୧

ସମ୍ମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା

Complex Number

ଆମେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକରୁ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିର ଅଧ୍ୟୟନ ଆରମ୍ଭ କଲେ । ପରେ ଶୂନ୍ୟ (zero) ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହୋଇ ସାମଗ୍ରିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଗଠନ ହେଲା ଏବଂ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅବସ୍ଥାରେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଗଲା । ଏହିପରି ଭାବରେ, ଆମ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାକୁ ସଂପ୍ରସାରିତ ହେଲା ।

$p \div q$ ପରି ସମସ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ, ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିରେ ଅର୍ନ୍ତଭୁକ୍ତ କଲେ । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି ପରେ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ପରିକଳ୍ପନା କରାଗଲା କାରଣ ସମସ୍ତ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପରିମାପ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେଲା ନାହିଁ । ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକତ୍ର ନେଇ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଗଢ଼ାଗଲା । କିନ୍ତୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍, ସମସ୍ତ ପ୍ରକାରର ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ ପାଇଁ ପର୍ଯ୍ୟାପ୍ତ ହେଲା ନାହିଁ । ସେ ଭଳି କୌଣସି କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ଯାହା $x^2 + 1 = 0$ ବା $x^2 = -1$ ଭଳି ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିପାରିବ । ଏହି ପରି ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଅର୍ଥାତ୍ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କର ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ, ଆମେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ନୂଆ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତିକୁ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କଲୁ, ଯାହାକୁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି କୁହାଗଲା । ଏହି ପାଠରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା, ସେଗୁଡିକର ନିରୂପଣ ତଥା ଏହା ଉପରେ ବୀଜଗାଣିତିକ ସଂକ୍ରିୟା ବିଷୟରେ ଅବଗତ ହେବ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅଧ୍ୟୟନ ପରେ ତୁମେ :

- ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌କୁ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କରିବାର ଆବଶ୍ୟକତାକୁ ବର୍ଣ୍ଣନା କରିପାରିବ;
- ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟାର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ ଓ ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ;
- ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟାର କାଳ୍ପନିକ ଓ ବାସ୍ତବ ଅଂଶକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସମାନତାର ସର୍ତ୍ତ କହିପାରିବ;
- ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ଥିବା କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ $p(x, y)$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $x + iy$ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା $x + iy$ ପାଇଁ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ଏକ ଅନନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ଚିହ୍ନଟ କରିପାରିବ;
- ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବ ଓ ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;
- ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ଓ ଆରଗୁମେଣ୍ଟକୁ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରିପାରିବା ସହ ଏହାକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ;

ମଡ୍ୟୁଲ-I
ବୀଜଗଣିତ

ଟିପ୍ପଣୀ

- ଏକ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟାକୁ ଧ୍ରୁବୀୟ (Polar) ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବ;
- ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ଯୋଗ, ବିୟୋଗ ଗୁଣନ ଓ ହରଣ) କରିପାରିବ;
- ବୀଜଗାଣିତିକ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ (ସଂବୃତ୍ତି, କ୍ରମବିନିମୟୀ, ସହଯୋଗୀ, ବିଲୋମୀ, ଅଭେଦ ଓ ବଣ୍ଟନ)ଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ତଥା ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ;
- ସମସ୍ୟା ସମାଧାନରେ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କର ନିମ୍ନ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟାଖ୍ୟା ଓ ବ୍ୟବହାର କରିପାରିବ ।

(i) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ଏବଂ $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

(ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(iii) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

(iv) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

(v) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)$

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ବ୍ୟବସ୍ଥା, କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିର ଧାରଣା ।
- ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଧର୍ମ
- ଏକଘାତୀ ତଥା ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ
- ସଂଖ୍ୟା ରେଖାରେ ଏକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାର ଉପସ୍ଥାପନ
- ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଉପସ୍ଥାପନ

$|\bar{z}|$

1.1 ସମଶ୍ରି ସଂଖ୍ୟା (Complex numbers)

ସମୀକରଣ $x^2 + 1 = 0$ ...(A) କୁ ବିଚାର କରାଯାଉ ।

ଏହିପରି ଲେଖାଯାଇପାରେ $x^2 = -1$

କିମ୍ବା, $x = \pm\sqrt{-1}$

କିନ୍ତୁ ଏଭଳି କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ଯାହା $x^2 = -1$ କୁ ସିଦ୍ଧ କରିପାରିବ । ଅନ୍ୟକଥାରେ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ଏଭଳି କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ ଯାହାର ବର୍ଗ –1 ହେବ । ଏହିପରି ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆସନ୍ତୁ କଳ୍ପନା କରିବା ‘i’ ଏଭଳି ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $\sqrt{-1}$ ସହ ସମାନ ।

1768 ମସିହାରେ L.Eulor ନାମକ ଜଣେ ମହାନ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ ସଂଖ୍ୟା ‘i’ କୁ ଆୟୋଟା (Iota) ନାମ ଦେଲେ ଯାହାର ବର୍ଗ –1 ଅଟେ । ଏହି ‘i’ (Iota) କୁ କାଳ୍ପନିକ ଏକକ ଭାବରେ ବ୍ୟାଖ୍ୟା କରାଯାଏ । ଏହି ନୂଆ ଚିହ୍ନ (i) କୁ ନେଇ ଆମ୍ଭେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାମାଙ୍କର ବର୍ଗ ମୂଳକୁ ଏକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଓ i ର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା ।

ଅତଏବ ସମୀକରଣ A କୁ ଲେଖିପାରିବା

$x = \pm i$

ସେହିପରି $-4 = 4\,(-1)$

$\therefore \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{i^2 \cdot 2^2} = 2i$

ପାରମ୍ପରିକ ଭାବେ ଏହାକୁ 2i ରୂପରେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଏହିପରି ଆମେ ପାଇବା $\sqrt{-4} = 2i, \ \sqrt{-7} = \sqrt{7}\, i$

$\sqrt{-4}, \sqrt{-7}$ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଉଦାହରଣ ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣକୁ ବିଚାର କର ।

$x^2 - 6x + 13 = 0$

ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ ।

$(x - 3)^2 + 4 = 0$

କିମ୍ବା, $(x - 3)^2 = -4$

କିମ୍ବ. $x - 3 = \pm 2i$

କିମ୍ବା, $x = 3 \pm 2i$

ଆମେ x + yi ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବା ଯେଉଁଠି x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $i = \sqrt{-1}$ ।

> ଯେଉଁ ସଂଖ୍ୟାକୁ a + bi ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ, ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $i = \sqrt{-1}$, ତାହାକୁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା କହନ୍ତି ।

ସାଧାରଣତଃ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ z ଅକ୍ଷର ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ z = a + bi, 'a' କୁ z ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ କୁହାଯାଏ ଓ Re(a + bi) ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ଏବଂ 'b' କୁ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ଓ Imag (a + bi) ଭାବରେ ସୂଚାଯାଏ ।

ଯଦି a = 0 ଏବଂ $b \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଟି bi ହୁଏ ଯାହାକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାଳ୍ପନିକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା କହନ୍ତି ।

$-7i, \frac{1}{2} i, \sqrt{3} i$ ଏବଂ πi ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାଳ୍ପନିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ।

ଯଦି $a \neq 0$ ଏବଂ b = 0, ତେବେ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଟି a ହୁଏ ଯାହା ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

5, 2.5 ଏବଂ $\sqrt{7}$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଉଦାହରଣ ।

ଯଦି a = 0 ଏବଂ b = 0 ହୁଏ, ତେବେ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଟି 0(zero) ହୁଏ । ତେଣୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ବିଶେଷ ଅବସ୍ଥା ।

ଉଦାହରଣ 1.1 **'i'** ର ଉପଯୋଗ କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସରଳ କର ।

(i) $\sqrt{-36}$ (ii) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{-4}$

ସମାଧାନ : (i) $\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6i$ (ii) $\sqrt{25} \cdot \sqrt{-4} = 5 \times 2i = 10i$

1.2 i ର ଧନାତ୍ମକ ସମାକଳ ଘାତ

ଆମେ ଜାଣୁ

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

$i^5 = (i^2)^2 . i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1$

$i^7 = (i^2)^3 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^8 = (i^2)^4 = (-1)^4 = 1$

ଏହିପରି ଆମେ i ର ଯେକୌଣସି ଉଚ୍ଚତର ଘାତକୁ i, –1, –i, 1 ମୂଲ୍ୟ ଚାରୋଟି ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ ।

ଯଦି n ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା, ଯେପରିକି $n > 4$ ହୁଏ ତେବେ i^n ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ n କୁ ପ୍ରଥମେ 4 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ।

ମନେକର m ଭାଗଫଳ ଓ r ଭାଗଶେଷ ।

ତେବେ $n = 4m + r$, ଯେଉଁଠି $0 \le r < 4$

ବର୍ତ୍ତମାନ $i^n = i^{(4m+r)} = i^{4m} \cdot i^r$

$= (i^4)^m \cdot i^r$

$= i^r \ (\because i^4 = 1)$

ଟୀକା : ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ପାଇଁ $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ସତ୍ୟ କେବଳ ଯଦି ଅତିକମ୍‌ରେ a ଓ b ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଶୂନ୍ୟ ବା ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ।

ବାସ୍ତବରେ $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b}$

$= i\sqrt{a} \times i\sqrt{b}$

$= i^2 \times \sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}$ ଯେତେବେଳେ a ଓ b ଧନାତ୍ମକ ଓ ବାସ୍ତବ ।

