୧୩

ସମାନ୍ତର ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି
Arithmetic and Geometric Progression

ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ସମୂହ, ଯେଉଁଥିରେ ଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାକୁ ପ୍ରଥମ ପଦ, ତା'ପରଟିକୁ ଦ୍ୱିତୀୟ, ଏହାପରଟିକୁ ତୃତୀୟ ଏବଂ ଏହିପରି ଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକୁ ଏକ ଅନୁକ୍ରମ କୁହାଯାଏ । ଅନୁକ୍ରମର ବ୍ୟାପକ ବ୍ୟବହାର ଅଛି । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ କେତେକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରକାରର ଅନୁକ୍ରମ, ଯଥା ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମ, ଗୁଣୋତ୍ତର ଅନୁକ୍ରମ ଏବଂ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (AM) ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ (GM) ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଆମେ ମଧ୍ୟ AM ଓ GM ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ।

ଆସ ନିମ୍ନ ସମସ୍ୟାର ବିଚାର କରିବା :

(a) ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ହଳେ ନବଜାତ ଠେକୁଆ ଛୁଆଙ୍କୁ ଘରେ ରଖିଛି ଓ ଏବଂ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟ ପରେ ସେ କେତୋଟି ଠେକୁଆ ପାଇବ ଜାଣିବାକୁ ଚାହୁଁଛି । ଜନ୍ମର ଦୁଇ ମାସ ପରେ ଏକ ଠେକୁଆ ଯୁଗଳ, ଛୁଆ ଜନ୍ମ କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ ଏହାପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମାସରେ ଏକ ନୂଆ ହଳ ଦେଖାଦିଅନ୍ତି । ପ୍ରାରମ୍ଭରେ ଏହି ଘରେ କେବଳ ଏକ ଯୋଡ଼ା ଠେକୁଆ ଥିବେ । ଦ୍ୱିତୀୟ ମାସରେ ସେ ଲୋକଟିର ସେହି ଏକ ଏକ ଯୋଡ଼ା, ତୃତୀୟ ମାସରେ ଠେକୁଆ ଘରେ ଠେକୁଆ ସଂଖ୍ୟା 2 ଯୋଡ଼ାକୁ ବୃଦ୍ଧି ପାଏ । ଚତୁର୍ଥ ମାସରେ, ତିନି ହଳ ଠେକୁଆ ହେବେ । ଏହିପରି କ୍ରମିକ ମାସ ଗୁଡ଼ିକରେ ଠେକୁଆ ହଳ ସଂଖ୍ୟା ହେବ

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

(b) ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା $0\cdot\bar{3}$ କୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$$0\cdot\bar{3} = 0\cdot 3 + 0\cdot 03 + 0\cdot 003 + 0\cdot 0003 \ldots.$$

(c) ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ପ୍ରଥମ ଦିନ 10 ଟ. ରୋଜଗାର କଲେ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଦିନରେ 30 ଟ. ତୃତୀୟ ଦିନରେ 50 ଟ. ଇତ୍ୟାଦି । ବ୍ୟକ୍ତି ଜଣକର ଦୈନିକ ମଜୁରି ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

10, 30, 50, 70, 90 ...

ଆମେ କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାସରେ 10 ମ ଦିନରେ ଏହାର ରୋଜଗାର ପଚାରିପାରିବା ।

ପୁନଶ୍ଚ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମ ଉପରେ ବିଚାର କର :

1. $2, 4, 8, 16, \ldots$ (2) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$

3. $0.01, 0.0001, 0.000001 \ldots$

ଏହି ତିନି ଅନୁକ୍ରମରେ ପ୍ରଥମ ପଦ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟପଦଗୁଡ଼ିକ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ ରହିଥିବାର ଦେଖାଯାଏ । ଉପରୋକ୍ତ ତିନିଗୋଟି ଅନୁକ୍ରମରେ କ୍ରମଗୁଡ଼ିକ ପରସ୍ପର ଠାରୁ ଭିନ୍ନ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ସେହିସବୁ ଅନୁକ୍ରମଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା, ଯାହାର ପଦଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ ଅଗ୍ରଗତି କରେ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ ତୁମେ ।

- ଅନୁକ୍ରମ (ଶ୍ରେଣୀ)ର ଧାରଣାର ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବାକୁ ସମର୍ଥ ହେବ;
- ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବା ସହ ଏହାର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ସାଧାରଣ ପଦ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଏକ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର a, d, n ଓ t_n ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି 3 ଟି ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଚତୁର୍ଥଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର କୌଣସି ଦୁଇଟି ପଦ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର କିମ୍ବା ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- A.P ର ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି ଲାଗି ସୂତ୍ର ନିରୂପଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ A.P. ର S, n, a ଓ d ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତ ଥିଲେ ଚତୁର୍ଥ ରାଶିଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ସେମାନଙ୍କର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକକୁ ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କରିପାରିବ;
- A.P. ର ଧାରଣାକୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି, ଦୈନନ୍ଦିନଜୀବନର ସମସ୍ୟା ସମାଧାନ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ଭିନ୍ନ ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଗୁଣନ କରି ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା କ୍ରମବର୍ଦ୍ଧମାନ ବା କ୍ରମହ୍ରାସ ମାନ ଅନୁକ୍ରମ ହେଉଛି ଏକ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି, ଏହା କହିପାରିବ;
- ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଗତି ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ G.P କୁ ଚିହ୍ନିପାରିବ;
- G.P ର ସାଧାରଣ ପଦ ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଏକ G.P ର t_n, a, r ଓ n ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଚତୁର୍ଥଟିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଏକ GP ର ଦୁଇଟି ପଦ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ଓ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ;
- ସାଧାରଣ ପଦ ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ଅନୁକ୍ରମଟିକୁ ଲେଖିପାରିବ;
- ଏକ G.P ର ପ୍ରଥମ n ଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସୂତ୍ର ସ୍ଥିର କରିପାରିବ;
- ଯଦି ଏକ G.P ର a, r, n ଓ s ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ଦିଆଯାଇ ଥାଏ, ତେବେ ଚତୁର୍ଥଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ଏକ G.P ର ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି(S_∞)ର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ, ଯେତେବେଳେ $|r| < 1$ ।

- ଏକ ଅସୀମ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ G.P ର S_∞, a ଓ r ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ଥିଲେ, ତୃତୀୟଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- GP ର ବ୍ୟବହାର କରି ଏକ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସାଧାରଣ ଭଗ୍ନାଂଶରେ ପରିଣତ କରିପାରିବ :
- ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ G.M ର ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କରିପାରିବ ଏବଂ
- ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M) ଓ ଗୁଣତ୍ତୋର ମଧ୍ୟକ (G.M) ମଧ୍ୟରେ ସଂପର୍କ ସ୍ଥାପନ କରିପାରିବ ।

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ
- ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ସହ ସମୀକରଣ
- ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ

13.1 ଅନୁକ୍ରମ (Sequence)

ଅନୁକ୍ରମ, ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଏକ ସମାହାର ଅଟେ ଯାହା କିଛି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନିୟମ ପାଳନ କରି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କ୍ରମରେ ରହେ । ଏଠାରେ ସମାହାରର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା a_n, ଅନୁରୂପ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା n ସହ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ହୋଇପାରେ ।

ଅନୁକ୍ରମ ପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ବିଭିନ୍ନ ସଂକେତ :

1. $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$
2. $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\{a_n\}$

ଆସ ନିମ୍ନ ଅନୁକ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକ ବିଚାର କରିବା :

1. $1, 2, 4, 8, 16, 32 \ldots$
2. $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$
4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots$
5. ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁକ୍ରମର n ତମ ପଦର ପରିପ୍ରକାଶ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ।

1. $a_n = 2^{n-1}$ 2. $a_n = n^2$ 3. $a_n = \frac{n}{n+1}$ 4. $a_n = \frac{1}{n}$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ ।

ଉପକ୍ରମର ପ୍ରଥମ ପ୍ରଶ୍ନ (ସମସ୍ୟା) ପାଇଁ, ପଦଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ସମ୍ବନ୍ଧରୁ ମିଳିପାରେ ।

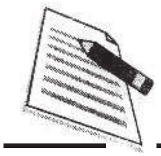
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \; n \geq 3$

ସସୀମ ଅନୁକ୍ରମରେ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ଥାଏ, ଓ ଅସୀମ ଅନୁକ୍ରମରେ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ଥାଏ ।

13.2 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି (Arithmetic Progression)

ଆସ ସଂଖ୍ୟା ଅନୁକ୍ରମର ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ଉପରେ ବିଚାର କରିବା :

(1) $2, 4, 6, 8 \ldots$ (2) $1, \frac{3}{2}\ 2, \frac{5}{2}, \ldots$



(3) 10, 8, 6, 4, ... (4) $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \ldots$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ଚାରିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମ ପଦ ଯଥାକ୍ରମେ 2, 1, 10 ଓ $-\frac{1}{2}$ । ଏ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପ୍ରଥମ ପଦର ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଅଛି । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଅନୁକ୍ରମର ଅନ୍ୟ ପରିବର୍ତ୍ତୀପଦ ମାନଙ୍କର ପ୍ରଥମ ପଦ ସହ ନିଶ୍ଚିତ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି । ଉଦାହରଣ (1) ରେ ପ୍ରଥମ ପଦ ସହ ପଦମାନଙ୍କର କ'ଣ ସମ୍ବନ୍ଧ ଅଛି ?

