)$ ହୋଇଥିଲେ, ଏହାକୁ ସମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ । $f(-x) = -f(x), x, -x \in D_f$ ହୋଇଥିବା ଫଳନକୁ ବିଷମ ଫଳନ କୁହାଯାଏ ।
- ଫଳନଟି ଏକୈକ ଫଳନ ହୋଇଥିଲେ, ସମ୍ପୃକ୍ତ ଫଳନର ପ୍ରତିଲୋମ ରହିଥାଏ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

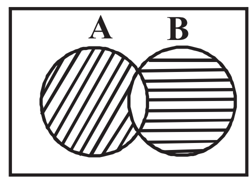
1. (i) $\{1, 2, 3\} = \{1, \{2\}, 3\}$ (ii) $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$

(iii) $\{a, e, o\} = \{a, b, c\}$ (iv) $\{\phi\} = \{\ \}$

2. ଚିତ୍ରରେ ରେଖା ଚିହ୍ନିତ ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

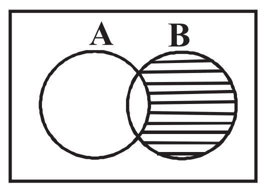
$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$



ଚିତ୍ର **15.62**

(ii) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$B = \{2, 6, 8, 10, 12\}$



ଚିତ୍ର **15.63**

3. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) $(A \cup B)'$, ଯଦି A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହୋଇନଥାନ୍ତି ।

(ii) $(A \cap B)'$, ଯଦି A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହୋଇନଥାନ୍ତି ।

(iii) $(A–B)'$, ଯଦି A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହୋଇନଥାନ୍ତି ।

4. ମନେକରାଯାଉ, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର :

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ ।

5. ମନେକରାଯାଉ, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,

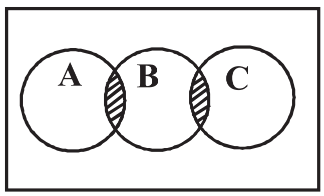
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$C = \{1, 2, 3\}$ ।

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $A' \cap (B - C)$ (ii) $A \cup (B \cup C)$
(iii) $A' \cap (B \cup C)'$ (iv) $(A \cap B)' \cup C'$

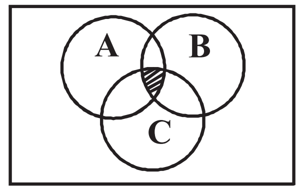
6. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରେ ଚିତ୍ରିତ ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା କ'ଣ ସୂଚିତ ହୁଏ ?

(i)



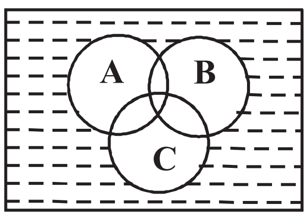
ଚିତ୍ର **15.64**

(ii)



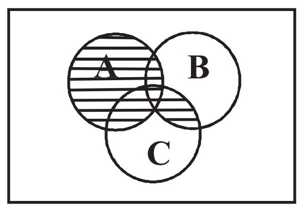
ଚିତ୍ର **15.65**

(iii)



ଚିତ୍ର **15.66**

(iv)



ଚିତ୍ର **15.67**

7. ନିମ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର :
(i) $A' \cap (B \cup C)$ (ii) $A' \cap (C - B)$
ଯେଉଁଠି A, B, C ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ ନୁହନ୍ତି ଏବଂ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ U ର ଉପସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

8. ଦତ୍ତ ଅଛି : $A = \{a, b, c\}, B = \{2, 3\}$ ।
A ରୁ B କୁ ସମ୍ବନ୍ଧ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

9. ଦତ୍ତ ଅଛି : $A = \{7, 8, 9\}, B = \{9, 10, 11\}, C = \{11, 12\}$ ।
ଦର୍ଶାଅ ଯେ : (i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

10. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ଫଳନ ସୂଚିତ ହୁଏ ? ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $x \in R$ ।

(a) $y = \frac{2x+3}{4-5x}, x \neq \frac{4}{5}$ (b) $y = \frac{3}{x}, x \neq 0$ (c) $y = \frac{3}{x^2-16}, x \neq 4, -4$