ଉଦାହରଣ 1.2 $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$

$= 1 + (i^2)^5 + (i^2)^{10} + (i^2)^{15}$

$= 1 + (-1)^5 + (-1)^{10} + (-1)^{15}$

$= 1 + (-1) + 1 + (-1)$

$= 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

ଏହିପରି, $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30} = 0$

ଉଦାହରଣ 1.3 $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ କୁ a + bi ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ କୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$8(i^2) \cdot i + 6(i^2)^8 - 12\,(i^2)^5 \cdot i$

$= -8i + 6 - 12\,(-1) \cdot i$

$= -8i + 6 + 12i$

$= 6 + 4i$

ଯାହା a + bi ରୂପରେ ଅଛି, ଏଠାରେ 'a' ର ମାନ 6 ଓ 'b' ର ମାନ 4 ।

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.1

1. 'i' ର ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ସରଳ କର ।

   (a) $\sqrt{-27}$ (b) $-\sqrt{-9}$ (c) $\sqrt{-13}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ a + bi ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

   (a) 5 (b) –3i (c) 0

3. ସରଳ କର

   $10\,i^3 + 6\,i^{13} - 12\,i^{10}$

4. ସମସ୍ତ $m \in N$ ପାଇଁ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$

1.3 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସଯୁଗ୍ମୀ (Conjugate)

$x^2 - 6x + 25 = 0$ ସମୀକରଣ ନିଅ ...(i)

କିମ୍ବା, $(x-3)^2 + 16 = 0$

କିମ୍ବା, $(x-3)^2 = -16$

କିମ୍ବା, $(x-3) = \pm\sqrt{-16} = \pm\sqrt{16\,(-1)}$

କିମ୍ବା, $x = 3 \pm 4i$

ସମୀକରଣ (i) ର ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 + 4i ଓ 3 – 4i ଅଟନ୍ତି ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ସମୀକରଣ ନିଅ

$x^2 + 2x + 2 = 0$ ....(ii)

କିମ୍ବା, $(x+1)^2 + 1 = 0$

କିମ୍ବା, $(x+1)^2 = -1$

କିମ୍ବା, $(x+1) = \pm\sqrt{-1} = \pm i$

କିମ୍ବା, $x = -1 \pm i$

ସମୀକରଣ (ii) ର ମୂଳଦ୍ୱୟ –1 + i ଓ –1 – i

ସମୀକରଣ (i) ଓ (ii) ର ମୂଳ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସାଦୃଶ୍ୟ ପାଉଛ କି ?

ସମୀକରଣ (i) ଓ (ii) ର ମୂଳଗୁଡ଼ିକ a + bi ଓ a – bi ରୂପରେ ଅଛି । ସେହିପରି ମୂଳଗୁଡ଼ିକୁ ସଯୁଗ୍ମୀ ମୂଳ କହନ୍ତି ଏବଂ a + bi କୁ a – bi ର ସଯୁଗ୍ମୀ ଓ a – bi କୁ ବିପରୀତ କ୍ରମରେ a + bi ର ସଯୁଗ୍ମୀ କୁହାଯାଏ ।

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା z = a + bi ର ସମିଶ୍ର ସଯୁଗ୍ମୀ (ଅଥବା କେବଳ ସଂଯୁଗ୍ମୀ)କୁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା a – bi ରୂପରେ ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରାଯାଇଥାଏ ଓ $\bar{z}$ ରୂପରେ ଲେଖଯାଏ ।

ଟୀକା : କୌଣସି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶର ଚିହ୍ନକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ, ତା'ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ମିଳେ ।

ନିମ୍ନରେ କେତେକ ସମିଶ୍ର ସଂଯୁଗ୍ମୀର ଉଦାହରଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

(i) ଯଦି $z = 2 + 3i$, ତେବେ $\bar{z} = 2 - 3i$

(ii) ଯଦି $z = 1 - i$, ତେବେ $\bar{z} = 1 + i$

(iii) ଯଦି $z = -2 + 10\,i$ ତେବେ $\bar{z} = -2 - 10i$

1.3.1 ସମିଶ୍ର ସଂଯୁଗ୍ମୀର ଧର୍ମ

(i) ଯଦି z ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା, ତେବେ $z = \bar{z}$ ଅର୍ଥାତ୍ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସେ ନିଜେ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର z = 5 । ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$z = 5 + 0i$

$\therefore \bar{z} = 5 - 0i = 5$

$\therefore z = 5 = \bar{z}$

(ii) ଯଦି z ଗୋଟିଏ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାଳ୍ପନିକ ସଂଖ୍ୟା ତେବେ $\bar{z} = -z$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଯଦି z = 3i

ଏହାକୁ ନିମ୍ନମତେ ଲେଖାଯାଇପାରେ

$z = 0 + 3\,i$

$\therefore \bar{z} = 0 - 3\,i = -3i$

$= -z$

$\therefore \bar{z} = -z$

(iii) ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସଂଯୁଗ୍ମୀର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସେ ନିଜେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{(\bar{z})} = z$

ଉଦହାଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି z = a + bi, ତେବେ

$\bar{z} = a - b\,i$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{\left(\overline{z}\right)} = \overline{\left(a - bi\right)}$

$= a + bi$

$= z$

$\therefore \overline{\left(\overline{z}\right)} = z$

ଉଦାହରଣ 1.4 ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $3 - 4i$ (ii) $2i$

(iii) $(2 + i)^2$ (iv) $\frac{i+1}{2}$

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକର $z = 3 - 4i$

ତେବେ $\overline{z} = \left(\overline{3-4i}\right) = 3 + 4i$

ଏଣୁ, $3 + 4i$ ହେଉଛି $3 - 4i$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ

(ii) ମନେକର $z = 2i$ କିମ୍ବା $0 + 2i$

ତେବେ $\overline{z} = \left(\overline{0+2i}\right) = 0 - 2i$

ଏଣୁ, $-2i$ ହେଉଛି $2i$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ

(iii) ମନେକର $z = (2 + i)^2$

ଅର୍ଥାତ୍ $z = (2)^2 + (i)^2 + 2(2)(i)$

$= 4 - 1 + 4i$

$= 3 + 4i$

ତେବେ $\overline{z} = \left(\overline{3+4i}\right) = 3 - 4i$

ଏଣୁ, $(2 + i)^2$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ହେଉଛି $3 - 4i$

(iv) ମନେକର $z = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

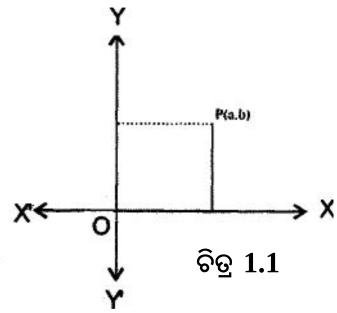
ତେବେ $\overline{z} = \left(\overline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

ଏଣୁ, $\frac{i+1}{2}$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ହେଉଛି $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ କିମ୍ବା $\frac{1-i}{2}$ ।

1.4 ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଜ୍ୟାମତିକି ପରିପ୍ରକାଶ

ମନେକର $z = a + bi$ ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା । ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉଥିବା ରେଖା XOX′ ଏବଂ YOY′ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ x - ଅକ୍ଷ ଓ y-ଅକ୍ଷ ଭାବେ ନିଆଯାଉ, ‘O’ ମୂଳବିନ୍ଦୁ ହେଉ ।

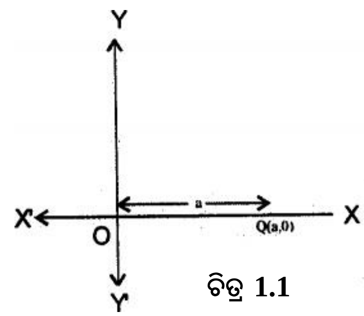
ମନେକର ‘P’ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (a, b) । ଆମେ କହିବା $z = a + bi$ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଟି P (a, b) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ, ଯେପରି ଚିତ୍ର 1.1 ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 1.1

ଯଦି $b = 0$ ହୁଏ, ତେବେ z ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = a + oi$ ଦ୍ୱାରା ବିନ୍ଦୁ (a, 0) ରୂପେ ସୂଚିତ ହୁଏ । (a, 0) ବିନ୍ଦୁଟି x- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ରହିବ ।

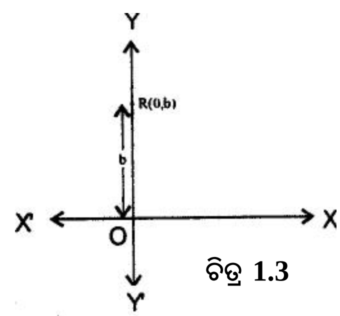
ତେଣୁ XOX′ କୁ ବାସ୍ତବ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 1.2 ରେ Q (a, 0) ବିନ୍ଦୁଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = a + 0\,i$ କୁ ସୂଚାଇ ଥାଏ ।



ଚିତ୍ର 1.1

ଯଦି $a = 0$, ତେବେ z ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କାଳ୍ପନିକ ଏବଂ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା $z = 0 + b\,i$ କୁ ନିରୂପଣ କରୁଥିବା ବିନ୍ଦୁ (0, b) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ । ବିନ୍ଦୁ (0, b) y ଅକ୍ଷ ଉପରେ ରହିବ ।

ଏଥିପାଇଁ y - ଅକ୍ଷକୁ କାଳ୍ପନିକ ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 1.3 ରେ R (0, b), ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = 0 + bi$ କୁ ସୂଚାଏ ।