ପ୍ରଥମ ପଦ = 2

2 ୟ ପଦ = 4 $= 2 + 1 \times 2$

3 ୟ = 6 $= 2 + 2 \times 2$

4 ର୍ଥ ପଦ = 8 $= 2 + 3 \times 2$ ଏବଂ ଏହିପରି

ଉପରୋକ୍ତ ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ସହ 2 ଯୋଗକଲେ ଏହାର କ୍ରମିକ ପଦ ମିଳେ । ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପଦ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର ସମାନ ଅଟେ ।

ଏହି ଧର୍ମ ଦ୍ୱାରା ସମ୍ବନ୍ଧିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଅନୁକ୍ରମ, ଯେଉଁଥିରେ ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପଦମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତାହାକୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି କୁହାଯାଏ, ଯାହାକୁ ସଂକ୍ଷପରେ A.P. ଲେଖାଯାଏ ।

ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପଦର ଅନ୍ତରକୁ A.P. ର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ d ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ ।

ସାଧାରଣତଃ ଏକ A.P, ଯାହାର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d, ତାକୁ

a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଆମେ ପ୍ରଗତିର n ତମ ପଦକୁ t_n ଦ୍ୱାରା ରୂପେ ଚିହ୍ନିତ କରୁ ।

13.2.1 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ସାଧାରଣ ପଦ

ଆସ A.P.

a, a + d, a + 2d, a + 3d ... ଉପରେ ବିଚାର କରିବା

ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ $(t_1) = a$

ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ $(t_2) = a + d = a + (2 - 1)\,d$

ତୃତୀୟ ପଦ $(t_3) = a + 2d = a + (3 - 1)\,d$

ଉପରୋକ୍ତ ପଦ୍ଧତିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ, n ତମ ପଦକୁ $t_n = a + (n - 1)d$ ରୂପେ ଲେଖିପାରିବା ।

ଏଥିପାଇଁ, ଯଦି A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଜଣାଥିବ, ତେବେ, A.P.ର ଯେକୌଣସି ପଦ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରେ ।

କେବେ କେବେ A.P ର n ତମ ପଦକୁ n ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ, ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ

$t_n = 2n - 1$ । ଏହି କ୍ଷେତ୍ରରେ, ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶରେ n = 1, 2, 3, ... ପ୍ରତି ସ୍ଥାପନ କରି A.P କୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ A.P ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ହେବ 1, 3, 5, 7, 9, ... ଇତ୍ୟାଦି ।

ଟିପ୍ପଣୀ

ଟୀକା : (i) ଯଦି ଏକ A.P. ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦରେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କରାଯାଏ, ତେବେ ପରିଣାମୀ ଅନୁକ୍ରମ ଏକ A.P. ହେବ ।

(ii) ଯଦି ଏକ A.P. ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦକୁ ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମାନ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣାଯାଏ, ତେବେ ପରିଣାମୀ ଅନୁକ୍ରମ ଏକ A.P. ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 13.1 A.P. : 2, 4, 6, ... ର 10 ମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a = 2 ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d = 4 – 2 = 2 । ତେବେ ସୂତ୍ର $t_n = a + (n - 1) d$, ବ୍ୟବହାର କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$t_{10} = 2 + (10 - 1)\times 2 = 2 + 18 = 20$

ଏଣୁ A.P. ର 10 ମ ପଦ 20 ।

ଉଦାହରଣ 13.2 ଏକ A.P. ର 10 ମ ପଦ –15 ଓ 31 ତମ ପଦ –57 ; ତେବେ 15 ତମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ମନେକର A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d, ତେବେ ସୂତ୍ର $t_n = a + (n - 1)d$ ରୁ

ଆମେ ପାଇବା

$t_{10} = a + (10 - 1)\, d = a + ad$

$t_{31} = a + (31 - 1)\, d = a + 30\, d$

ଆମେ ପୁନଶ୍ଚ ପାଇବା

$a + 9d = -15 \qquad ...(1)$

$a + 30d = -57 \qquad ... (2)$

a ଓ d ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ସମୀକରଣ (1) ଓ (2) କୁ ସମାଧାନ କର ।

(2) ରୁ (1) କୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$21d = -57 + 15 = -42$

$\therefore d = \frac{-42}{21} = -2$

ପୁନଶ୍ଚ (1) ରୁ $a = -15 - 9d = -15 - 9\,(-2)$

$= -15 + 18 = 3$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $t_{15} = a + (15 - 1)\, d$

$= 3 + 14\,(-2) = -25$

ଉଦାହରଣ 13.3 A.P. : 5, 11, 17, ... ର କେଉଁ ପଦଟି 119 ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ a = 5, d = 11 – 5 = 6

$t_n = 119$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ

$t_n = a + (n - 1)\, d$

$\Rightarrow 119 = 5 + (n - 1) \times 6$

$\Rightarrow (n - 1) = \dfrac{119 - 5}{6} = 19$

$\therefore n = 20$

ତେଣୁ, ଦତ୍ତ A.P. ର 20 ତମ ପଦ 119 ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ 13.4 A.P. : 2, 9, 16, ... ରେ 600 ଏକ ପଦ ଅଟେ କି ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, $a = 2$ ଓ $d = 9 - 2 = 7$

ମନେକର, A.P. ର n ତମ ପଦ ହେଉଛି 600

$\therefore\ t_n = 2 + (n - 1)\, 7$

ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁଯାୟୀ, $2 + (n - 1)\, 7 = 600$

$\therefore\ (n - 1) \times 7 = 598$

କିମ୍ବା, $n = \dfrac{598}{7} + 1$

$\therefore n = 86\dfrac{3}{7}$

ଯେହେତୁ n ଏକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା, 600 A.P. ର ଏକ ପଦ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ 13.5 ଏକ A.P. ର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର 3 ଓ 15 ତମ ପଦ 37 । ପ୍ରଥମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, $d = 3$, $t_{15} = 37$ ଓ $n = 15$

ମନେକର, ପ୍ରଥମ ପଦ a । ଆମେ ପାଇବା ।

$t_n = a + (n - 1)\, d$

$37 = a + (15 - 1)\, 3$

କିମ୍ବା, $37 = a + 42$

$\therefore\ a = -5$

ଏହିପରି ଦତ୍ତ A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ ହେଉଛି –5 ।

ଉଦାହରଣ 13.6 ଯଦି $a + b + c = 0$ ଓ $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ ଏକ A.P ର ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ପଦ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ ମଧ୍ୟ A.P. ରେ ରହିବେ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ A.P. ର ତିନୋଟି କ୍ରମିକ ପଦ

ତେଣୁ, $\frac{b}{c+a} - \frac{b}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a}$

କିମ୍ବା, $\left(\frac{b}{c+a}+1\right) - \left(\frac{a}{b+c}+1\right) = \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - \left(\frac{b}{c+a}+1\right)$

କିମ୍ବା, $\frac{a+b+c}{c+a} - \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{a+b} - \frac{a+b+c}{c+a}$

କିମ୍ବା; $\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a}$

(ଯେହେତୁ $a + b + c \neq 0$)

କିମ୍ବା, $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. ରେ ଅଛନ୍ତି ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.1

1. ନିମ୍ନ A.P. ର n ତମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) 1, 3, 5, 7, ... (b) 3, 5, 7, 9...

2. ଯଦି $t_n = 2n + 1$ ହୁଏ, ତେବେ A.P. ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. A.P. $2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2}$ ର କେଉଁ ପଦ 31 ? 10ମ ପଦ ମଧ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. A.P. 7, 4, 1, –2, ... ର –292 ଏକ ପଦ କି ?

5. ଏକ A.P. ର m ତମ ପଦ n ଓ n ତମ ପଦ m । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (m + n) ତମ ପଦ ଶୂନ ହେବ ।

6. ତିନିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା A.P. ରେ ଅଛି । ପ୍ରଥମ ଓ ଶେଷ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର 8 ଓ ଏହି ଦୁଇ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 20 । ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟକର ।

7. ଏକ ଅନୁକ୍ରମର n ତମ ପଦ na + b । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ଯାହାର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର a ।

13.3 ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ (To find the sum of first n terms in an A.P.)