(d) $y = \sqrt{x-1}, x \geq 1$ (e) $y = \frac{1}{x^2+1}$ (f) $x^2 + y^2 = 25$

11. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ପରିସର ଓ ବିସ୍ତାର ଲେଖ :
$f_1 : \{(0, 1), (2, 3), (4, 5), (6, 7), \ldots (100, 101)\}$
$f_2 : \{(-2, 4), (-4, 16), (-6, 36), \ldots\}$
$f_3 : \left\{(1, 1), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, -1\right), \left(\frac{1}{4}, -1\right), \ldots\right\}$
$f_4 : \{\ldots, (3, 0), (-1, 2), (4, -1)\}$
$f_5 : \{\ldots, (-3, 3), (-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$

12. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କର ପରିସର ଲେଖ :

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+6)}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x-5)}}$

13. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ବିସ୍ତାର ଲେଖ :

(a) $y = 3x+2,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2}, x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$

(d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x \in R^+$ (ସମସ୍ତ ଅଣରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା)

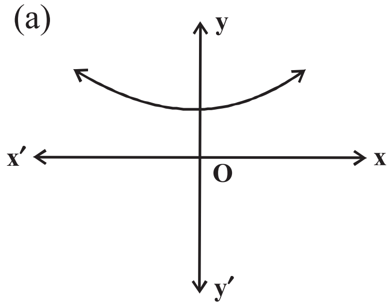
14. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳନର ଲେଖ ଅଙ୍କନ କର :

(a) $y = x^2 + 3,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x - 2}, x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x \in R^+$

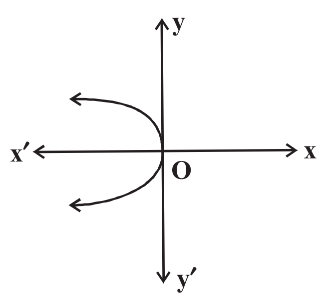
15. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଲେଖ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ?

(a)



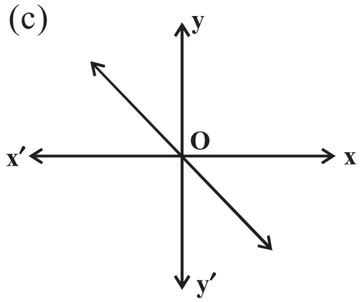
ଚିତ୍ର 15.68

(b)



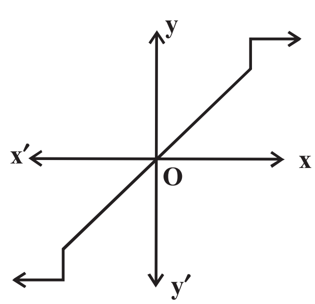
ଚିତ୍ର 15.69

(c)



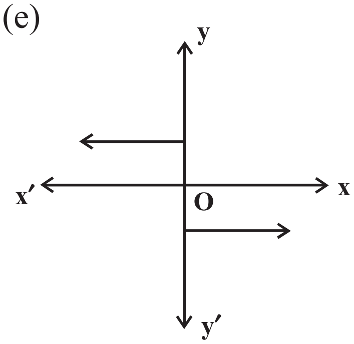
ଚିତ୍ର 15.70

(d)



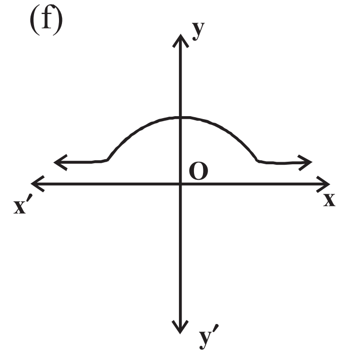
ଚିତ୍ର 15.71

(e)



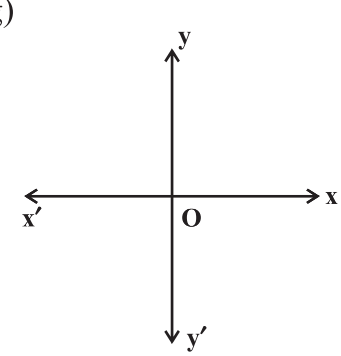
ଚିତ୍ର 15.72

(f)



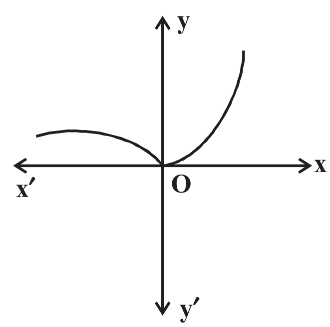
ଚିତ୍ର 15.73

(g)



ଚିତ୍ର 15.74

(h)



ଚିତ୍ର 15.75

16. ନିମ୍ନସ୍ଥ ଫଳନ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଏକୈକ ଫଳନ ଓ କେଉଁଟି ଅନେକ-ଏକ ଫଳନ ତାହା ଚିହ୍ନଟ କର :

(a) $y = 3x+5, x \in R$ (b) $y = 1-2x^2, x \in R$

(c) $f : \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

(d) $f : \{1, 2, 3\} \to \{4, 5, 6, 8\}$ ଯେପରିକି $f(1) = 4, f(2) = 6, f(3) = 8$

17. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ଫଳନ ପରିମେୟ ଫଳନ ଅଟେ ?