ଚିତ୍ର 1.3

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ବିନ୍ଦୁ ରୂପରେ ସୂଚାଉଥିବା ଦୁଇ ଅକ୍ଷ ବିଶିଷ୍ଟ ସମତଳକୁ ସମିଶ୍ର ସମତଳ ବା ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳ (Argand Plane) କହନ୍ତି ।

ଯେଉଁ ଆରେଖ ଆରଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ନିରୂପଣ କରେ ତାହାକୁ ଆରଗଣ୍ଡ ଆରେଖ କୁହାଯାଏ ।

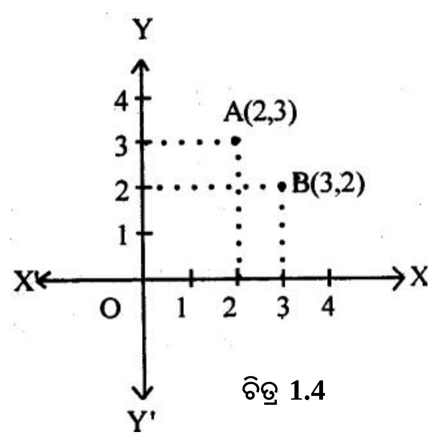
ଉଦାହରଣ 1.5

$2 + 3i$ ଏବଂ $3 + 2i$ କୁ ଗୋଟିଏ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ଚିତ୍ରରେ ଉପସ୍ଥାପନ କର ।

ସମାଧାନ :

1. $2 + 3i$ କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ A (2, 3)
2. $3 + 2i$ କୁ ସୂଚାଉଥିବା, ବିନ୍ଦୁ B (3, 2) ।

   A ଓ B ସ୍ପଷ୍ଟତଃ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ



ଚିତ୍ର 1.4

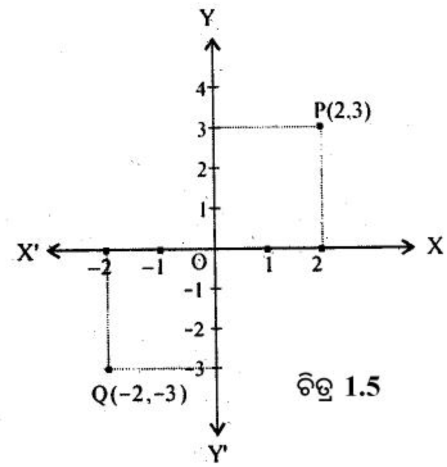
ଉଦାହରଣ 1.6

2 + 3i ଏବଂ –2 – 3i ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ଚିତ୍ରରେ ଉପସ୍ଥାପନ କର ।

ସମାଧାନ :

1. 2 + 3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ P (2, 3) ।
2. –2–3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ (–2, –3) ।

P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ସେଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ 1ମ ପାଦ ଓ 3ୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।



ଚିତ୍ର 1.5

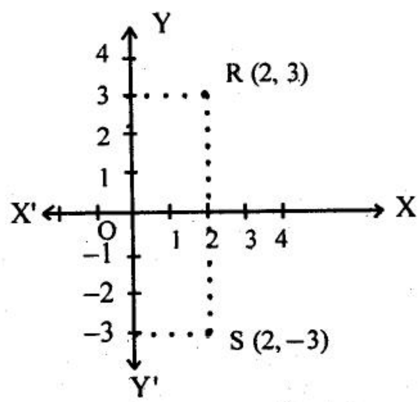
ଉଦାହରଣ 1.7

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା 2 + 3i ଏବଂ 2 – 3i କୁ

ଗୋଟିଏ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ :

1. 2 + 3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ R (2, 3)
2. 2 – 3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ S (2, 3)



ଚିତ୍ର 1.6

ଉଦାହରଣ 1.8

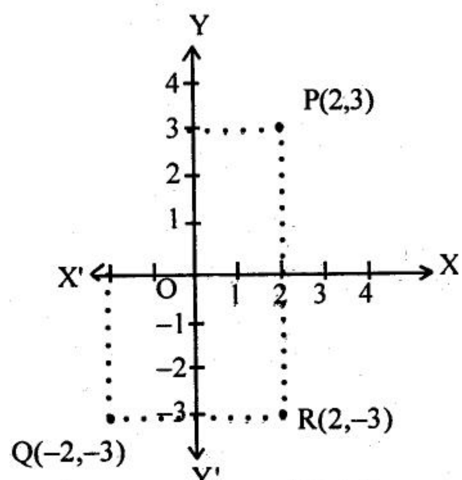
ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା 2 + 3i, –2 – 3i ଏବଂ 2 – 3i କୁ ଗୋଟିଏ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଅ ।

ସମାଧାନ :

(a) 2 + 3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ P (2, 3) ।

(b) –2 –3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ Q (–2, –3) ।

(c) 2 – 3i କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁ R (2, –3) ।



ଚିତ୍ର 1.7

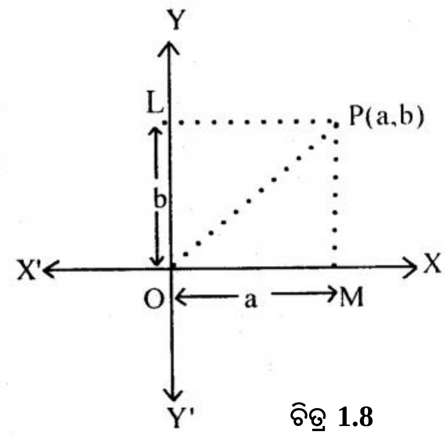
1.5 ଏକ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟାର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ (Modulus of a Complex Number)

ଆମେ ଶିଖିଲେ ଯେ କୌଣସି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ରୂପରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ । ଆମେ କିଭଳି ମୂଳବିନ୍ଦୁ ଠାରୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ? ମନେକର P (a, b), a +bi କୁ ସୂଚିତ କରେ । x - ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ PM ଓ PL ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । OM = a ଏବଂ MP = b ହେଉ । ଆମକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ P ବିନ୍ଦୁର ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

$\therefore OP = \sqrt{OM^2 + MP^2}$

$= \sqrt{a^2 + b^2}$

OP କୁ a + bi ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ କିମ୍ବା ପରମମାନ କହନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର **1.8**

$\therefore$ କୌଣସି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା z, ଯେତେବେଳେ

$z = a + bi,\ a \in R,\ b \in R$ ହେଲେ ଏହାର

ମଡ୍ୟୁଲସ୍‌କୁ $|z|$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

ଏବଂ ଏହା $\sqrt{a^2 + b^2}$ ସହ ସମାନ ।

$\therefore |z| = |a + i\,b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

1.5.1 ମଡ୍ୟୁଲସ୍‌ର ଧର୍ମ

(a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $z = a + bi,\ a \in R,\ b \in R$

ତେବେ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ଏବଂ $b = 0$ (କାରଣ a^2 ଓ b^2 ଦ୍ୱୟ ଧନାତ୍ମକ)

$\Leftrightarrow z = 0$

(b) $|z| = |\bar{z}|$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $z = a + bi$

ତେବେ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\bar{z} = 0 - b\,i$

$\therefore |z| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

ଏହିପରି $\therefore |z| = \sqrt{a^2+b^2} = |\bar{z}|$ ...(i)

(c) $|z| = |-z|$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $z = a + bi$, ତେବେ $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$-z = -a - bi$, ତେବେ $|-z| = \sqrt{(-a)^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

ଏହିପରି $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = |-z|$ ...(ii)

(i) ଓ (ii) କୁ ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିପାରିବା

$|z| = |-z| = |\bar{z}|$

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣମାନଙ୍କୁ ବିଚାର କରିବା :

ଉଦାହରଣ 1.8 ଯଦି $z = -4 + 3i$ ହୁଏ, ତେବେ z ଓ $\bar{z}$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $z = -4 + 3i$, ତେବେ $|z| = \sqrt{(-4)^2+(3)^2}$

$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

ଏବଂ $\bar{z} = -4 - 3i$

ତେବେ $|\bar{z}| = \sqrt{(-4)^2+(-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

ଏହିପରି, $|z| = 5 = |\bar{z}|$

ଉଦାହରଣ 1.10 ଯଦି $z = 5 + 2i$ ହୁଏ, ତେବେ z ଓ $-z$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $z = 5 + 2i$, ତେବେ $-z = -5 - 2i$

$|z| = \sqrt{5^2+2^2} = \sqrt{29}$ ଏବଂ $|-z| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

ଏହିପରି, $|z| = \sqrt{29} = |-z|$

ଉଦାହରଣ 1.11 $z = 1 + 2i$ ହେଲେ, $z, -z$ ଓ $\bar{z}$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $z = 1 + 2i$, ତେବେ $-z = -1 - 2i$ ଏବଂ $\bar{z} = 1 - 2i$

$|z| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

$|-z| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

ଏବଂ $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2+(-2)^2} = \sqrt{5}$

ଏହିପରି $|z| = |-z| = \sqrt{5} = |\bar{z}|$

ଉଦାହରଣ 1.12 ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ରାଶିର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) $1 + i$ ...... π (iii) 0 (iv) $-\frac{1}{2}i$