ମନେକର, ଏକ A.P. ର ପ୍ରଥମପଦ a, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d

ମନେକର l ଶେଷପଦକୁ ସୂଚାଏ ଅର୍ଥାତ୍, AP ର n ତମ ପଦ l, ତେବେ

$l = t_n = a + (n-1)\, d$ ... (i)

ମନେକର S_n, A.P. ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟିକୁ ସୂଚାଏ । ତେବେ,

$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (l - 2d) + (l - d) + l$ ...(ii)

ଉପରୋକ୍ତ ସମୀକରଣର ଦକ୍ଷିଣ ପାଖକୁ ଓଲଟା କ୍ରମରେ ଲେଖିଲେ

$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \dots + (a + 2d) + (a + d) + a$ ...(iii)

(ii) ଓ (iii) କୁ ଯୋଗକଲେ ପାଇବା

$2\, S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \dots$ n ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ $= n\,(a + l)$

ଅର୍ଥାତ୍ $S_n = \dfrac{n}{2}(a + l)$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$ [(i) ରୁ]

ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟଯେ, $t_n = S_n - S_{n-1}$

ଉଦାହରଣ 13.7 $2 + 4 + 6 + \dots$ n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ, $a = 2,\ d = 4 - 2 = 2$

ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କଲେ ପାଇବା $S_n = \dfrac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1) \times 2]$$

$$= \frac{n}{2}[2 + 2n] = \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= n\,(n+1)$$

ଉଦାହରଣ 13.8 ଅନୁକ୍ରମ 2, 3, 5, 9, 8, 15, 11, ... (2n + 1) ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଏମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି S । ତେବେ

$S = 2 + 3 + 5 + 9 + 8 + 15 + 11 + \dots$ (2n + 1) ଗୋଟି ପଦ

$= [2 + 5 + 8 + 11 + \dots$ (n + 1)ଗୋଟି ପଦ$] + [3 + 9 + 15 + 21 + \dots$ n ଗୋଟି ପଦ$]$

$$= \frac{n+1}{2}[2 \times 2 + (n+1-1) \times 3] + \frac{n}{2}[2 \times 3 + (n-1) \times 6]$$

$$= \frac{n+1}{2}[4+3n] + \frac{n}{2}[6+6n-6]$$

$$= \frac{(n+1)\ (3n+4)}{2} + 3n^2$$

$$= \frac{1}{2}[3n^2+7n+4+6n^2]$$

$$= \frac{1}{2}[9n^2+7n+4]$$

ଉଦାହରଣ 13.9 ଏକ A.P. ର 35 ତମ ପଦ 69 ହେଲେ, ଏହାର 69 ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A.P. ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧରଣ ଅନ୍ତର d

ଆମେ ପାଇବା, $t_{35} = a + (35 - 1)\ d = a + 34\ d$

$\therefore\ a + 34\ d = 69$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସୂତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପାଇବା $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\ d]$

$$\Rightarrow S_{69} = \frac{69}{2}[2a+(69-1)\ d]$$

$= 69(a+34\ d)$[(i) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ]

$= 69 \times 69$

$= 4761$

ଉଦାହରଣ 13.10 ଏକ A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ 10 ଓ ଶେଷପଦ 50 । ସମସ୍ତ ପଦର ସମଷ୍ଟି 480 ହେଲେ, ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ଓ ପଦ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ପାଇଛନ୍ତି, $a = 10,\ l = t_n = 50,\ S_n = 480$ । a, t_n ଓ S_n ର ମାନ, ନିମ୍ନ ସୂତ୍ରରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, $S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)\ d]$ ଓ $t_n = a+(n-1)d$,

ଆମେ ପାଇବା, $480 = \frac{n}{2}[20+(n-1)\ d]$ ...(i)

$50 = 10 + (n - 1)\ d$ ... (ii)

(ii) ରୁ ପାଇବା $(n - 1)d = 50 - 10 \Rightarrow (n - 1)\ d = 40$ ... (iii)

(i) ରୁ ପାଇବା, $480 = \frac{n}{2}(20+40)$

କିମ୍ବା, $60n = 2 \times 480$

$\therefore n = \frac{2 \times 480}{60} = 16$

(iii) ରୁ ପାଇବା,

$d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$ (ଯେହେତୁ $n - 1 = 16 - 1 = 15$)

ଉଦାହରଣ 13.11 ମନେକର ଏକ A.P. ର n ତମ ପଦ ଓ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ଯଥାକ୍ରମେ p ଓ q ।

ପ୍ରମାଣ କର, ପ୍ରଥମପଦ ହେଉଛି $\left(\frac{2q - pn}{n}\right)$

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $t_n = p$ ଓ $S_n = q$

ମନେକର A.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a

ବର୍ତ୍ତମାନ, $S_n = \frac{n}{2}(a + t_n)$

କିମ୍ବା, $\frac{n}{2}(a+p) = q$

କିମ୍ବା, $a + p = \frac{2q}{n}$

କିମ୍ବା, $a = \frac{2q}{n} - p$

$\therefore a = \frac{2q - pn}{n}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.2

1. ନିମ୍ନ A.P. ଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (a) 8, 11, 14, 17, ... 15 ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ
   (b) 8, 3, –2, –7, –12, ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ
2. A.P : 27, 23, 19, 15 ... ର କେତେ ଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି 95 ?
3. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ବନ୍ଧୁଙ୍କ ଠାରୁ 1740 ଟଙ୍କା ସୁଧ ମୁକ୍ତ ଋଣ ନେଲେ ଏବଂ ମାସିକ କିସ୍ତି ହିସାବରେ ସୁଝିବାକୁ କଥାଦେଲେ । ସେ ପ୍ରଥମ ମାସରେ 200 ଟଙ୍କା ଓ ପରବର୍ତ୍ତୀ ମାସ ମାନଙ୍କରେ କିସ୍ତିକୁ 10 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ କମ୍ କରିଚାଲିଲେ । ଏହି ଋଣକୁ ପରିଶୋଧ କରିବା ଲାଗି ତାଙ୍କୁ କେତେ ମାସ ଲାଗିବ ?

4. 3, 6, 9, 12, ... ପ୍ରଗତିର ଅତି କମ୍‌ରେ କେତେ ଗୋଟି ପଦ ନେଲେ, ସମଷ୍ଟି 200ରୁ କମ୍ ହେବ ନାହିଁ ?

5. ପିଲାମାନଙ୍କର ଆଳୁ ଦୌଡ଼ପ୍ରତିଯୋଗିତାରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଆଳୁ ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ 1 ମିଟର ଅନ୍ତରରେ ରଖାଯାଇଛି । ଜଣେ ପ୍ରତିଯୋଗୀ ଆଳୁ ରହିଥିବା ରେଖାରେ ଥିବା ନିକଟତମ ଆଳୁ ଠାରୁ 5 ମିଟର ଦୂରସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଦଉଡ଼ ଆରମ୍ଭ କଲେ । ଯଦି ସେ ଥରେ ଯାଇ ଗୋଟିଏ ଆଳୁ ଉଠାଇ ଆଣି ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁରେ ରଖେ ଓ ଏହିଭଳି ପରବର୍ତ୍ତୀ ଆଳୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁରେ ଏକାଠି କରି ରଖେ, ତେବେ ଏହିପରି ସବୁ ଆଳୁ ଆରମ୍ଭ ବିନ୍ଦୁରେ ଏକାଠି କରି ରଖିବା ପାଇଁ ମୋଟ୍‌ରେ ସେ ଯେଉଁ ଦୂରତା ଦଉଡ଼ିବ, ସେଥିପାଇଁ ଏକ ପରିପ୍ରକାଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଯଦି ଚାଲିଥିବା ମୋଟ୍ ଦୂରତା 162 ମି. ହୁଏ, n ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଯଦି ଏକ ଅନୁକ୍ରମର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି $an^2 + bn$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଅନୁକ୍ରମଟି ଏକ A.P. ରେ ଅଛି । ଏହାର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13.4 ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ [Arithmetic Mean (A.M.)]

ଯେବେ ତିନିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା a, A ଓ b A.P. ରେ ଥା'ନ୍ତି, ତେବେ A କୁ a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ଆମେ ପାଇବା

$$A - a = b - A$$

କିମ୍ବା $A = \dfrac{a+b}{2}$

ଏହିପରି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ (A.M.)= $\dfrac{a+b}{2}$ ଅଟେ । ନିମ୍ନ A.P. ର ବିଚାର କର :

3, 8, 13, 18, 23, 28, 33

ଏଠାରେ, ପ୍ରଥମ ପଦ 3 ଓ ଶେଷ ପଦ 33 ମଧ୍ୟରେ 5 ଟି ପଦ ଅଛି । ଏହି ପଦଗୁଡ଼ିକୁ 3 ଓ 33 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ସମୂହ କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ଏକ A.P. 3, 13, 23, 33 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ 3 ଓ 33 ମଧ୍ୟରେ 13 ଓ 23 ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

ସାଧାରଣତଃ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟରେ, ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ A.M. ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇପାରେ । ମନେକର $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା n ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅଟନ୍ତି । ତେବେ

$a, A_1, A_2, A_3, \ldots A_n, b$ ଏକ ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ ଗଠନ କରନ୍ତି ।

ମନେକର, ଏହି ଶ୍ରେଣୀର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଏଥିରେ (n + 2) ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ଅଛି ।

$\therefore$ b = (n + 2) ତମ ପଦ

$= a + (n + 1)\, d$

$$\Rightarrow d = \frac{b-a}{n+1}$$

ଏବେ, $A_1 = a + d \Rightarrow A_1 = \left(a + \dfrac{b-a}{n+1}\right)$ ...(i)

$$A_2 = a + 2d \Rightarrow A_2 = \left[a + \frac{2(b-a)}{n+1}\right] \quad ...(ii)$$

$$A_n = a + nd \Rightarrow A_n = \left[a + \frac{n(b-a)}{n+1}\right] \quad ...(iii)$$

ଏଗୁଡ଼ିକ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ନିର୍ଣ୍ଣେୟ n ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