(a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}, x \in R - \{-2\}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}, x \in R^+$

(c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}, x \in R - \{-2\}$ (d) $y = x, x \in R$

18. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ବହୁପଦ ଫଳନ ?

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}x + 2$ (b) $f(x) = (x+2)^2$

(c) $f(x) = 3 - x + 2x^3 - x^4$ (d) $f(x) = \sqrt{x} + x - 5, x \geq 0$

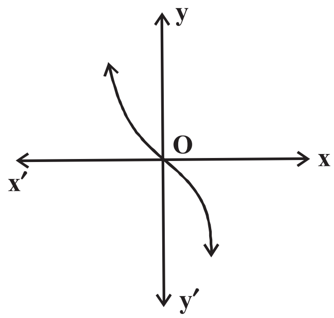
(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \notin (-2, 2)$

19. ନିମ୍ନ ଫଳନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସମଫଳନ ଓ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ବିଷମ ଫଳନ ଚିହ୍ନଟ କର :

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, x \in [-3, 3],$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

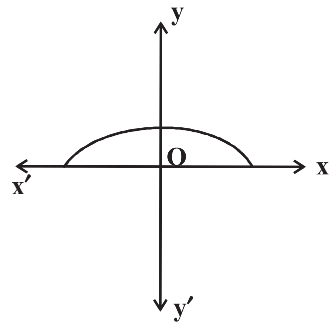
(c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x - x^5$

(e)



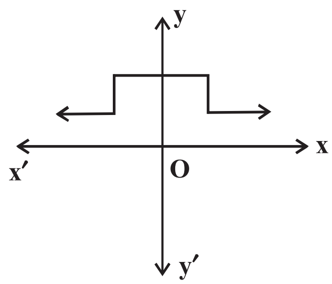
ଚିତ୍ର **15.76**

(f)



ଚିତ୍ର **15.77**

(g)



ଚିତ୍ର **15.78**

20. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଫଳନଗୁଡ଼ିକ ଲାଗି fog, gof, fof, gog ଲେଖ :

(a) $f(x) = x^3$, $g(x) = 4x - 1$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2}, x \neq 0$, $g(x) = x^2 - 2x + 3$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$, $x \geq 4$ $g(x) = x - 4$

(d) $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = x^2 + 1$

21. (a) ମନେକରାଯାଉ $f(x) = |x|$, $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $h(x) = x^{\frac{1}{3}}$ fogoh ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(b) $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 2x^2 + 1$

ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : fog (3) ଏବଂ gof (3)

22. ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସମୀକରଣ, ଏକ ଫଳନକୁ ସୂଚାଏ ଓ କାହାର ପ୍ରତିଲୋମ ରହିଛି ?

(a) $f(x) = |x|$ (b) $f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$

(c) $f(x) = x^2 - 1, x \geq 0$ (d) $f(x) = \frac{3x - 5}{4}$

(e) $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 1}, x \neq 1$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.1

1. (i), (ii), (iii) ଗୁଡ଼ିକ ସେଟ୍

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$

3. (i) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$

   (ii) $B = \{-1, 1\}$, (iii) $C = \{a, b, n\}$

   (iv) $D = \{2, 3, 5\}$

4. (i) A = {x : x ହେଉଛି 10 ସହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା}

   (ii) B = {x : x $\in$ N ଏବଂ x ହେଉଛି 3ର ଏକ ଗୁଣିତକ}

   (iii) C = {x : x ହେଉଛି 10 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା}

   (iv) D = {x : x $\in$ R ଏବଂ x ହେଉଛି $x^2 - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଏକ ମୂଳ}

5. (i) ଅସୀମ (ii) ସସୀମ (iii) ଅସୀମ (iv) ଅସୀମ

6. (i) ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ (ii) ଏକ ଉପାଦାନୀ (iii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ (iv) ଶୂନ୍ୟସେଟ୍