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର $z = 1 + i$

ତେବେ $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

ଏହିପରି, $|1 + i| = \sqrt{2}$

(ii) ମନେକର $z = 2\pi$ କିମ୍ବା $2\pi + 0\,i$

ତେବେ $|z| = \sqrt{(2\pi)^2 + (0)^2} = 2\pi$

ଏହିପରି, $|2\pi| = 2\pi$

(iii) $z = 0$ କିମ୍ବା $0 + 0\,i$

ତେବେ $|z| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0$

ଏହିପରି, $|z| = 0$

(iv) ମନେକର $z = -\frac{1}{2}i$ କିମ୍ବା $0 - \frac{1}{2}i$

ତେବେ, $|z| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

ଏହିପରି, $\left|-\frac{1}{2}i\right| = \frac{1}{2}$

ଉଦାହରଣ 1.13 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = -2 + 3i$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀର ପରମମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $z = -2 + 3i$

ତେବେ $\bar{z} = -2 - 3i$

$\therefore |\bar{z}|$ ର ପରମମାନ $= |\bar{z}| = |-2 - 3i|$

$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

ଉଦାହରଣ 1.14 ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର (ଚିତ୍ର 1.9) ।

ସମାଧାନ : (i) P (4, 3) ବିନ୍ଦୁଟି ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା

$z = 4 + 3i$ କୁ ସୂଚାଏ ।

$\therefore |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$

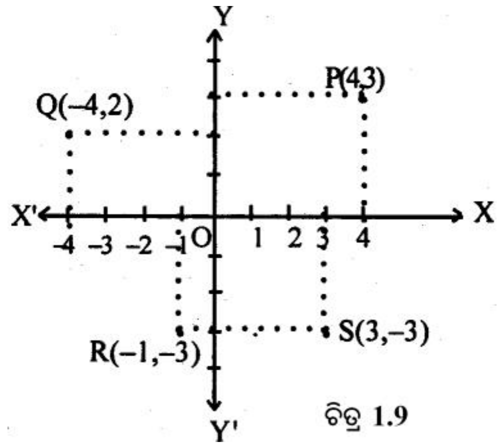
କିମ୍ବା $|z| = 5$

(ii) Q (–4, 2) ବିନ୍ଦୁଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା

$z = -4 + 2i$ କୁ ସୂଚାଏ ।

$\therefore |z| = \sqrt{(-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

କିମ୍ବା $|z| = 2\sqrt{5}$



ଚିତ୍ର 1.9

(iii) R (–1, –3) ବିନ୍ଦୁଟି ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା

$z = -1 - 3i$ କୁ ସୂଚାଏ

$\therefore |z| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$

କିମ୍ବା $|z| = \sqrt{10}$

(iv) S (3, –3) ବିନ୍ଦୁଟି ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା

$z = 3 - 3i$ କୁ ସୂଚାଏ

$\therefore |z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9}$

କିମ୍ବା $|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.2

1. ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

   (a) $-2i$ (b) $-5 - 3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $(-2 + i)^2$

2. ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ଉପସ୍ଥାପନ କର ।

   (a) (i) $2 + 0i$ (ii) $-3 + 0i$ (iii) $0 - 0\,i$ (iv) $3 - 0i$

   (b) (i) $0 + 2i$ (ii) $0 - 3i$ (iii) $4i$ (iv) $-5i$

   (c) (i) $2 + 5\,i$ ଏବଂ $5 + 2i$ (ii) $3 - 4i$ ଏବଂ $-4 + 3\,i$

   (iii) $-7 + 2i$ ଏବଂ $2 - 7i$ (iv) $-2 - 9i$ ଏବଂ $-9 - 2i$

   (d) (i) $1 + i$ ଏବଂ $-1 - i$ (ii) $6 + 5i$ ଏବଂ $-6 - 5i$

   (iii) $-3 + 4i$ ଏବଂ $3 - 4i$ (iv) $4 - i$ ଏବଂ $-4 + i$

(e) (i) $1 + i$ ଏବଂ $1 - i$ (ii) $-3 + 4i$ ଏବଂ $-3 - 4i$

(iii) $6 - 7i$ ଏବଂ $6 + 7i$ (iv) $-5 - i$ ଏବଂ $-5 + i$

3. (a) ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) 3 (ii) $(i + 1)(2 - i)$ (iii) $2 - 3i$ (iv) $4+\sqrt{5}\,i$

(b) ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ରସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ, $|z| = |\bar{z}|$

(i) $-6 + 8i$ (ii) $-3 - 7i$

(c) ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ, $|z| = |-z|$

(i) $14 + i$ (ii) $11 - 2i$

(d) ନିମ୍ନ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ପାଇଁ ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ, $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(i) $2 - 3i$ (ii) $-6 - i$ (iii) $7 - 2i$

1.6 ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ସମାନତା (Equality of two Complex numbers)

ଆସ ଏପରି ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$ ନେଇ ବିଚାର କରିବା ଯେପରିକି $z_1 = z_2$ ହେବ ।

ଦିଆଯାଉଛି $a + bi = c + di$

କିମ୍ବା $(a - c) + (b - d)i = 0 = 0 + 0i$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ ନେଇ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$a - c = 0$, କିମ୍ବା $a = c$

$\Rightarrow z_1$ ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ = z_2 ର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ

ଏବଂ $b - d = 0$ କିମ୍ବା $b = d$

$\Rightarrow z_1$ ର କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ = z_2 ର କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ

ଏଥିପାଇଁ ଆମେ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା ଯେ, ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସମାନ ହେବେ, ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି, ସେମାନଙ୍କର ବାସ୍ତବ ଅଂଶ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ଏବଂ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହୁଅନ୍ତି ।

ସାଧାରଣ ଭାବରେ $a + bi = c + di$, ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି,

$a = c$ ଏବଂ $b = d$

ଧର୍ମ : $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

ମନେକର $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$

$z_1 = z_2$ ରୁ ମିଳିବ $a = c$ ଓ $b = d$

ବର୍ତ୍ତମାନ $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ଓ $|z_2| = \sqrt{c^2 + d^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$[\because a = c$ ଏବଂ $b = d]$

$\Rightarrow |z_1| = |z_2|$

ଉଦାହରଣ 1.15 x ଓ y ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $5x + 6y\,i$ ଓ $10 + 18\,i$ ସମାନ ହେବେ ?

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ $5x + 6yi = 10 + 18\,i$

ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ ତୁଳନା କଲେ ପାଇବା

$5x = 10$ ବା $x = 2$

ଓ $6y = 18$ ବା $y = 3$

$x = 2$ ଓ $y = 3$ ପାଇଁ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସମାନ ହେବେ ।

1.7 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଯୋଗ (Addition of Complex numbers)

ଯଦି $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$ ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)\,i$ ଦ୍ୱାରା ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ଯଦି $z_1 = 2 + 3i$ ଏବଂ $z_2 = -4 + 5i$ ହୁଏ,

ତେବେ $z_1 + z_2 = [2 + (-4)] + [3 + 5]\,i = -2 + 8\,i$

ଉଦାହରଣ 1.16 ସରଳ କର

(i) $(3 + 2i) + (4 - 3i)$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i)$

ସମାଧାନ :

(i) $(3 + 2i) + (4 - 3i)$

$= (3 + 4) + (2 - 3)\,i = 7 - i$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i)$

$= (2 - 3 + 1) + (5 - 7 - 1)\,i = 0 - 3i$

କିମ୍ବା $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = -3i$

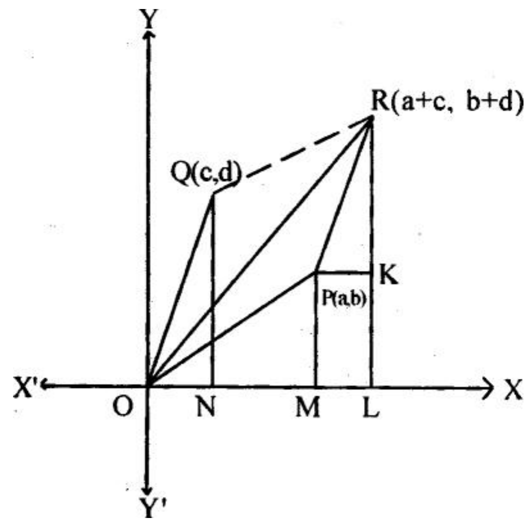
1.7.1 ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ

ମନେକର ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା z_1 ଓ z_2, P(a, b) ଏବଂ Q (c, d) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ । ଏହି ଆର୍ଗାଣ୍ଡ ସମତଳରେ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗ $z_1 + z_2$ କୁ R (a + c, b + d) ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

OP, OQ, OR, PR ଏବଂ QR କୁ ଯୋଗ କର ।

P, Q, ଓ R ବିନ୍ଦୁରୁ x ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ PM, QN, RL ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।

RL ପ୍ରତି PK ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ।



ଚିତ୍ର **1.10**

ΔQON ରେ ON = c ଏବଂ QN = d

ΔROL ରେ

RL = b + d

ଓ OL = a + c

ΔPOM ରେ

PM = b

OM = a

ଏବଂ PK = ML

= OL − OM

= a + c – a

= c = ON

RK = RL – KL

= RL – PM

= b + d – b

= d = QN

ΔQON ଓ ΔRPK ମଧ୍ୟରେ

ON = PK, QN = RK ତଥା $\angle$QNO = $\angle$RKP = 90^0

$\therefore$ ΔQON $\cong$ Δ RPK

$\therefore$ OQ = PR ତଥା OQ || PR

$\Rightarrow$ OPRQ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ OR ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ । ଏଣୁ ଏହା କୁହାଯାଇପାରିବ ଯେ, ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ, ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ଉଦାହରଣ 1.17 $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ ପ୍ରମାଣ କର ।