(i), (ii), ... (n) କୁ ଯୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots A_n = na + \ldots + \frac{b-a}{n+1}[1+2+\ldots n]$$

$$= na + \left(\frac{b-a}{n+1}\right) - \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= na + \frac{n(b-a)}{2} = \frac{n(a+b)}{2}$$

n [a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ]

ଉଦାହରଣ 13.12 8 ଓ 26 ମଧ୍ୟରେ 5 ଗୋଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କରେ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର, 26 ଓ 8 ମଧ୍ୟରେ 5 ଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ହେଉଛନ୍ତି A_1, A_2, A_3, A_4 ଓ A_5 ।

ଏଥିପାଇଁ $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$, 26 ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ ଗଠନ କରନ୍ତି ଯେଉଁଠି $a = 8, b = 26, n = 7$

ଆମେ ପାଇବା $26 = 8 + (7 - 1)\,d$

$\therefore\ d = 3$

$\therefore\ A_1 = a + d = 8 + 3,\ A_2 = a + 2d = 8 + 2 \times 3 = 14$

$A_3 = a + 3d = 17,\ A_4 = a + 4d = 20$

$A_5 = a + 5d = 23$

ଏଣୁ, 8 ଓ 26 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ 5 ଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ହେଲେ 11, 14, 17, 20 ଓ 23 ।

ଉଦାହରଣ 13.13 20 ଓ 80 ମଧ୍ୟର୍ତ୍ତୀ n ଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଏପରି ଅଟନ୍ତି ଯେ ପ୍ରଥମ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଓ ଅନ୍ତିମ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ 1 : 3 । n ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ A.P. ର (n + 2) ତମ ପଦ 80 ଓ ପ୍ରଥମ ପଦ 20 । ମନେକର ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର d ।

$\therefore\ 80 = 20 + (n + 2 - 1)\,d$

କିମ୍ବା, $80 - 20 = (n + 1)\,d$

କିମ୍ବା, $d = \dfrac{60}{n+1}$

ପ୍ରଥମ $\text{A.M.} = 20 + \frac{60}{n+1} = \frac{20n+20+60}{n+1} = \frac{20n+80}{n+1}$

ଅନ୍ତିମ $\text{A.M} = 20 + n \times \frac{60}{n+1} = \frac{80n+20}{n+1}$

ଆମେ ଜାଣୁ, $\frac{20n+80}{n+1} : \frac{80n+20}{n+1} = 1:3$

କିମ୍ବା, $\frac{n+4}{4n+1} = \frac{1}{3}$

କିମ୍ବା, $4n + 1 = 3n + 12$

କିମ୍ବା, $n = 11$

$\therefore$ 20 ଓ 80 ମଧ୍ୟରେ 11 ଟି A.M. ଅଛି ।

ଉଦାହରଣ 13.14 ଯଦି x, y, z ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଥାନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$(x + 2y - z)(2y + z - x)(z + x - y) = 4xyz$$

ସମାଧାନ : x, y, z ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଅଛନ୍ତି

$\therefore y = \frac{x+z}{2}$ ... (i)

$\therefore$ L.H.S. $= (x + 2y - z)(2y + z - x)(z + x - y)$

$= (x + x + z - z)(x + z + z - x)(2y - y)$ [(i) ରୁ]

$= (2x)(2z)(y) = 4xyz$

= R.H.S

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.3

1. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଯଦି ସମାନ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର ପଦସଂଖ୍ୟା ଅଯୁଗ୍ମ, ତେବେ ମଧ୍ୟ ପଦଟି, ପ୍ରଥମ ଓ ଶେଷ ପଦର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅଟେ ।

2. 7 ଓ 85 ମଧ୍ୟରେ m ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ, ଯେପରିକି $(m - 3)$ ତମ ଓ m ତମପଦ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁପାତ 11 : 24 । m ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ n ସଂଖ୍ୟକ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକର ଯୋଗଫଳ, ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏକମାତ୍ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକର n ଗୁଣ ।

4. ଯଦି ଏକ A.P. ର p ତମ ପଦ ଓ q ତମପଦ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ A.M. ଏବଂ r ତମ ପଦ ଓ s ତମପଦ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ A.M. ସମାନ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $p + q = r + s$

13.5 ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି (Geometric Progression

ଆସ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁକ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକର ବିଚାର କରିବା

1. 1, 2, 4, 8, 16, ...   2. $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots$

3. 1, –3, 9, –27, ...   4. $x, x^2, x^3, x^4, \ldots$

ଯଦି ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ସମସ୍ତ ଅନୁକ୍ରମରେ ଥିବା ପଦର ସଂରଚନାକୁ ଦେଖିବା, ତେବେ ଜାଣିପାରିବା ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ନିଜ ପୂର୍ବପଦ ସହ ବିଶେଷ ଭାବରେ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ।

ଯେପରି ଉଦାହରଣ (1) ରେ, ପ୍ରଥମ ପଦ 1 ଅଟେ । ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ପ୍ରଥମ ପଦର 2 ଗୁଣ, ତୃତୀୟ ପଦ ପ୍ରଥମ ପଦର 2^2 ଗୁଣ ଅଟେ । ପୁନଶ୍ଚ ଉଦାହରଣ 2 ରେ, ପ୍ରଥମ ପଦ 3 ଅଟେ । ଦ୍ୱିତୀୟପଦ ପ୍ରଥମ ପଦର $\frac{1}{3}$ ଗୁଣ ଅଟେ । ତୃତୀୟ ପଦ ପ୍ରଥମ ପଦର $\frac{1}{3^2}$ ଗୁଣ ଅଟେ ।

ଏହିଧର୍ମ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନୁକ୍ରମକୁ **ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି** କୁହାଯାଏ ।

ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଏକ ଅନୁକ୍ରମ, ଯେଉଁଥିରେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ପଦ (୧ମ ପଦ ବ୍ୟତୀତ) ଓ ତା'ର ଠିକ୍ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପଦର ଅନୁପାତ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅଣଶୂନ ସଂଖ୍ୟା (1 ଭିନ୍ନ) ଅଟେ, ଏହାକୁ ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ କୁହାଯାଏ । ସଂକ୍ଷେପରେ GP କୁହାଯାଏ ।

ଏହିପରି, $\frac{\text{2ୟ ପଦ}}{\text{1ମ ପଦ}} = \frac{\text{ତୃତୀୟ ପଦ}}{\text{2ୟ ପଦ}}$ = ... ରାଶିକୁ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତିର ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ (1) ରୁ 4 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଥିବା ଅନୁକ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି ଅଟନ୍ତି, ଯାହାର ପ୍ରଥମ ପଦ ଯଥାକ୍ରମେ 1, 3, 1, x ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ $2, \frac{1}{3}, -3, x$ ଅଟେ । ଯେଉଁ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r, ତା'ର ସାଧାରଣ ରୂପହେଉଛି $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ ।

13.5.1 ସାଧାରଣ ପଦ

ଆସ, ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r ହୋଇଥିବା ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏହାର ପଦ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ :

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$

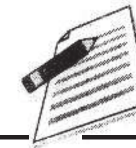
ଏହିପରିସ୍ଥିତିରେ, $t_1 = a = ar^{1-1}$

$t_2 = ar = ar^{2-1}$

$t_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

$t_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, ଆମେ n ତମ ପଦକୁ ନିମ୍ନମତେ ପାଇବା ।



$t_n = ar^{n-1}$ ......(A)

13.5.2 ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତିର କେତେକ ବିଶେଷ ଗୁଣ

(i) ଯଦି କୌଣସି ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର ସମସ୍ତ ପଦକୁ କୌଣସି ଅଣଶୂନ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କରାଯାଏ, ତେବେ ପ୍ରାପ୍ତ ଶ୍ରେଣୀ ମଧ୍ୟ ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ ହେବ । ପ୍ରାପ୍ତ ଶ୍ରେଣୀର ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ମୂଳଶ୍ରେଣୀର ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଯଦି a, b, c, d, ... ଏକ G.P ତେବେ ।

ତେବେ ak, bk, ck, dk, ... ମଧ୍ୟ ଏକ GP ହେବ । [ଯେଉଁଠି $k \neq 0$]

(ii) କୌଣସି GP ର ସମସ୍ତ ପଦର ସମାନ ଘାତ ନିଆଯାଏ ତେବେ, ପରିଣାମୀ ଶ୍ରେଣୀ ଏକ G.P. ସୃଷ୍ଟି କରିବ ।

ମନେକର a, b, c, d ... G.P. ରେ ଅଛି ।

ତେବେ a^k, b^k, c^k, d^k, ... ମଧ୍ୟ G.P. ରେ ରହିବେ $(k \neq 0)$

ମୂଳ ଶ୍ରେଣୀର ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r ହେଲେ, ପରିଣାମୀ ଶ୍ରେଣୀର ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r^k ହେବ ।

ଉଦାହରଣ 13.15 GP : 4, 8, 16, ... ର 6 ଷ୍ଠ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରଥମ ପଦ (a) = 4

ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ (r) = 8 ÷ 4 = 2

ବର୍ତ୍ତମାନ, ସୂତ୍ର $t_n = ar^{n-1}$ କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$t_6 = 4 \times 2^{6-1} = 4 \times 32 = 128$

ଏଣୁ G.P. ର 6 ଷ୍ଠ ପଦ 128 ।

ଉଦାହରଣ 13.16 ଏକ G.P. ର 4 ର୍ଥ ଓ 9 ମ ପଦ ଯଥାକ୍ରମେ 8 ଓ 256 । G.P. ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର G.P. ର ପ୍ରଥମପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r, ତେବେ

$t_4 = ar^{4-1} = ar^3$

$t_9 = ar^{a-1} = ar^8$

ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁଯାୟୀ, $ar^8 = 256$ ...(1)

ଏବଂ $ar^3 = 8$ ... (2)

$$\therefore \frac{ar^8}{ar^3} = \frac{256}{8}$$

କିମ୍ବା, $r^5 = 32 = 2^5$

ପୁନଶ୍ଚ, (2) ରୁ $a \times 2^3 = 8$

$\therefore a = \frac{8}{8} = 1$

ତେଣୁ, G.P. ଟି 1, 2, 4, 8, 16, ...