7. (i) $A \approx B$ (ii) $A \approx B$ (iii) $A = B$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.2

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\in$ (iv) $\notin$

2. 4,

3. (i) ଭୁଲ୍ (ii) ଠିକ୍

4. (i) ଭୁଲ୍ (ii) ଠିକ୍ (iii) ଠିକ୍ (iv) ଭୁଲ୍

5. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{6, 7\}$

6. A^c = {x : x ହେଉଛି ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା}

   B^c = {x : x $\in$ N ଏବଂ x 3ର ଗୁଣିତକ ନୁହେଁ}

   $C^c = \{1, 2, 3, 4\}$,

   $D^c = \{11, 12, 13, ...\}$

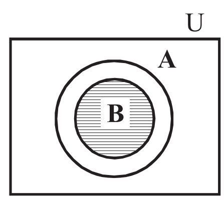
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.3

1. (i) ଅଣଛେଦୀ (ii) ଅଣଛେଦୀ ନୁହେଁ (iii) ଅଣଛେଦୀ ନୁହେଁ (iv) ଅଣଛେଦୀ
2. (i) $\{x : x \in N\}$ (ii) ϕ
3. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ii) $\{5\}$
4. ତାଲିକା ପଦ୍ଧତି $\{-10, -9, -8, ..., 0, 1, 2, 3, ...\}$

   ସୂତ୍ରପଦ୍ଧତି $\{x : x \in z$ ଏବଂ $-10 \leq x \leq \infty\}$
5. (i) {x : x ହେଉଛି ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକି 20 ସହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର}

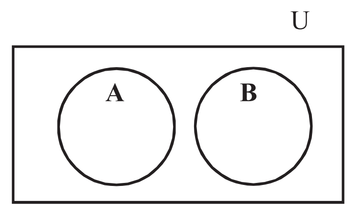
   (ii) ϕ
6. (i) ϕ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

   (iii) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (iv) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
7. (i)



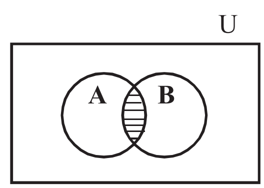
ଚିତ୍ର 15.79

(ii)



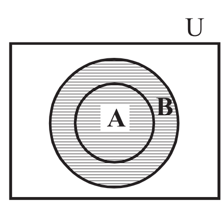
ଚିତ୍ର 15.80

(iii)



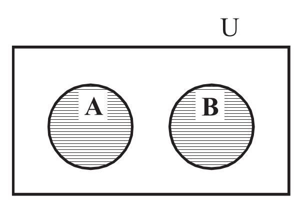
ଚିତ୍ର 15.81

8. (i)



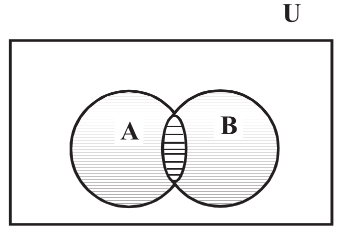
ଚିତ୍ର 15.82

(ii)



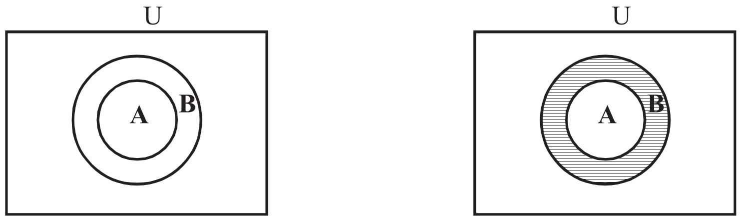
ଚିତ୍ର 15.83

(iii)



ଚିତ୍ର 15.84

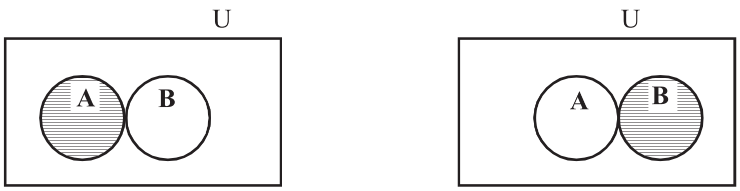
9. (i)