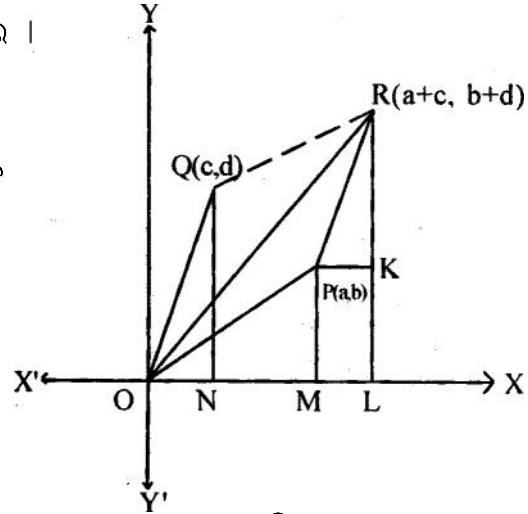
ସମାଧାନ : ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିଛନ୍ତି ଯେ, ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା z_1 ଓ z_2 ର ସମଷ୍ଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ କ୍ଷେତ୍ର OPRQ ର କର୍ଣ୍ଣ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

(ଚିତ୍ର 1.11 ଦେଖ) ।

Δ OPR ରେ $OR \le OP + PR$

କିମ୍ବା, $OR \le OP + OQ$ ($\because OQ = PR$)

କିମ୍ବା, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$



ଚିତ୍ର **1.11**

ଉଦାହରଣ 1.18 ଯଦି $z_1 = 2 + 3i$ ଏବଂ $z_2 = 1 + i$, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ସମାଧାନ : $z_1 = 2 + 3i$ ଏବଂ $z_2 = 1 + i$ ଯଥାକ୍ରମେ (2, 3) ଓ (1, 1) ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ । ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି $(z_1 + z_2)$, (2 + 1, 3 + 1) ଅର୍ଥାତ୍ (3, 4) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେବ ।

ପ୍ରତିପାଦନ :

$|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{\cdot}6$ ପ୍ରାୟ

$|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1{\cdot}41$ ପ୍ରାୟ

$|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

$|z_1| + |z_2| = 3{\cdot}6 + 1{\cdot}41 = 5{\cdot}01$

$\therefore |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

1.7.2 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବିୟୋଗ

ମନେକର ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$ କୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ (a, b) ଓ (c, d)ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

$\therefore (z_1) - (z_2) = (a + bi) - (c + di)$

$= (a - c) + (b - d)\, i$

ଯାହା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ $(a - c, b - d)$ କୁ ସୂଚାଏ ।

$\therefore$ ଅନ୍ତର ଅର୍ଥାତ୍ $z_1 - z_2$, $(a - c, b - d)$ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ।

ଏହିପରି ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ବିୟୋଗ କଲାବେଳେ, ଆମେ ଅନୁରୂପ ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶକୁ ପୃଥକ ପୃଥକ ଭାବରେ ବିୟୋଗ କରିଥାଉ ।

ଉଦାହରଣ 1.19 ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାଇଁ $z_1 - z_2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $z_1 = 3 - 4i, z_2 = -3 + 7i$

(b) $z_1 = -4 + 7i, z_2 = -4 - 5i$

ସମାଧାନ :

(a) $z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-3 + 7i)$

$= (3 - 4i) + (3 - 7i)$

$= (3 + 3) + (-4 - 7)\, i$

$= 6 + (-11i) = 6 - 11\, i$

(b) $z_1 - z_2 = (-4 + 7i) - (-4 - 5i)$

$= (-4 + 7i) + (4 + 5i)$

$= (-4 + 4) + (7 + 5)\, i$

$= 0 + 12\, i = 12\, i$

ଉଦାହରଣ 1.20 i ସହ କ'ଣ ଯୋଗ କଲେ 5 + 4i ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର $z = a + bi$ କୁ i ସହ ଯୋଗ କଲେ 5 + 4 i ମିଳେ ।

$\therefore\ i + (a + bi) = 5 + 4i$

ବା $a + (b + 1)\, i = 5 + 4i$

ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶକୁ ସମାନ କଲେ ପାଇବା

$a = 5$ ଓ $b + 1 = 4$ ଅର୍ଥାତ୍ $b = 3$

$\therefore$ i ସହ $z = 5 + 3i$ କୁ ଯୋଗକଲେ 5 + 4i ପାଇବା

1.8 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ (Properties of Addition of Complex numbers)

1. ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure) : ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ।

ମନେକର $z_1 = a_1 + b_1\, i$ ଏବଂ $z_2 = a_2 + b_2 i, \quad a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$

ବର୍ତ୍ତମାନ $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$ ଯାହା ପୁନଶ୍ଚ ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ।

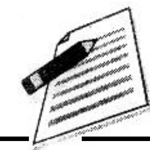
ଏହାଦ୍ୱାରା ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପ୍ରମାଣିତ ହୁଏ ।

ସେହିପରି $(1 + i) + (2 + 3i) = (1 + 2) + (1 + 3)i = 3 + 4\, i$ ଏବଂ ଏହା ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ।

ଏହିପରି, ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଅନ୍ତର ମଧ୍ୟ ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $(2 + 4i) - (1 - 4i) = (2 - 1) + \{4 - (-4)\}\, i = 1 + 8\, i;$

ଏହାମଧ୍ୟ ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ ।



2. **କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ (Commutativity) :** ଯଦି z_1 ଓ z_2 ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

ମନେକର $z_1 = a_1 + b_1\, i$ ଏବଂ $z_2 = a_2 + b_2 i$

ବର୍ତ୍ତମାନ $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$

$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\, i$

[ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟାର କ୍ରମବିନମୟୀ ନିୟମ]

$= (a_2 + b_2 i) + (a_1 + b_1 i)$

$= z_2 + z_1$

ଅର୍ଥାତ୍, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

ଅତଏବ, ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ଯଦି $z_1 = 8 + 7i$ ଏବଂ $z_2 = 9 - 3i$

ତେବେ $z_1 + z_2 = (8 + 7i) + (9 - 3i)$ ଏବଂ $z_2 + z_1 = (9 - 3i) + (8 + 7i)$

$= (8 + 9) + (7 - 3)\, i$ ଏବଂ $= (9 + 8) + (-3 + 7)\, i$

କିମ୍ବା $z_1 + z_2 = 17 + 4i$ ଏବଂ $z_2 + z_1 = 17 + 4i$

ଆମେ ପାଇବା, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$

ଏବଂ $z_2 - z_1 = (a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i)$

$= (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1)\, i$

$= -\,(a_1 - a_2) - (b_1 - b_2)\, i$

$= -\,(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

$\therefore\ z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

ଅତଏବ, ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ବିୟୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଯଦି $z_1 = 8 + 7\, i$ ଏବଂ $z_2 = 9 - 3\, i$, ତେବେ

$z_1 - z_2 = (8 + 7i) - (9 - 3i)$ ଏବଂ $z_2 - z_1 = (9 - 3i) - (8 + 7i)$

$= (8 - 9) + (7 + 3i)$ ଏବଂ $z_2 - z_1 = (9 - 3i) - (8 + 7i)$

$= (8 - 9) + (7 + 3)\, i$ ଏବଂ $= (9 - 8) + (-3 - 7)\, i$

ବା $z_1 - z_2 = -1 + 10\, i$ ଏବଂ $z_2 - z_1 = 1 - 10\, i$

$z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$

3. ସହଯୋଗୀତା (Associativity)

ଯଦି $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ଏବଂ

$z_3 = a_3 + b_3 i$ ତିନିଗୋଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି,

ତେବେ $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

ବର୍ତ୍ତମାନ $z_1 + (z_2 + z_3)$

$= (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + b_2 i) + (a_3 + b_3 i)\}$

$= (a_1 + b_1 i) + \{(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i\}$

$= \{a_1 + (a_2 + a_3)\} + \{b_1 + (b_2 + b_3)\} i$

$= (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3) i$

$= \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\} + (a_3 + b_3 i)$

$= \{(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)\} + (a_3 + b_3 i)$

$= (z_1 + z_2) + z_3$

ଅତଏବ, ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପାଳନ କରେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଯଦି $z_1 = 2 + 3i$

$z_2 = 3i$ ଏବଂ $z_3 = 1 - 2i$, ତେବେ

$z_1 + (z_2 + z_3) = (2 + 3i) + \{3i + (1 - 2i)\}$

$= (2 + 3i) + (1 + i)$

$= (2 + 1) + (3 + 1) i$

$= (3 + 4i)$

ଏବଂ $(z_1 + z_2) + z_3 = \{(2 + 3i) + (3i)\} + (1 - 2i)$

$= (2 + 6i) + (1 - 2i)$

$= (3 + 4i)$

ଏହିପରି, $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମଷ୍ଟି ସମାନହେବା, ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯୋଗର ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟତାର ପ୍ରମାଣ କରେ ।

କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ନିୟମ ଭଳି, ଏହା ମଧ୍ୟ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ, ବିୟୋଗ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ସହଯୋଗୀ ନିୟମ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନୁହେଁ ।

4. ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦର ସ୍ଥିତି (Existence of additive identity) :

ଯଦି $x + yi$ ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ଏଭଳି ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $(0 + 0i)$ ଅଛି

ଯେପରିକି $(x + yi) + (0 + 0i) = x + yi$

ମନେକର $z_2 = x + yi$ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାଟି, $z_1 = 2 + 3i$ ର ଯୋଗାମତ୍ମକ ଅଭେଦ ।