ଉଦାହରଣ 13.17 G.P. 5, –10, 20, –40, ... ର କେଉଁ ସ୍ଥାନୀୟ ପଦଟି 320 ?

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ, $a = 5;\ r = \frac{-10}{5} = -2$

ମନେକର, 320 ହେଉଛି G.P. ର n ତମ ପଦ ।

ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ, $t_n = ar^{n-1}$

ଆମେ ପାଇବା

$t_n = 5 \times (-2)^{n-1}$

$\therefore 5(-2)^{n-1} = 320$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore (-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6$

$\therefore n - 1 = 6$

$\therefore n = 7$

ଏଣୁ G.P. ର 7 ମ ପଦଟି 320 ।

ଉଦାହରଣ 13.18 ଯଦି a, b, c ଓ d, G.P. ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $(a + b)^2$, $(b + c)^2$ ଓ $(c + d)^2$ ମଧ୍ୟ G.P. ରେ ରହିବ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ, a, b, c ଓ d G.P. ରେ ଅଛନ୍ତି

$\therefore \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$

$\therefore b^2 = ac,\ c^2 = bd,\ ad = bc \qquad \ldots (1)$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $(a + b)^2 (c + d)^2 = [(a + b)(c + d)]^2 = (ac + bc + ad + bd)^2$

$= (b^2 + c^2 + 2bc)^2$ [(1) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ]

$= [(b + c)^2]^2$

$\therefore \frac{(c+d)^2}{(b+c)^2} = \frac{(b+c)^2}{(a+b)^2}$

ଏହିପରି, $(a + b)^2$, $(b + c)^2$, $(c + d)^2$ ମଧ୍ୟ G.P. ରେ ରହିବେ ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.4

1. ଏକ G.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ଓ $-\frac{1}{2}$ । ପ୍ରଥମ ପାଞ୍ଚ ଗୋଟି ପଦ ଲେଖ ।

2. ଏକ G.P. 1, 2, 4, 8, 16 ... ର କେଉଁ ପଦଟି 1024 ? 520 କ'ଣ ଏହି G.P. ର ଏକ ପଦ କି ?

3. ତିନି ଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା G.P. ରେ ଅଛି । ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି 43 ଓ ଗୁଣଫଳ 216 । ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଉପଯୁକ୍ତ କ୍ରମରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ G.P ର n ତମ ପଦ ହେଉଛି 2×3^n, ସମସ୍ତ n ପାଇଁ । ଏହି G.P.ର (a) ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ (b) ପ୍ରଥମପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13.6 ଏକ G.P.ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି (Sum of first n terms of a G.P.)

ମନେକର ଏକ G.P. ପ୍ରଥମ ପଦକୁ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତକୁ r ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଏ । ମନେକର G.P ର ପ୍ରଥମ n ସଂଖ୍ୟକ ପଦର ସମଷ୍ଟି S_n ।

ଏହିପରି, $S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ...(1)

(1) କୁ r ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar_n$ ...(2)

$(1) - (2) \Rightarrow S_n - r\,S_n = a - ar^n$

କିମ୍ବା, $S_n(1 - r) = a\,(1 - r^n)$

$$\therefore S_n = \frac{a(`1-r^n)}{1-r} \qquad ...(A)$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad ...(B)$$

(A) କିମ୍ବା (B), n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମଷ୍ଟି ପ୍ରଦାନ କରେ, ଯେଉଁଠି $r \neq 1$ ।

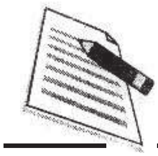
ସୂତ୍ର (A) କୁ ବ୍ୟବହାର କରିବା ସହଜ ଯେଉଁଠି $|r| < 1$ ଓ (B) କୁ ଯେତେବେଳେ $|r| > 1$

ଉଦାହରଣ 13.19 G.P : 1, 3, 9, 27 .... ର 10 ଟି ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ପଦ (a) = 1 ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ $(r) = \frac{3}{1} = 3$

ବର୍ତ୍ତମାନ ସୂତ୍ର $S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$, $(\because r > 1)$ କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା

$$S_{10} = \frac{1\times(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{3^{10}-1}{2}$$



ଉଦାହରଣ 13.20 G.P : $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3}, \ldots 81$ ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = \frac{1}{\sqrt{3}}; r = \sqrt{3}$ ଓ $t_n = l = 81$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $t_n = 81 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^{n-1} = \left(\sqrt{3}\right)^{n-2}$

$\therefore \left(\sqrt{3}\right)^{n-2} = 3^4 = \left(\sqrt{3}\right)^8$

$\therefore n - 2 = 8$

କିମ୍ବା, $n = 10$

$$\therefore S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}^{10} - 1\right]}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10} - 1}{3 - \sqrt{3}}$$

ଉଦାହରଣ 13.21 G.P. : 0·6, 0·06, 0·006, 0·0006, ... ର n ଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $a = 0\cdot 6 = \frac{6}{10}$ ଓ $r = \frac{0\cdot 06}{0\cdot 6} = \frac{1}{10}$

S_n ର ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ $[\because r < 1]$

$$\Rightarrow S_n = \frac{\frac{6}{10}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{6}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

ଏଣୁ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$

ଉଦାହରଣ 13.21 G.P. : 64, 32, 16, ... ର ପ୍ରଥମ କେତେ ଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି $127\frac{1}{2}$?

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ a = 64, $S_n = 127\frac{1}{2} = \frac{255}{2}$ ଏବଂ $S_n = 127\frac{1}{2} = \frac{255}{2}$

S_n ର ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$$\Rightarrow S_n = \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{2} \text{ (ଦତ୍ତ)}$$

କିମ୍ବା, $128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{255}{2}$

କିମ୍ବା, $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{256}$

କିମ୍ବା, $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{255}{256} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

$\therefore n = 8$

ଉଦାହରଣ 13.23 ନିମ୍ନ ଅନୁକ୍ରମର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

2, 22, 222, ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

ସମାଧାନ : ମନେକର ଯୋଗଫଳ S ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ତେବେ

S = 2 + 22 + 222 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

=2 (1 + 11 + 111 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

$= \frac{2}{9}$ (9 + 99 + 999 + ... n ତମ ପଦ)

$= \frac{2}{9}$ {(10 – 1) + (10² –1) + (10³ –1) + ...n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)}

$= \frac{2}{9}$ {(10 + 10² + 10³ + ...n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) – (1 + 1 + 1......n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)}

$= \frac{2}{9}\left\{\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right\}$ [∵ 10 + 10² + 10³ + ... ଏକ G.P ଓ r = 10 > 1]

$= \frac{2}{9}\left[\frac{10^n - 1 - 9n}{9}\right]$

$= \frac{2}{81}\left(10^n - 1 - 9n\right)$

ଉଦାହରଣ 13.24 ଅନୁକ୍ରମ 0·7, 0·77, 0·777... ର n ଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସମଷ୍ଟି S ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ତେବେ

S = 0·7 + 0·77 + 0·777 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

= 7 (0·1 + 0·11 + 0·111 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

$= \frac{7}{9}$ (0·9 + 0·99 + 0·999 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

$= \frac{7}{9}$ {(1– 0·1) + (1 – 0·01) + (1 – 0·001) + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ}

$= \frac{7}{9}$ {(1 + 1 + 1 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ) – (0·1 + 0·01 + 0·001 + ... n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)}

$= \frac{7}{9}\left\{n - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \ldots n \text{ ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ}\right)\right\}$

$= \frac{7}{9}\left\{n - \frac{\frac{1}{10}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)}{1 - \frac{1}{10}}\right\}$ (ଯେହେତୁ r < 1)

$= \frac{7}{9}\left\{n - \frac{1}{9}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)\right\}$

$$=\frac{7}{9}\left[\frac{9n-1+10^{-n}}{9}\right]$$

$$=\frac{7}{81}\,[9n-1+10^{-n}]$$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.5

1. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ G.P. ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) 6, 12, 24, ... 10 ମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

   (b) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots 20$ ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ

2. ଏକ G.P. 8, 16, 32, 64, ... ର କେତୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି 8184 ହେବ ?

3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, G.P. $a + b + \ldots + l$ ର ସମଷ୍ଟି $\frac{bl-a^2}{b-a}$

4. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନୁକ୍ରମର n ତମ ପଦ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) 8, 88, 888, ... (b) 0·2, 0·22, 0·222, ...