A – B = ϕ   B – A ϕ ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର 15.85

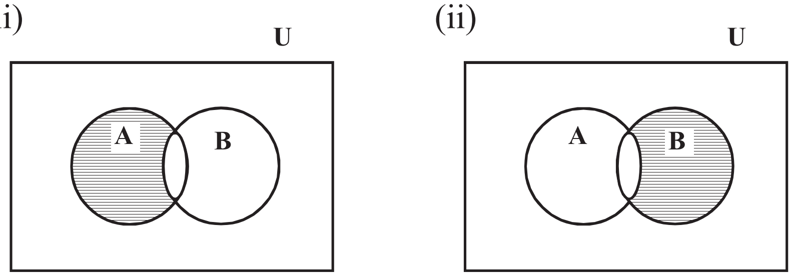
(ii)



A – B = A   B – A = B

ଚିତ୍ର 15.86

(iii)   (ii)



A – B = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ   B – A = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର 15.87

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.4

2. {(2, 1), (4, 1), (2, 4), (4, 4)}
3. (i) R = {(4, 2), (4, 4), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (8, 4), (10, 2), (10, 5)}
   (ii) Rର ପରିସର = {4, 6, 8, 10} (iii) Rର ବିସ୍ତାର = {2, 3, 4, 5}
4. (i) R = {(1, 8), (2, 4)} (ii) Rର ପରିସର = {1, 2}
   (iii) Rର ପରିସର = {1, 2} {8, 4}
5. (i) R = {(2, 4), (3, 9), (5, 25), (7, 49), (11, 121), (13, 169)}
   Rର ପରିସର = {2, 3, 5, 7, 11, 13}, Rର ବିସ୍ତାର = {4, 9, 25, 49, 121, 169}
6. (i) Rର ପରିସର = ϕ   (ii) Rର ପରିସର = ϕ   (iii) Rର ବିସ୍ତାର = ϕ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.5

1. (a), (c), (f) 2.(a), (b) 3.(a), (d)

4. (a) ପରିସର $=\left\{\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{3}\right\}$, ବିସ୍ତାର = $\{2, -1, 5\}$

(b) ପରିସର = $\{-3, -2, -1\}$, ବିସ୍ତାର $=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) ପରିସର = $\{1, 0, 2, -1\}$, ବିସ୍ତାର = $\{1, 0, 2, -1\}$

(d) ପରିସର = {ଦୀପକ, ସନ୍ଦୀପ, ରାଜନ୍}, ବିସ୍ତାର = $\{16, 28, 24\}$

5. (a) ପରିସର = $\{1, 2, 3\}$, ବିସ୍ତାର = $\{4, 5, 6\}$

(b) ପରିସର = $\{1, 2, 3\}$, ବିସ୍ତାର = $\{4\}$

(c) ପରିସର = $\{1, 2, 3\}$, ବିସ୍ତାର = $\{1, 2, 3\}$

(d) ପରିସର = {ଗଗନ୍, ରାମ, ସଲୀଲ୍}, ବିସ୍ତାର = $\{8, 9, 5\}$

(e) ପରିସର = $\{a, b, c, d\}$, ବିସ୍ତାର = $\{2, 4\}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.6

1. (a) (i) ପରିସର = ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ । (ii) ପରିସର = ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍

(iii) ପରିସର = ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ।

(b) (i) ପରିସର $=R-\left\{\frac{1}{3}\right\}$, (ii) ପରିସର $=R-\left\{-\frac{1}{4},5\right\}$

(iii) ପରିସର = $R - \{3, 5\}$ (iv) ପରସର = $R - \{3, 5\}$

(c) (i) ପରିସର = $\{x \in R : x \leq 6\}$ (ii) ପରିସର = $\{x \in R : x \geq -7\}$

(iii) ପରିସର = $\{x : x \in R, x \geq \frac{5}{3}\}$

(d) (i) ପରିସର = $\{x : x \in R$ ଏବଂ $3 \leq x \leq 5\}$

(ii) ପରିସର = $\{x : x \in R, x \geq 3, x \leq -5\}$

(iii) ପରିସର = $\{x : x \in R, x \geq -3, x \leq -7\}$

(iv) ପରିସର = $\{x : x \in R, x \geq 3, x \leq -7\}$

2. (a) (i) ବିସ୍ତାର = $\{13, 25, 31, 7, 4\}$ (ii) ବିସ୍ତାର = $\{19, 9, 33, 1\}$

(iii) ବିସ୍ତାର = {2, 4, 8, 14, 22}

(b) (i) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : -2 \le f(x) \le 2\}$ (ii) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : 1 \le f(x) \le 10\}$