ତେବେ $z_1 + z_2 = z_1$

ଅର୍ଥାତ୍, $(2 + 3i) + (x + yi) = 2 + 3i$

ବା, $(2 + x) + (3 + y)i = 2 + 3i$

ବା, $(2 + x) = 2$ ଓ $3 + y = 3$

ବା, $x = 0$ ଓ $y = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $z_2 = x + yi = 0 + 0i$ ହେଉଛି ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ

ଅର୍ଥାତ୍, ଯଦି $z = a + bi$ କୌଣସି ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ,

ତେବେ $(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$

ଅର୍ଥାତ୍, $(0 + 0i)$ ଯୋଗାମତ୍ମକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।

$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (0 + 0i)$

$= (2 - 0) + (3 - 0)i$

$= 2 + 3i = z_1$

$\therefore$ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ $(0 + 0i) = z_2$ ଅଭେଦ ଅଟେ ।

ଯେପରି $(a + bi) - (0 + 0i) = a + bi$

5. **ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀର ଅସ୍ତିତ୍ୱ (Existence of Additive Inverse)**

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $a + bi$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $-a - bi$ ଅଛି, ଯେପରିକି

$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$

ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ, ମନେକର $z_1 = 4 + 5i$ ଏବଂ z_1 ର

ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $z_2 = x + yi$ ହେଉ ।

ତେବେ $z_1 + z_2 = 0$

କିମ୍ବା, $(4 + 5i) + (x + yi) = 0 + 0i$

କିମ୍ବା $(4 + x) + (5 + y)i = 0 + 0i$

କିମ୍ବା, $4 + x = 0$ ଏବଂ $5 + y = 0$

କିମ୍ବା, $x = -4$ ଏବଂ $y = -5$

ଏହିପରି, $z_2 = -4 - 5i$ ହେଉଛି $z_1 = 4 + 5i$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।

ସାଧାରଣତଃ ଗୋଟିଏ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଉଭୟ ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶର ଚିହ୍ନ ବଦଳାଇଦେଲେ, ଏହାର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ମିଳିଥାଏ ।

$z_1 - z_2 = 0$ କୁ ବିଚାର କର

ଅଥବା, $(4 + 5i) - (x + yi) = 0 + 0i$

ଅଥବା, $(4 - x) + (5 - y)\,i = 0 + 0i$

ଅଥବା, $4 - x = 0$ ଓ $5 - y = 0$

ଅଥବା, $x = 4$ ଓ $y = 5$

ଅର୍ଥାତ୍, $z_1 - z_2 = 0$ ରୁ ପାଇବା $z_2 = 4 + 5i$

ଏହିପରି, ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିଜେ ତା'ର ବିଲୋମୀ ।

ଅର୍ଥାତ୍, $(a + bi) - (a + bi) = 0 + 0i$ ବା 0

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.3

1. ସରଳ କର

(a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,i\right)$ (b) $\frac{2+i}{3}+\frac{2-i}{6}$

(c) $(1 + i) - (1 - 6i)$ (d) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i\right)-(-2-7i)$

2. ଯଦି $z_1 = (5 + i)$ ଏବଂ $z_2 = (6 + 2i)$, ତେବେ

(a) $z_1 + z_2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(b) $z_2 + z_1$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(c) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ସତ୍ୟ କି ?

(d) $z_1 - z_2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(e) $z_2 - z_1$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(f) $z_1 - z_2 = z_2 - z_1$ ସତ୍ୟ କି ?

3. ଯଦି $z_1 = (1 + i)$, $z_2 = (1 - i)$ ଏବଂ $z_3 = (2 + 3i)$, ତେବେ :

(a) $z_1 + (z_2 + z_3)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(b) $(z_1 + z_2) + z_3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(c) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ସତ୍ୟ କି ?

(d) $z_1 - (z_2 - z_3)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(e) $(z_1 - z_2) - z_3$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(f) $z_1 - (z_2 - z_3) = (z_1 - z_2) - z_3$ ସତ୍ୟ କି ?

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $12 - 7i$ (b) $4 - 3i$

5. $(-15 + 4i)$ ସହ କ'ଣ ଯୋଗ କଲେ $(3 - 2i)$ ପାଇବା ?

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\left\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\right\}=\left(\overline{3+7i}\right)-\left(\overline{5+2i}\right)$

1.9 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଆର୍ଗୁମେଣ୍ଟ (Argument of a Complex Number)

ମନେକର $p(a, b)$ ବିନ୍ଦୁଟି $z = a + bi$ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାକୁ ନିରୂପଣ କରେ, ଯେଉଁଠି $a \in R$, $b \in R$ ଏବଂ OP x-ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ θ କୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରେ ।

$PM \perp OX$ ଅଙ୍କନ କର ।

ମନେକର OP = r

ସମକୋଣୀ ΔOMP ରେ

OM = a

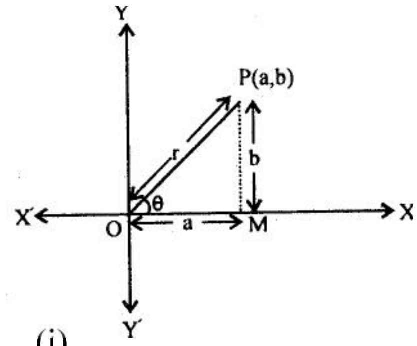
MP = b

$\therefore$ r cos θ = a

r sin θ = b

ତେବେ z = a + bi କୁ ମଧ୍ୟ z = r {cos θ + sin θ} ... (i)

ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ



ଚିତ୍ର **1.12**

ଯେଉଁଠି $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ଓ $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

କିମ୍ବା $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

ଏହାକୁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା z ର ଧ୍ରୁବୀୟ ରୂପ (Polar form) କୁହାଯାଏ, ଏବଂ r ଓ θ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ସମିଶ୍ର ସଖ୍ୟାର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ଓ ଆର୍ଗୁମେଣ୍ଟ କୁହାଯାଏ ।

1.10 ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନ (Multiplication of two Complex Numbers)

ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗ ତଥା ଗୁଣନ ଲାଗି ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରୟୋଗ କରି ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନ କାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଏ ।

ମନେକର $z_1 = (a + bi)$ ଏବଂ $z_2 = (c + di)$

ତେବେ, $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) = (c + di)$

$= a(c + di) + bi(c + di)$

$= ac + adi + bci + bdi^2$

$= (ac - bd) + (ad + bc)i$

$[\because i^2 = -1]$

ଯଦି (a + bi) ଓ (c + di) ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳକୁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା (ac – bd) + (ad + bc)i ରୂପେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ 1.21 ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) (1 + 2i) (1 – 3i) (ii) $(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)$ (iii) $(3 - 2i)^2$

ସମାଧାନ :

(i) (1 + 2i) (1 – 3i) = {1 – (–6)} + (–3 + 2)i

= 7 – i

(ii) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=\{3-(-1)\}+(-\sqrt{3}+\sqrt{3})\ i$

$= 4 + 0\ i$

(iii) $(3-2i)^2 = (3-2\ i)\ (3-2i)$

$= (9-4) + (-6-6)\ i$

$= 5 - 12\ i$

1.10.1 ଗୁଣନର ଧର୍ମ

$|z_1 \cdot\ z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

ମନକର $z_1 = r_1\ (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$ ଏବଂ $z_2 = r_2\ (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore |z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1} = r_1$

ଏହିପରି, $|z_2| = r_2$

ବର୍ତ୍ତମାନ, $z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)\cdot r_2\ (\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)$

$= r_1r_2\ [(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 - \sin\theta_1\cdot\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)i]$

$= r_1r_2\ [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\ \sin\ (\theta_1+\theta_2)]$

[$\because \cos\ (\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\ \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\ \theta_2$ ଏବଂ

$\sin\ (\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1.\ \cos\ \theta_2 + \cos\ \theta_1\ \sin\theta_2$]

$|z_1\cdot z_2| = r_1r_2\sqrt{\cos^2(\theta_1+\theta_2)+\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2$

$\therefore |z_1\cdot z_2| = r_1r_2 = |z_1|\cdot|z_2|$

ଏବଂ $z_1 \cdot z_2$ ର ଆର୍‌ଗୁମେଣ୍ଟ $= \theta_1 + \theta_2 = \arg\ (z_1) + \arg\ (z_2)$

ଉଦାହରଣ 1.22

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $(1 + i)\ (4 - 3i)$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $z = (1 + i)\ (4 - 3i)$

ତେବେ $|z| = |(1 + i)\ (4 - 3i)|$

$= |(1 + i)| \cdot |(4 - 3i)|$ ($\because |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$)

କିନ୍ତୁ $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ ଏବଂ $|4-3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$

$\therefore |z| = \sqrt{2}\times 5 = 5\sqrt{2}$

1.11 ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ହରଣ (Division in Complex Numbers)

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ, ଉଭୟ ଲବ ଓ ହରକୁ ହରର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଏ । ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ତାକୁ ବୁଝାଇପାରିବା ।

ମନେକର $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$

ତେବେ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di}$ $(c + di \neq 0)$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\,(c-d\,i)}{(c+di)\,(c-d\,i)}$$

(ଲବ ଓ ହର ଉଭୟକୁ ହରର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସହ ଗୁଣାଗଲେ)

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

ଏହିପରି, $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$

ଉଦାହରଣ 1.23

3 + i କୁ 4 – 2i ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର :

ସମାଧାନ : $\frac{3+i}{4-2i}$

ଉଭୟ ଲବ ଓ ହରକୁ ହରର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ସହ ଗୁଣିଲେ ପାଇବା

$$\frac{(3+i)\,(4+2i)}{(4-2i)\,\,(4+2i)}$$

$$= \frac{10+10\,i}{20}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$$

ଏହିପରି, $\frac{3+i}{4-2i} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,i$