13.7 ଅସୀମ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି (Infinite Geometric Progression)

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆମେ G.P. ର ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦମାନଙ୍କର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଶିଖିଛନ୍ତି । ଏବେ ଆମେ G.P. ର ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦମାନଙ୍କର ଯୋଗ ଜାଣିବା । ନିମ୍ନସ୍ଥ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ G.P. ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

G.P. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16,} \ldots$

ଏହାକୁ ଆମେ ଏହିପରି କରିବା : ଏଠାରେ $a = 1, r = \frac{1}{2}$

G.P. ର n ତମ ପଦ $t_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ ଓ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି S_n

ଅର୍ଥାତ୍ $S_n = \dfrac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

$$= 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$$

ଏଣୁ n ର ମାନ ଯେତେ ବଡ଼ ହେଲେ ବି, n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି କେବେ 2 ରୁ ଅଧିକ ହେବନାହିଁ ।

ଏଣୁ, ଆମେ ଯଦି ଅସଂଖ୍ୟ ପଦର ଯୋଗ କରନ୍ତି, ତେବେ ବି ଆମେ 2 ରୁ ଅଧିକ ଉତ୍ତର ପାଇବା ନାହିଁ ।

ଏହା ମଧ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ପୌନଃପୌନିକ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା $0{\cdot}\bar{3}$ ବାସ୍ତବରେ $0{\cdot}3 + 0{\cdot}03 + 0{\cdot}003 + 0{\cdot}0003 + \ldots$ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍, ଉପରୋକ୍ତ ଅସୀମ ଅନୁକ୍ରମର ଯୋଗ ବାସ୍ତବରେ $\frac{1}{3}$ ଅଟେ ।

ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ, ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଆମେ G.P. 1, 2, 4, 8, 16 ... ର ଅସଂଖ୍ୟ ପଦର ଯୋଗ କଲେ ଏକ ସସୀମ ସମଷ୍ଟି ପାଇବା ।

ଏଣୁ, କେବେକେବେ ଆମେ ଏକ G.P ର ଅସଂଖ୍ୟ ପଦର ଯୋଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ଓ କେବେକେବେ ନୁହେଁ । ଆମେ ଏବେ ଏହି ପ୍ରଶ୍ନ ଉପରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

13.7.1. ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀର ଅସଂଖ୍ୟ ପଦର ସମଷ୍ଟି ।

ଆସ ଅସଂଖ୍ୟ ପଦ ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ G.P. ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା :

ସ୍ଥିତି 1 : ମନେକର ଯେ $|r| > 1$

ତେବେ, G.P. ର n ଟି ପଦର ଯୋଗଫଳର ପରିପ୍ରକାଶ ହେବ :

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{ar^n}{r-1} - \frac{a}{r-1} \qquad \ldots (A)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ଯଦି n ର ମାନ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ବଢ଼େ, ତେବେ r^n ର ମାନ ମଧ୍ୟ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ହୁଏ । ଏହିପରି ଯଦି n ଅନନ୍ତ ରୂପରେ ବଡ଼ ହୁଏ ଓ $|r| > 1$ ତେବେ ଅସଂଖ୍ୟ ପଦର ଯୋଗ ମଧ୍ୟ ଅନନ୍ତ ରୂପରେ ବଡ଼ ହେବ, ଯାହାର ଗଣିତରେ କୌଣସି ଗୁରୁତ୍ୱ ନାହିଁ । ଏବେ ଆମେ ଅନ୍ୟ ସମ୍ଭାବନାର ବିଚାର କରିବା ।

ସ୍ଥିତି 2 : ମନେକର $|r| < 1$

ସୂତ୍ର (A) ନିମ୍ନପରି ଲେଖାଯାଇପାରେ ।

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

ଏବେ, ଯଦି n ର ମାନ ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ହୁଏ, ତେବେ r^n ର ମାନ ଛୋଟରୁ ଛୋଟ ହୋଇଯିବ; ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $n \to \infty$, $r^n \to 0$, ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଟି ହୋଇଯିବ

$$S = \frac{a}{1-r}$$

ଏଣୁ, ଏକ ଅସୀମ ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ ଯାହାର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r ଅଟେ, ତା'ର ଯୋଗର ସୂତ୍ର

$S = \frac{a}{1-r}$, ଯେବେ $|r| < 1$ ହୋଇଥାଏ । ... (i)

ଉଦାହରଣ 13.25 ଅସୀମ G.P : $\frac{1}{3}, -\frac{2}{9}, \frac{4}{27}, -\frac{8}{81}, \ldots$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଅସୀମ G.P ର ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{1}{3}$, ଓ $r = \frac{-\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3}$

ଏଠାରେ $|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$

$\therefore$ ଅସୀମ ପଦର ଯୋଗର ସୂତ୍ର $S = \frac{a}{1-r}$ ର ବ୍ୟବହାର କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

ଏଣୁ, ଦତ୍ତ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ G.P ର ସମଷ୍ଟି $\frac{1}{5}$ ।

ଉଦାହରଣ 13.26 ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ସଖ୍ୟା $0.\bar{3}$ କୁ ଅସୀମ G.P. ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ଏବଂ ଏହାର ମୂଲ୍ୟ ପରିମେୟ ରୂପରେ ଲେଖ ।

ସମାଧାନ : $0\cdot\bar{3} = 0\cdot3333333\ldots$

$= 0\cdot3 + 0\cdot03 + 0\cdot003 + 0\cdot0003 + \ldots$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

ଉପରୋକ୍ତ ଅସୀମ G.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ $a = \frac{3}{10}$ ଓ $r = \frac{\frac{3}{10^2}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} < 1$

ଏଣୁ, ସୂତ୍ର $S = \frac{a}{1-r}$ ବ୍ୟବହାର କଲେ ଆମେ ପାଇବା

$$0\cdot\bar{3} = \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}}$$

$$= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

ଏଣୁ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା $0\cdot\bar{3} = \frac{1}{3}$ ।

ଉଦାହରଣ 13.27 ଏକ ସରଳ ଦୋଳକ (Simple pendulum) ଗୋଟିକ ପରେ ଗୋଟିଏ କ୍ରମିକ ସେକେଣ୍ଡରେ ଅତିକ୍ରମ କରୁଥିବା ଦୂରତା (ସେ.ମି.ରେ) ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 16, 12, 9, ... ।

ସ୍ଥିର ହେବାପୂର୍ବରୁ ଏହା କେତେ ଦୂରତା ଅତିକ୍ରମ କରିବ ?

ସମାଧାନ : କ୍ରମିକ ସେକେଣ୍ଡରେ ସରଳ ଦୋଳକ ଦ୍ୱାରା ଅତିକ୍ରାନ୍ତ ଦୂରତା ହେଲା 16, 12, 9, ... । ଏହା ଏକ ଅସୀମ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି ଯାହାର ପ୍ରଥମ ପଦ $a = 16$ ଓ $r = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} < 1$

ଏଣୁ, ସୂତ୍ର $S = \frac{a}{1-r}$ ବ୍ୟବହାର କଲେ, ପାଇବା

$$S = \frac{16}{1-\frac{3}{4}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$$

ଦୋଳକ ଦ୍ୱାରା ଅତିକ୍ରାନ୍ତ ଦୂରତା 64 ସେ.ମି. ହେବ

ଉଦାହରଣ 13.28 ଏକ ଅସୀମ G.P. ର ସମଷ୍ଟି 3 । ଏହାର ପ୍ରଥମ ଦୁଇଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି $\frac{8}{3}$ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ପଦ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏହି ପ୍ରଶ୍ନରେ, $S = 3$ । ମନେକର G.P. ର ପ୍ରଥମ ପଦ a ଓ ସାଧାରଣ ଅନ୍ତର r ।

ତେବେ ପ୍ରଶ୍ନ ଅନୁସାରେ,

$$a + ar = \frac{8}{3}$$

କିମ୍ବା, $3a(1 + r) = 8 \quad ...(1)$

$S = \frac{a}{1-r}$ ରୁ, ଆମେ ପାଇବା

$$3 = \frac{a}{1-r}$$

କିମ୍ବା, $a = 3(1 - r) \quad ... (2)$

(1) ଓ (2) ରୁ, ଆମେ ପାଇବା

$$3 \times 3(1 - r)(1 + r) = 8$$

କିମ୍ବା, $1 - r^2 = \frac{8}{9}$

କିମ୍ବା, $r^2 = \frac{1}{9}$

କିମ୍ବା, $r = \pm\frac{1}{3}$

(2) ରୁ, $a = 3\left(1 \pm \frac{1}{3}\right) = 2$ ବା 4, $r = \pm\frac{1}{3}$ ଅନୁସାରେ

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.6

1. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସୀମ G.P. ର ସମଷ୍ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\infty$ (b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \ldots\infty$

2. ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅସୀମ G.P ରେ ପ୍ରକାଶ କର । ଏହାର ମାନକୁ ପରିମେୟ ରୂପରେ ଲେଖ ।

   (a) $0\cdot\overline{7}$ (b) $0\cdot 3\overline{15}$

3. ଏକ ଅସୀମ G.P ର ସମଷ୍ଟି 15 ଓ ପଦମାନଙ୍କର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 45 । G.P ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଏକ ଅସୀମ G.P ର ସମଷ୍ଟି $\frac{1}{3}$ ଓ ପ୍ରଥମ ପଦ $\frac{1}{4}$ । G.P ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

13.8 ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ (Geometric Mean)

ଯଦି a, G, b ଏକ G.P. ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ G କୁ a ଓ b ର ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି ତିନିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା ଏକ G.P. ରେ ଥାଏ, ମଧ୍ୟ ପଦଟିକୁ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟିର ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି $a, G_1, G_2, \ldots G_n, b$ ଏକ G.P. ରେ ଥା'ନ୍ତି ।

ତେବେ, $G_1, G_2, \ldots G_n$ କୁ a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ n ସଂଖ୍ୟକ G.M. କୁହାଯାଏ ।

n ଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ, ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳର n ତମ ମୂଳ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ ହୁଏ ।

ଏହିପରି, ଯଦି $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n ଟି ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର G.M.