(c) (i) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : 1 \le f(x) \le 25\}$ (ii) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : -6 \le f(x) \le 6\}$

(iii) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : 1 \le f(x) \le 5\}$ (iv) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : 0 \le f(x) \le 5\}$

(d) (i) ବିସ୍ତାର = R (ii) ବିସ୍ତାର = R (iii) ବିସ୍ତାର = R

(iv) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : f(x) < 0\}$ (v) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : -1 \le f(x) < 0\}$

(vi) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : 0.5 \le f(x) < 0\}$ (vii) ବିସ୍ତାର = $\{f(x) : f(x) > 0\}$

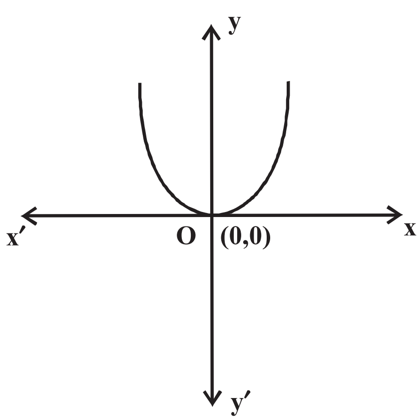
(viii) ବିସ୍ତାର : $x = -5$ ଲାଗି f(x) ର ପ୍ରାପ୍ତ ମୂଲ୍ୟ ଭିନ୍ନ f(x)ର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମୂଲ୍ୟମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.7

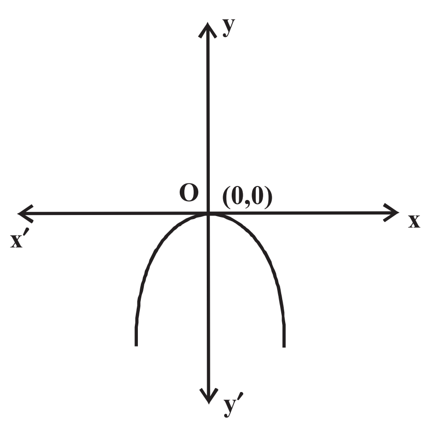
1. (i) ନାହିଁ (ii) ହିଁ 2. (a), (b)

3. (a) 4.(a), (c), (e) 5. (a), (b)

6. (a) (b)

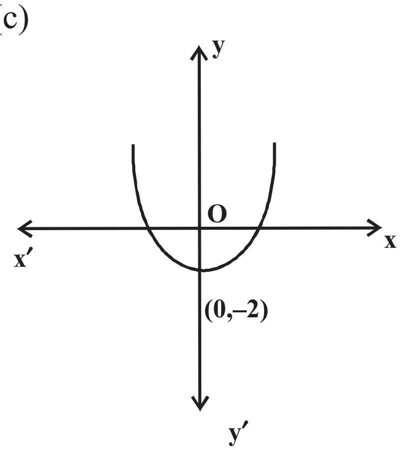


ଚିତ୍ର 15.88

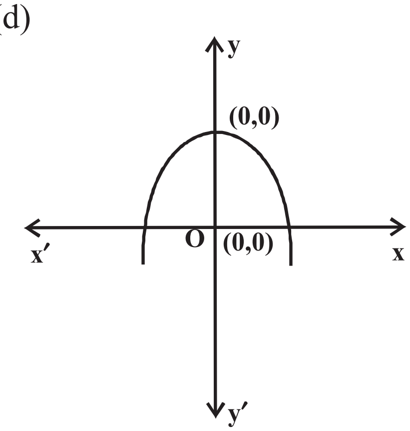


ଚିତ୍ର 15.89

(c) (d)

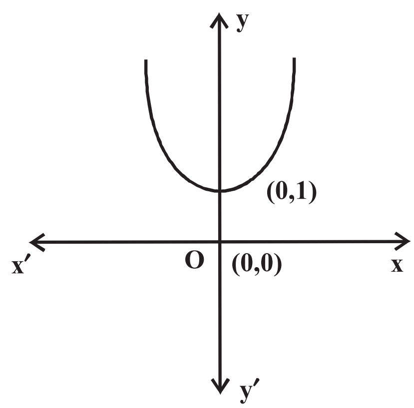


ଚିତ୍ର 15.90



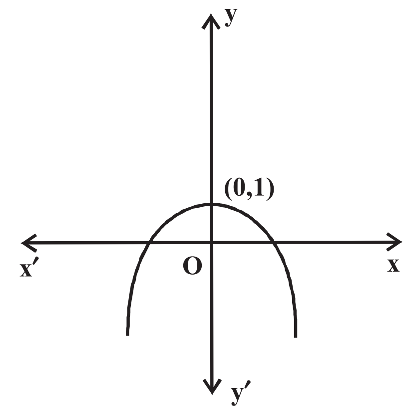
ଚିତ୍ର 15.91

(e)