1.11.1 ଭାଗକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

ପ୍ରମାଣ : $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)$

$|z_1| = \sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$

ସେହିପରି, $|z_2| = r_2$

ଏବଂ $\arg(z_1) = \theta_1$ ଓ $\arg(z_2) = \theta_2$

ତେବେ, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)}$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\ \sin\theta_1)\ (\cos\theta_2 - i\ \sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\ \sin\theta_2)\ (\cos\theta_2 - i\ \sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - i\cos\theta_1 \cdot \sin\theta_2 + i\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ଏହିପରି $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{r_1}{r_2}\sqrt{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}$

$\therefore \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ ର ଆର୍ଗୁମେଣ୍ଟ $= \dfrac{r_1}{r_2} = \theta_1 - \theta_2$

$= \arg(z_1) - \arg(z_2)$

ଉଦାହରଣ 1.24

ସମ୍ମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $\dfrac{2+i}{3-i}$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ : ମନେକର $z = \dfrac{2+i}{3-i}$

$$\therefore |z| = \left|\frac{2+i}{3-i}\right| = \frac{|2+i|}{|3-i|} \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.12 ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନର ଧର୍ମ (Properties of multiplication of complex numbers)

1. **ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ (Closure)**

ଯଦି $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$ ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ z_1z_2 ମଧ୍ୟ ସମିଶ୍ର ହେବ ।

2. **କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ନିୟମ (Commutativity)**

ଯଦି $z_1 = a + bi$ ଏବଂ $z_2 = c + di$ ଦୁଇଟି ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $z_1z_2 = z_2z_1$ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ମନେକର $z_1 = 3 + 4i$ ଏବଂ $z_2 = 1 - i$

ତେବେ $z_1z_2 = (3 + 4i)(1 - i)$

$= 3(1 - i) + 4i(1 - i)$

$= 3 - 3i + 4i - 4i^2$

$= 3 - 3i + 4i - 4(-1)$

$= 3 + i + 4$

$= 7 + i$

ପୁନଶ୍ଚ $z_2z_1 = (1 - i)(3 + 4i)$

$= (3 + 4i) - i(3 + 4i)$

$= 3 + 4i - 3i - 4i^2$

$= 3 + i + 4 = 7 + i$

$\therefore z_1z_2 = z_2z_1$

3. **ସହଯୋଗୀ ନିୟମ (Associativity) :**

ଯଦି $z_1 = (a + bi)$, $z_2 = c + di$ ଏବଂ $z_3 = (e + fi)$

ତେବେ $z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 z_2) z_3$

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା :

$z_1 = (1 + i)$, $z_2 = (2 + i)$ ଏବଂ $z_3 = (3 + i)$ ହୁଏ, ତେବେ

$$z_1 (z_2 z_3) = (1 + i) \{(2 + i) (3 + i)\}$$
$$= (1 + i) \{(6 - 1) + (3 + 2) i\}$$
$$= (1 + i) (5 + 5i)$$
$$= (5 - 5) + (5 + 5) i$$
$$= 0 + 10 i = 10i$$

ଏବଂ $(z_1 \cdot z_2) z_3 = \{(1 + i) (2 + i)\} (3 + i)$
$$= \{(2 - 1) + (1 + 2)i\} (3 + i)$$
$$= (1 + 3i) (3 + i)$$
$$= (3 - 3) + (1 + 9) i$$
$$= 0 + 10 i = 10 i$$

$\therefore z_1 (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) z_3$

4. ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦର ଅସ୍ତିତ୍ୱ (Existence of Multiplicative Identity) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z_1 = a + bi$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $(1 + 0i)$ ଅଛି, ଯେପରିକି

$$(a + bi) (1 + 0i) = (1 + 0i) (a + bi) = a + bi$$

ମନେକର $z = a + bi$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ $z_1 = x + y i$,

ତେବେ $z \cdot z_1 = z$

ଅର୍ଥାତ୍, $(a + bi) (x + yi) = a + bi$

ବା, $(ax - by) + (ay + bx) i = a + bi$

ବା, $ax - by = a$ ଏବଂ $ay + bx = b$

ବା, $x = 1$ ଏବଂ $y = 0$

ଅର୍ଥାତ୍, $z_1 = x + yi = 1 + 0 i$ ହେଉଛି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।

ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $(1 + 0i)$ ହେଉଛି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା :

ଯଦି $z = 2 + 3i$ ହୁଏ, ତେବେ

$$z . (1 + 0 i) = (2 + 3i) (1 + 0i)$$
$$= (2 - 0) + (3 + 0) i$$
$$= 2 + 3i$$

5. ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀର ଅସ୍ତିତ୍ୱ (Existence of Multiplicative inverse):

ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯାହାକୁ କୌଣିସି ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସହ ଗୁଣନ କଲେ, ଗୁଣଫଳ 1 ହୁଏ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = a + bi$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $(x + yi)$ ଅଛି, ଯେପରିକି ସେମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ $(1 + 0i)$ ହେବ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i$

ବା, $(ax - ay) + (bx + ay)\, i = 1 + 0\, i$

ବାସ୍ତବ ଅଂଶକୁ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶକୁ ସମାନ କଲେ, ଆମେ ପାଇବା

$ax - by = 1$ ଏବଂ $bx + ay = 0$

ବଜ୍ରଗୁଣନ କଲେ

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{-b} = \frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{\text{Re}\,(z)}{|z|^2}$$

ଏବଂ $y = \dfrac{-b}{a^2 + b^2} = \dfrac{\text{Im}(z)}{|z|^2}$

ଏହିପରି, କୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = (a + bi)$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ

$$x + yi = \left(\frac{\text{Re}\,(z)}{|z|^2} - \frac{I_m(z)}{|z|^2} i = \frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)$$

ଉଦାହରଣ 1.25 $2 - 4i$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $z = 2 - 4i$

ଆମେ ପାଇବା, $\bar{z} = 2 + 4i$ ଏବଂ $|z|^2 = |2^2 + (-4)^2| = 20$

$\therefore$ ଆବଶ୍ୟକ ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ହେଉଛି

$$\frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{2 + 4i}{20} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} i$$

ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ :

ଯଦି $(2 - 4i)$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} i$ ହୁଏ, ତେବେ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $1 + 0i$ ହେବ ।

ଆମେ ପାଇବା, $(2 - 4i)\left(\dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{5} i\right)$

$$= \left(\frac{2}{10} + \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{10}\right) i$$

$= 1 + 0i$, ଏଣୁ ସତ୍ୟ ।

6. **ଯୋଗ ଉପରେ ଗୁଣନର ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive property of Multiplication over addition)**

ମନେକର $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ ଏବଂ $z_3 = a_3 + b_3 i$

ତେବେ $z_1 (z_1 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ଆସ ଏକ ଉଦାହରଣ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ।

ଯଦି $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -1 + 4i$ ଏବଂ $z_3 = -3 - i$ ହୁଏ, ତେବେ

$z_1 (z_2 + z_3) = (3 - 2i) \{(-1 + 4i) + (-3 - i)\}$

$= (3 - 2i)(-1 + 4i - 3 - i)$

$= (3 - 2i)(-4 + 3i)$

$= (-12 + 6) + (9 + 8)i$

$= -6 + 17i$

ଏବଂ $z_1 z_2 = (3 - 2i)(-1 + 4i)$

$= (-3 + 8) + (12 + 2)i$

$= 5 + 14i$

ପୁନଶ୍ଚ $z_1 z_3 = (3 - 2i)(-3 - i)$

$= (-9 - 2) + (-3 + 6)i$

$= -11 + 3i$

ବର୍ତ୍ତମାନ $z_1 z_2 + z_1 z_3 = (5 + 14i) + (-11 + 3i)$

$= -6 + 17i$

$\therefore z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.4

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ସରଳ କର :

(a) $(1+2i)\left(\sqrt{2} - i\right)$ (b) $\left(\sqrt{2} + i\right)^2$

(c) $(3 + i)(1 - i)(-1 + i)$ (d) $(2 + 3i) \div (1 - 2i)$

(e) $(1 + 2i) \div (1 + i)$ (f) $(1 + 0i) \div (3 + 7i)$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $3 - 4i$ (b) $\sqrt{3} + 7i$ (c) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$

3. ଯଦି $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = 3 - 2i$ ଏବଂ $z_3 = i + 5$ ହୁଏ,

ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ ।

4. ଯଦି $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$ ଏବଂ $z_3 = 2 - i$ ହୁଏ,

ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 . (z_2 \cdot z_3)$ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ :

- $z = a + bi$ ହେଉଛି ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ମାନକ ରୂପ, ଯେଉଁଠି $a, b \in R$ ଏବଂ $i = \sqrt{-1}$ ।
- i ର ଯେକୌଣସି ଉଚ୍ଚତର ଘାତକୁ i, –1, –i, 1 ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଏକ ପଦ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।
- $z = a + b i$ ର ସଂଯୁଗ୍ମୀ $a - b i$ ଏବଂ ଏହାକୁ $\bar{z}$ ମାଧ୍ୟମରେ ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।
- ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $a + bi$ ର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ହେଉଛି $\sqrt{a^2 + b^2}$

  ଅର୍ଥାତ୍, $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

  (a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (b) $|z| = |\bar{z}|$

  (c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- ଏକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = a + b i$ ର ଧ୍ରୁବୀୟ ରୂପ ହେଉଛି $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ ଯେଉଁଠି ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ହେଉଛି $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ଏବଂ ଆର୍ଗ୍ୟୁମେଣ୍ଟ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$ ହେଉଛି ଏହାର ଆର୍ଗୁମେଣ୍ଟ
- ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା $z = a + bi$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ହେଉଛି $\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ।