$= (a_1 \times a_2 \times \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$

ମନେକର a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ G, ତେବେ a, G, b, G.P. ରେ ରହନ୍ତି ।

ଏଣୁ, $\frac{G}{a} = \frac{b}{G}$

କିମ୍ବା, $G^2 = ab$

କିମ୍ବା, $G = \sqrt{ab}$

$\therefore$ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ $= \sqrt{\text{ପ୍ରାନ୍ତପଦ ମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ}}$

ଯଦି କୌଣସି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ଦତ୍ତ ଥାଏ, ତେବେ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଇପାରିବ ।

ମନେକର, a ଓ b ମଧ୍ୟରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଅଛି ।

ପୁନଶ୍ଚ, ମନେକର, $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ହେଉଛନ୍ତି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା n ସଂଖ୍ୟକ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

ତେବେ $a, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, b$ ଏକ G.P.

ଏଣୁ, b ହେଉଛି $(n + 2)$ ତମ ପଦ, ଫଳରେ ଆମେ ପାଇବା

$$b = ar^{n+1}$$

କିମ୍ବା, $r^{n+1} = \dfrac{b}{a}$

କିମ୍ବା, $r = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

ଏଣୁ, $a_1 = ar = a \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$

$$a_2 = ar^2 = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

....

....

$$a_n = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ପୁନଶ୍ଚ ଆମେ ଦର୍ଶାଇପାରିବା ଯେ ଏହି n ଗୋଟି G.M. ର ଗୁଣଫଳ, a ଓ b ର ଏକ ମାତ୍ର ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକର n ତମ ଘାତ ସହ ସମାନ ।

$a_1, a_2, \ldots a_n$ କୁ ଗୁଣିଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$$a_1, a_2, \ldots a_n = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} + \ldots \frac{n}{n+1}}$$

$$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1+2+\ldots+n}{n+1}}$$

$$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}}$$

$$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= (ab)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{ab}\right)^n = G^n$$

(a ଓ b ର ଏକମାତ୍ର G.M)^n

ଉଦାହରଣ 13.29 $\frac{3}{2}$ ଓ $\frac{27}{2}$ ମଧ୍ୟରେ G.M ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯଦି G, a ଓ b ମଧ୍ୟରେ G.M ହୁଏ, ତେବେ $G = \sqrt{ab}$

$\therefore \frac{3}{2}$ ଓ $\frac{27}{2}$ ମଧ୍ୟରେ $G.M = \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{27}{2}} = \frac{9}{2}$

ଉଦାହରଣ 13.30 1 ଓ 256 ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର G_1, G_2, G_3, 1 ଓ 256 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ତିନିଗୋଟି ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ।

ତେବେ, 1, G_1, G_2, G_3, 256 G.P. ରେ ଅଛନ୍ତି ।

ଯଦି r ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ ହୁଏ, ତେବେ $t_5 = ar^4$; ମାତ୍ର $t_5 = 256$

$\therefore\ ar^4 = 256 \Rightarrow 1 \cdot r^4 = 256$

କିମ୍ବା, $r^2 = 16$

କିମ୍ବା, $r = \pm 4$

ଯେତେବେଳେ $r = 4$, $G_1 = 1.(4) = 4$, $G_2, = 1 \cdot (4)^2 = 16$ ଓ $G_3 = 1 \cdot (4)^3 = 64$

ଯେତେବେଳେ $r = -4$ $G_1 = 1 \cdot (-4) = -4$, $G_2 = 1 \cdot (-4)^2 = 16$ ଓ $G^3 = 1 \cdot (-4)^3 = -64$

ଉଦାହରଣ 13.31 ଯଦି 4, 36, 324, G.P. ରେ ଥାଆନ୍ତି,

ଏହି ଅନୁକ୍ରମରେ ଦୁଇଟି ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟା ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କର ଯେପରିକି ଏହାପୁଣି ଏକ G.P ଗଠନ କରିବେ ।

ସମାଧାନ : 4 ଓ 36 ମଧ୍ୟରେ, $G.M = \sqrt{4 \times 36} = \sqrt{144} = 12$

36 ଓ 324 ମଧ୍ୟରେ, $G.M. = \sqrt{36 \times 324} = 6 \times 18 = 108$

ଯଦି ଆମେ 4 ଓ 36 ମଧ୍ୟରେ 12 ଏବଂ 36 ଓ 324 ମଧ୍ୟରେ 108 ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କରିବା, ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 4, 12, 36, 108, 324 ହେବେ ଯାହା ଏକ G.P. ।

∴ ଅନ୍ତର୍ନିବେଶ କରାଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ 12 ଓ 108 ।

ଉଦାହରଣ 13.32 n ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି a ଓ b ର ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଯଦି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ x ହୁଏ, ତେବେ

$$x = a^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$$

କିମ୍ବା, $a^{n+1}+b^{n+1} = \left(a^{\frac{1}{1}} \cdot b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^n+b^n\right)$

କିମ୍ବା, $a^{n+1}+b^{n+1} = a^{n+\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{n+\frac{1}{2}}$

କିମ୍ବା, $a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+1}$

କିମ୍ବା, $a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$

କିମ୍ବା, $a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$

କିମ୍ବା, $\frac{a^{n+\frac{1}{2}}}{b^{n+\frac{1}{2}}} = 1$

କିମ୍ବା, $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$

$\therefore n + \frac{1}{2} = 0$ କିମ୍ବା $n = \frac{-1}{2}$

13.8.1 A.M. ଓ G.M ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ : ମନେକର a ଓ b ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା

ମନେକର, a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ G ।

$$\therefore A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$$

$$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 > 0$$

$$\therefore A > G$$

ଉଦାହରଣ 13.33 ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ 34 ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ 16 । ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ a ଓ b ।

ଯେହେତୁ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ AM 34

$\therefore \frac{a+b}{2} = 34$ କିମ୍ବା $a + b = 68$ .....(1)

ଯେହେତୁ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ G.M = 16

$\therefore \sqrt{ab} = 16$ କିମ୍ବା $ab = 256$

ଆମେ ଜାଣୁ, $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$

$= 68^2 - 4 \times 256$ ...[(2 ଅନୁଯାୟୀ)]

$= 4624 - 1024 = 3600$

$\therefore a - b = \sqrt{3600} = 60$ ...(3)

(1) ଓ (3) କୁ ଯୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$2a = 128$

$\therefore a = 64$

(3) କୁ (1) ରୁ ବିୟୋଗ କଲେ, ପାଇବା

$2b = 8$ କିମ୍ବା, $b = 4$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ 64 ଓ 4 ।

ଉଦାହରଣ 13.34 ଦୁଇଟି ରାଶି b ଓ c ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ a ଏବଂ ଏହି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ହେଉଛନ୍ତି g_1 ଓ g_2 ।

ପ୍ରମାଣ କର $g_1^3 + g_2^3 = 2\,abc$

ସମାଧାନ : b ଓ c ମଧ୍ୟରେ A.M. ହେଉଛି a ।

$$\therefore \frac{b+c}{2} = a, \text{ କିମ୍ବା, } b + c = 2a$$

ପୁନଶ୍ଚ g_1 ଓ g_2 ହେଉଛନ୍ତି b ଓ c ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଟି G.M. ।

$\therefore$ b, g_1, g_2, c, G.P. ରେ ଅଛନ୍ତି ।

ଯଦି ସାଧାରଣ ଅନୁପାତ r ହୁଏ, ତେବେ

$$c = br^3 \text{ କିମ୍ବା, } r = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$g_1 = br = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{ଏବଂ } g_2 = br^2 = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore g_1^3 + g_2^3 = b^3\left[\left(\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]$$

$$= b^3 \times \frac{c}{b}\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$= b^2c \times \left(\frac{b+c}{b}\right)$$

= bc 2a [ଯେହେତୁ b + c = 2a]

= 2 abc

ଉଦାହରଣ 13.35 ଯଦି ଦୁଇଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରେ ଏକ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ G ଓ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ p ଓ q ନିଆଯା'ନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$G^2 = (2p - q)\,(2q - p)$$

ସମାଧାନ : ମନେକର ଦୁଇଟି ରାଶି a ଓ b । ତେବେ

$$G = \sqrt{ab}\ G^2 = ab \qquad ...(i)$$

ଆହୁରି ମଧ୍ୟ a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଦୁଇଟି A.M. ହେଉଛନ୍ତି p ଓ q ।