ଚିତ୍ର 15.92

(f)

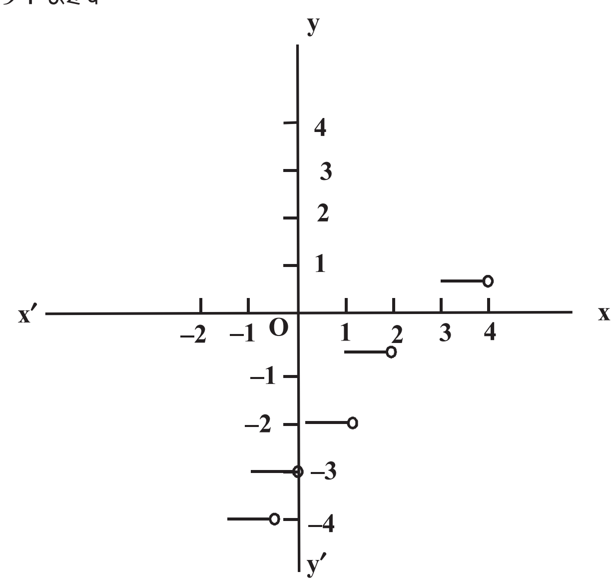


ଚିତ୍ର 15.93

7. (c), (d) ଏବଂ (e)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.8

1. (v), (vi), (vii) ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ (i), (ii), (iii), (iv) ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ ।
2. (b) ଓ (c) ସମଫଳନ; (d), (e), (h)ଗୁଡ଼ିକ ବିଷମ ଫଳନ ।
3. ଚିତ୍ର 15.94 ରହିବ



ଚିତ୍ର 15.94

4. (a) ବହୁପଦ ଫଳନ (b) ପରିମେୟ ଫଳନ
(c) ପରିମେୟ ଫଳନ (d) ପରିମେୟ ଫଳନ
(e) ପରିମେୟ ଫଳନ (f) ପରିମେୟ ଫଳନ
(g) ଧ୍ରୁବକ ଫଳନ

ଟିପ୍ପଣୀ

5. ନାହିଁ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.9

1. (i) $fog = \frac{x^2}{(1-x)^2} + 2$ (ii) $gof = \frac{x^2+2}{x^2+1}$

   (iii) $fof = x^4 + 4x^2 + 6$ (iv) $gog = x$

2. (a) $fog = 4x^2 + 20x + 21, gof = 2x^2 - 3$

   $fof = x^4 - 8x^2 + 12, gog = 4x + 15$

   (b) $fog = 9, gof = 3, fof = x^4, gog = 3$

   (c) $fog = \frac{6-7x}{x}, gof = \frac{2}{3x-7}, fof = 9x - 28, gog = x$

6. (a) $fog = \left|x^{\frac{1}{3}}\right|$ (b) $goh = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (c) $foh = \left|\frac{1}{x}\right|$

   (d) $hog = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ (e) fogoh (1) = 1

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.10

1. (ii) ପରିସର ହେଉଛି B; ବିସ୍ତାର ହେଉଛି A ।

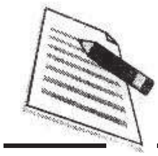
2. (a) $f^{-1}(x) = x-3$ (b) $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$

   (c) ପ୍ରତିଲୋମ ନାହିଁ (d) $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1}$

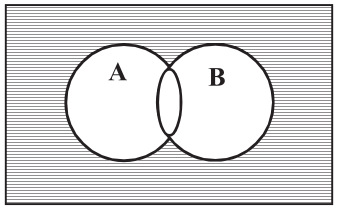
ଆସ ଅଭ୍ୟାସ କରିବା

1. (i) ଭୁଲ (ii) ଠିକ୍ (iii) ଭୁଲ୍ (iv) ଭୁଲ୍

2. (i) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9} (ii) {8, 10, 12}



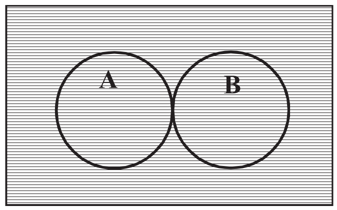
3. (i)