$\therefore$ a, p, q, b A.P. ରେ ଅଛନ୍ତି ।

$p - a = q - p$ ଏବଂ $q - p = b - q$

$\therefore a = 2p - q$ ଓ $b = 2q - p$

$\therefore G^2 = ab = (2p - q)(2q - p)$

ଉଦାହରଣ 13.36 ଏକ G.P.ର ପ୍ରଥମ ତିନିଗୋଟି ପଦର ଗୁଣଫଳ 1000 । ଯଦି ଆମେ ଉକ୍ତ G.P. ର ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ ସହ 6 ଓ ତୃତୀୟ ପଦ ସହ 7 ଯୋଗ କରନ୍ତି, ତେବେ ଏହି ତିନି ପଦ ଏକ A.P. ଗଠନ କରନ୍ତି । G.P. ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $t_1 = \frac{a}{r}, t_2 = a$ ଓ $t_3 = ar$ ହେଉଛନ୍ତି ସମ୍ପୃକ୍ତ G.P. ର ପ୍ରଥମ ତିନିଗୋଟି ପଦ ।

ତେବେ, ଏମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $= \frac{a}{r} \cdot a \cdot ar = 1000$, କିମ୍ବା $a^3 = 1000$, କିମ୍ବା $a = 10$

ପ୍ରଶ୍ନଦ୍ୱାରା, $t_1, t_2 + 6, t_3 + 7$, A.P. ରେ ଅଛନ୍ତି । ... (1)

ଅର୍ଥାତ୍, $\frac{a}{r}, a + 6, ar + 7$, A.P ରେ ଅଛନ୍ତି ।

$$\therefore (a+6) - \frac{a}{r} = (ar+7) - (a+6)$$

କିମ୍ବା, $2(a+6) = \frac{a}{r} + (ar+7)$

କିମ୍ବା, $2(10+6) = \frac{10}{r} + (10r+7)$ [(1) କୁ ବ୍ୟବହାର କଲେ]

କିମ୍ବା, $32r = 10 + 10r^2 + 7r$

କିମ୍ବା, $10r^2 - 25r + 10 = 0$

$$\therefore r = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 400}}{20} = \frac{25 \pm 15}{20} = 2 \text{ ଅଥବା } \frac{1}{2}$$

ଯେତେବେଳେ $a = 10, r = 2$, ସେତେବେଳେ ପଦଗୁଡ଼ିକ $\frac{10}{2}, 10, 10(2)$ ଅର୍ଥାତ୍, 5, 10, 20

ଯେତେବେଳେ $a = 10,\ r = \frac{1}{2}$, ସେତେବେଳେ ପଦଗୁଡ଼ିକ 10 (2), 10, $10\left(\frac{1}{2}\right)$ ଅର୍ଥାତ୍, 20, 10, 5

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.7

1. 8 ଓ $\frac{1}{64}$ ମଧ୍ୟରେ 8 ଟି G.M. ସ୍ଥାପନ କର ।

2. ଯଦି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଥିବା n ସଂଖ୍ୟକ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ହୁଏ a_1, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a_1^{n+1} = a^n b$

3. ଯଦି a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ G ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{1}{G^2 - a^2} + \frac{1}{G^2 - b^2} = \frac{1}{G^2}$

4. ଯଦି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟସ୍ଥ ସମାନ୍ତର ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକର ଅନୁପାତ m : n ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ $m + \sqrt{m^2 - n^2} : m - \sqrt{m^2 - n^2}$ ଅନୁପାତରେ ରହିବେ ।

5. ଯଦି ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଓ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ G ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $A > G$

6. ଏକ G.P ର ପ୍ରଥମ ତିନିଗୋଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି $\frac{13}{12}$ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ –1 । G.P ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଏକ G.P ର ତିନିଗୋଟି ପଦର ଗୁଣଫଳ 512 । ଯଦି ପ୍ରଥମ ସହ 8 ଓ 2ୟ ସହ 6 ଯୋଗ କରାଯାଏ, ତେବେ, ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ A.P. ଗଠନ କରନ୍ତି । ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମ a, a + d, a + 2d, ... ର ସାଧାରଣ ପଦ ହେଉଛି $t_n = a + (n - 1)\,d$ ।
- A.P. a, a + d, a + 2d, ... ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ

  $$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

  $$= \frac{n}{2}(a + l), \text{ ଯେଉଁଠି } l = a + (n - 1)\,d$$

- ଏକ ଅନୁକ୍ରମ, ଯାହାର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପଦର ଅନ୍ତର ସର୍ବଦା ଏକ ଧ୍ରୁବକ ($\neq 0$), ତାକୁ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତି କୁହାଯାଏ ।
- $t_n = S_n - S_{n-1}$

- $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$
- a ଓ b ର ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ ହେଉଛି $\frac{a+b}{2}$ ।
- ଏକ ଅନୁକ୍ରମ, ଯାହାର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପଦର ଅନୁପାତ ସର୍ବଦା ଏକ ଧ୍ରୁବକ ($\neq 1$), ତାହାକୁ ଗୁଣୋତ୍ତର ଶ୍ରେଣୀ କୁହାଯାଏ ।
- G.P. a, ar, ar^2,... ର n ତମ ପଦ ହେଉଛି ar^{n-1} ।
- G.P. a, ar, ar^2, ... ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ

  $S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}, |r|>1$ ପାଇଁ

  $=\frac{a(1-r^n)}{1-r}, |r|<1$ ପାଇଁ
- G.P. a, ar, ar^2,... ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅସଂଖ୍ୟ ପଦ ର ଯୋଗ $S=\frac{a}{1-r}, |r|<1$ ପାଇଁ ।
- ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ $\sqrt{ab}$ ।
- ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସମାନ୍ତର ମଧ୍ୟକ A ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଗୁଣୋତ୍ତର ମଧ୍ୟକ G ଠାରୁ ସର୍ବଦା ବଡ଼ ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ $A>G$ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍ ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. 100 ଓ 200 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ 7 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିର ପ୍ରଥମ nଟି ପଦର ଯୋଗଫଳର ଅନୁପାତ $(2n-1):(2n+1)$ । ଏମାନଙ୍କର 10ମ ପଦଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
3. ଯଦି a, b, c ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $b+c, c+a, a+b$ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ରହିବେ ।

4. ଯଦି $a_1, a_2, ..., a_n$ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+...+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n}$$

5. ଯଦି $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$ ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମରେ ରହିବେ ।

6. ଯଦି ଏକ ସମାନ୍ତର ଅନୁକ୍ରମର p ତମ, qତମ ଓ r ତମ ପଦ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q, R ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$P(Q-R)+Q(R-P)+R(P-Q)=0$$

7. ଯଦି a, b, c, G.P ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$

8. ଯଦି a, b, c, d ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତିରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣୋତ୍ତର ପ୍ରଗତି ଅଟେ ।

(a) $(a^2-b^2), (b^2-c^2), (c^2-d^2)$

(b) $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2-d^2}$

9. ଯଦି ଏକ G.P. ର pତମ, qତମ ଓ r ତମ ପଦ ଯଥାକ୍ରମେ x, y, z ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $x^{q-r}\, y^{r-p} \cdot z^{p-q}=1$

10. ଯଦି a, b, c, A.P ରେ ଥାଆନ୍ତି ଓ x, y, z G.P ରେ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$x^{b-c}\, y^{c-a} z^{a-b}=1$$

11. ଯଦି ଏକ G.P. ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ସମଷ୍ଟି S_n ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2$$

12. ଯଦି p, q, r, A.P. ରେ ଥା'ନ୍ତି, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଏକ G.P ର pତମ, qତମ ଓ r ତମ ପଦ ମଧ୍ୟ G.P. ରେ ରହିବେ ।

13. ଯଦି $S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}$ ହୁଏ, ତେବେ n ର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯେପରିକି $2-S_n<\frac{1}{100}$

14. ଯଦି ଏକ G.P. ର ପ୍ରଥମ n ଟି ପଦର ଯୋଗଫଳ S, ସେହି ପଦମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ p ଏବଂ ଏମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ଯୋଗଫଳ R ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$p^2=\left(\frac{S}{R}\right)^n$$

ଉତ୍ତର ମାଳା

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.1

1. (a) 2n – 1 (b) 2n + 1
2. 3, 5, 7, 9 ... 3. 20, 16
4. ନାଁ 5. m + n 6. 10, 6, 2, ...

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.2

1. (a) 435 (b) $\frac{n}{2}\left[21-5n^2\right]$
2. 5 3. 12
4. 37 5. $n^2 + 9n$, 9
6. 2a

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.3

2. 5

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.4

1. $3,-\frac{3}{2},\frac{3}{4},-\frac{3}{8},\frac{3}{16}$
2. 11 ତମ, ନାଁ
3. 36, 6, 1 କିମ୍ବା, 1, 6, 36 4.(a) 6 (b) 3

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.5

1.(a) 6138 (b) $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$

2. 10

4.(a) $\frac{80}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{8n}{9}$ (b) $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.6

1. (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{13}{24}$

2. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{52}{165}$

3. $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \ldots\infty$

4. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots\infty$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 13.7

1. $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

6. $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ କିମ୍ବା, $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$

7. 4, 8, 16

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. 2017

2. 37 : 39