$(A \cup B)'$ = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର **15.95**

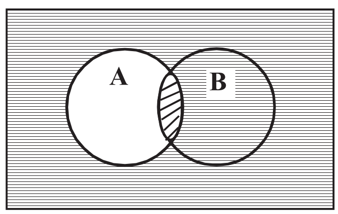
(ii)



$(A \cap B)'$ = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର **15.96**

(iii)



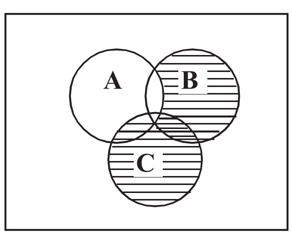
$(A - B)'$ = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର **15.97**

5. (i) {4, 6, 8, 10} (ii) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
(iii) ϕ (iv) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

6. (i) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C$
(iii) $[(A \cup B) \cup C]'$ (iv) $A \cup (B \cap C)$

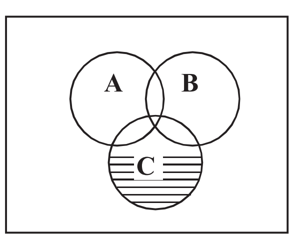
7. (i)



$A' (B \cup C)$ ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର **15.98**

(ii)



$A' \cap (C - B)$ = ଛାୟାଙ୍କିତ ଅଂଶ

ଚିତ୍ର **15.99**

8. 2^6 ଅର୍ଥାତ୍ 64 10. (a), (b), (c), (d), (e) ଗୁଡ଼ିକ ଫଳନ ଅଟନ୍ତି ।

11 . f_1 – ପରିସର = $\{0, 2, 4, 6, ... 10, 0\}$,

ବିସ୍ତାର = $\{1, 3, 5, 7, ... 101\}$ ।

f_2 – ପରିସର = $\{-2, -4, -6, ...\}$,

ବିସ୍ତାର = $\{4, 16, 36, ...\}$

f_3 – ପରିସର $= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$,

ବିସ୍ତାର = $\{1, -1\}$

f_4 – ପରିସର = $\{3, -1, 4\}$,

ବିସ୍ତାର = $\{0, 2, -1\}$

f_5 – ପରିସର = $\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

ବିସ୍ତାର = $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ ।

12. (a) ପରିସର = R (b) ପରିସର = $R - \{-1, 1\}$

(c) ପରିସର $= x \geq -\frac{1}{3} \forall x \in R.$

(d) ପରିସର = $x \geq -1, x \leq -6$

(e) ପରିସର $= x \geq \frac{5}{2}, x \leq 1$

13. (a) ବିସ୍ତାର = R,

(b) ବିସ୍ତାର = x = 2 ଠାରେ yର ଯେଉଁମାନ ଅଛି ତା ଭିନ୍ନ yର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ମାନ ।

(c) ବିସ୍ତାର $= \left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$,

(d) ବିସ୍ତାର = $x > 0$ ଲାଗି yର ସମସ୍ତ ମାନ ।

15. (a), (c), (e), (f), (h)

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 15.7 ପ୍ରଶ୍ନ ନଂ 7 ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂଚନାକୁ ବ୍ୟବହାର କର ।

16. ଏକୈକ ଫଳନ : (a), (d) ଅନେକ-ଏକ ଫଳନ : (b), (c)

17. (a), (c) 18. (a), (b) (c)

19. ସମଫଳନ (a), (b), (c), (f), (g)

ବିଷମ ଫଳନ : (d), (e) ।

20. (a) $fog = (4x-1)^3$, $gof = 4x^3 - 1$, $fof = x^9$, $gog = 16x-5$

(b) $fog = \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}$, $gof = \frac{3x^4-2x^2+1}{x^4}$,

$fog = x^4$, $gog = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

(c) $fog = \sqrt{x-8}$, $gof = \sqrt{x-4} - 4$

$fof = \sqrt{\sqrt{x-4}-4}$, $gog = x-8$

(d) $fog = x^4 + 2x^2$, $gof = x^4 - 2x^2 + 2$

$fof = x^4 - 2x^2$, $gog = x^4 + 2x^2 + 2$

21. (a) $\left|\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right|$ (b) $(fog)(3) = 364$, $gof(3) = 289$

22. (c), (d), (e)