ସହାୟକ ୱେବ୍‌ସାଇଟ୍

- http://www.wikipedia.org
- http://mathworld.wolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $2 + 7i$ (b) $3 + 0i$ (c) $-\frac{1}{2}$

(d) $5i$ (e) $\frac{1}{2+3i}$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ସରଳ କର :

(a) $\sqrt{-3} \cdot \sqrt{-27}$ (b) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}\sqrt{-72}$ (c) $3\,i^{15} - 5i^{18} + 1$

3. ଯେଉଁ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବାସ୍ତବ ଓ କାଳ୍ପନିକ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ମାଧ୍ୟମରେ ଦିଆଯାଇଛି ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(a) z (3, –5) (b) z (0, 4) (c) z (8, π)

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ସଂଯୁଗ୍ମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $1 - 2i$ (b) $-1 - 2i$ (c) $6 - \sqrt{2}\,i$

(d) $4i$ (e) $-4i$

5. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(a) $1 - i$ (b) $3 + \pi\, i$ (c) $-\frac{3}{2}\,i$ (d) $-2 + \sqrt{3}\,i$

6. $7\,i^{17} - 6i^{6} + 3i^{3} - 2i^{2} + 1$ କୁ $a + bi$ ରୂପରେ ଲେଖ ।

7. x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର, ଯଦି

(a) $(x - yi) + 7 - 2i = 9\,i$

(b) $2x + 3yi = 4 - 9\,i$

(c) $x - 3yi = 7 + 9\,i$

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ସରଳ କର :

(a) $(3 + i) - (1 - i) + (-1 + i)$

(b) $\left(\frac{1}{7} + i\right) - \left(\frac{2}{7} - i\right) + \left(\frac{3}{7} - 2i\right)$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଓ ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $3 - 7\,i$ (b) $11 - 2i$ (c) $\sqrt{3} + 2i$

(d) $1 - \sqrt{2}\,i$ (e) $\frac{1 + 5i}{1 - i}$

10. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟାର ମଡ୍ୟୁଲସ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(a) $\frac{1 + i}{3 - i}$ (b) $\frac{5 + 2i}{\sqrt{2} + \sqrt{3}\,i}$

(c) $(3 + 2i)(1 - i)$ (d) $(1 - 3i)(-2i^3 + i^2 + 3)$

11 ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗଳ ପାଇଁ $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$ ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

(a) $z_1 = 3 - 2i,\ z_2 = 1 - 5i$

(b) $z_1 = 3\sqrt{7}\,i,\ z_2 = \sqrt{3} - i$

12. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମିଶ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗଳ ପାଇଁ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

(a) $z_1 = 1 + 3i,\ z_2 = 2 + 5i$

(b) $z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i$

ଉତ୍ତର ମାଳା

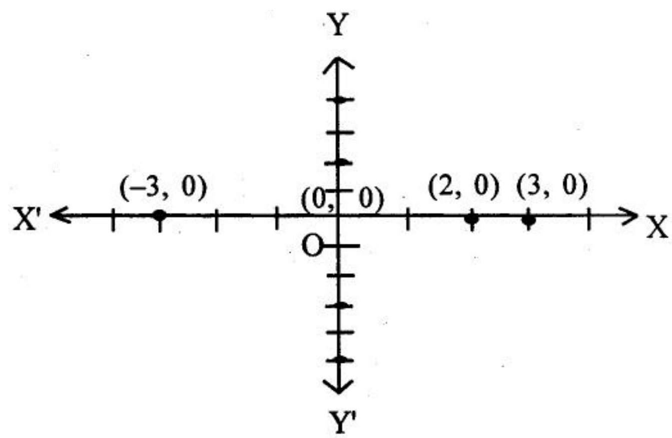
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.1

1. (a) $3\sqrt{3}i$ (b) $-3i$ (c) $\sqrt{13}i$
2. (a) $5+0i$ (b) $0-3i$ (c) $0+0i$
3. $12-4i$

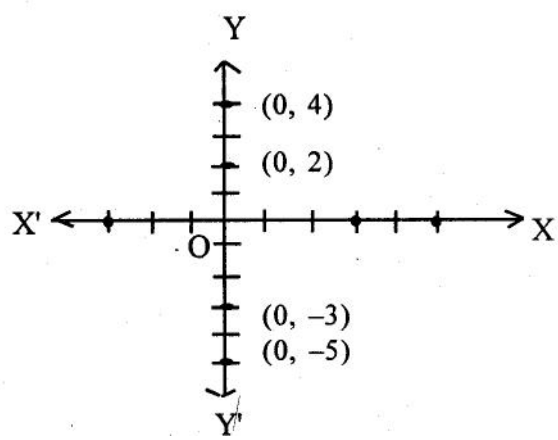
ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.2

1. (a) $2i$ (b) $-5+3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $3+4i$

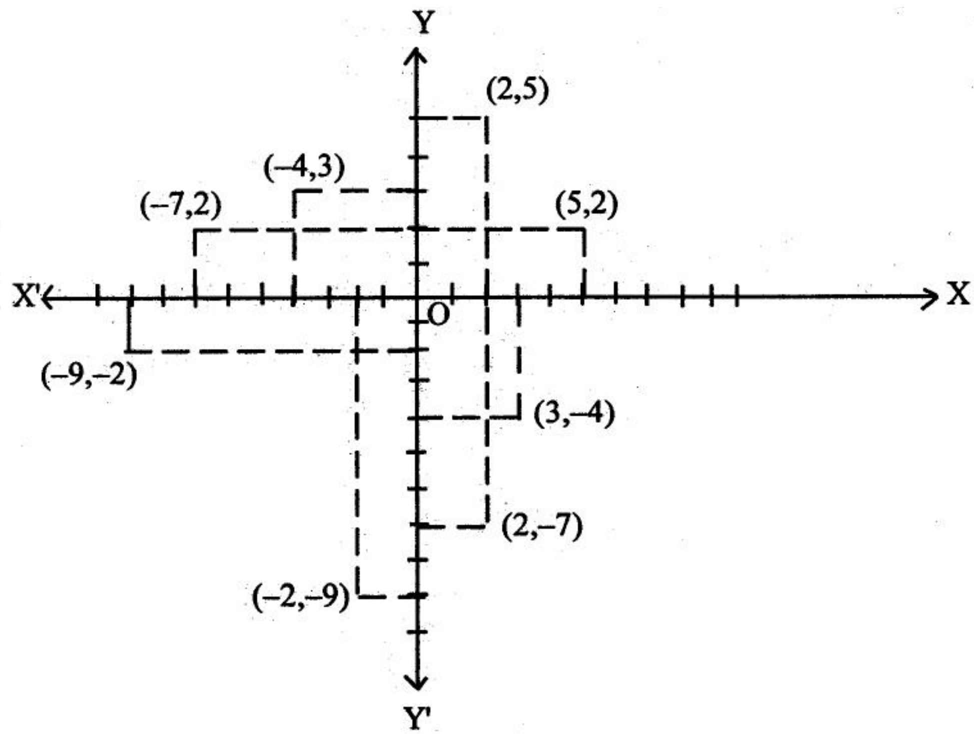
2. (a)



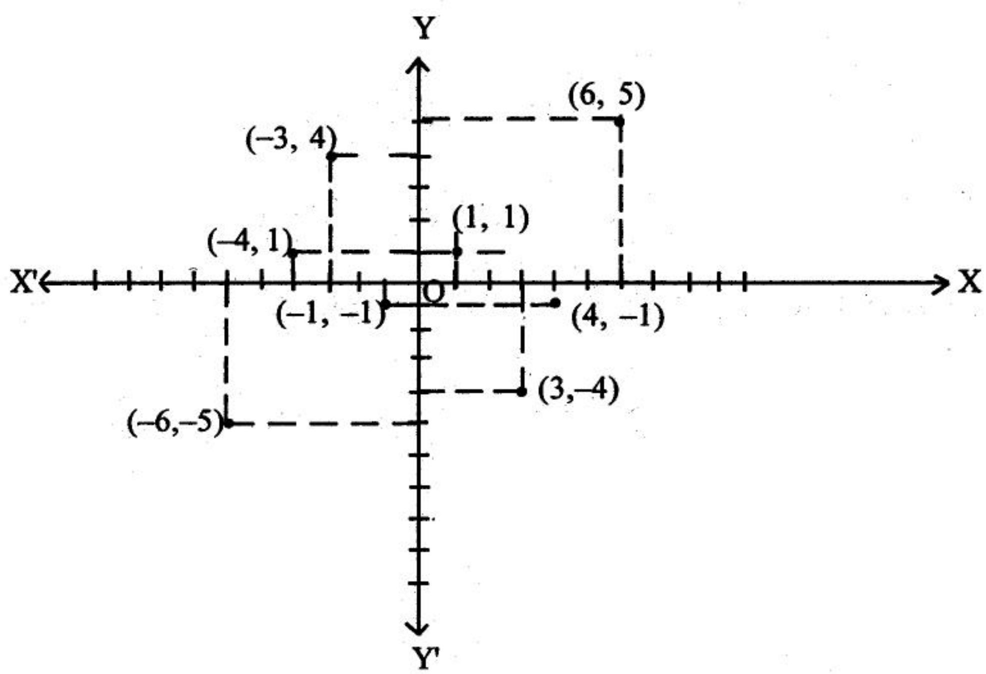
(b)



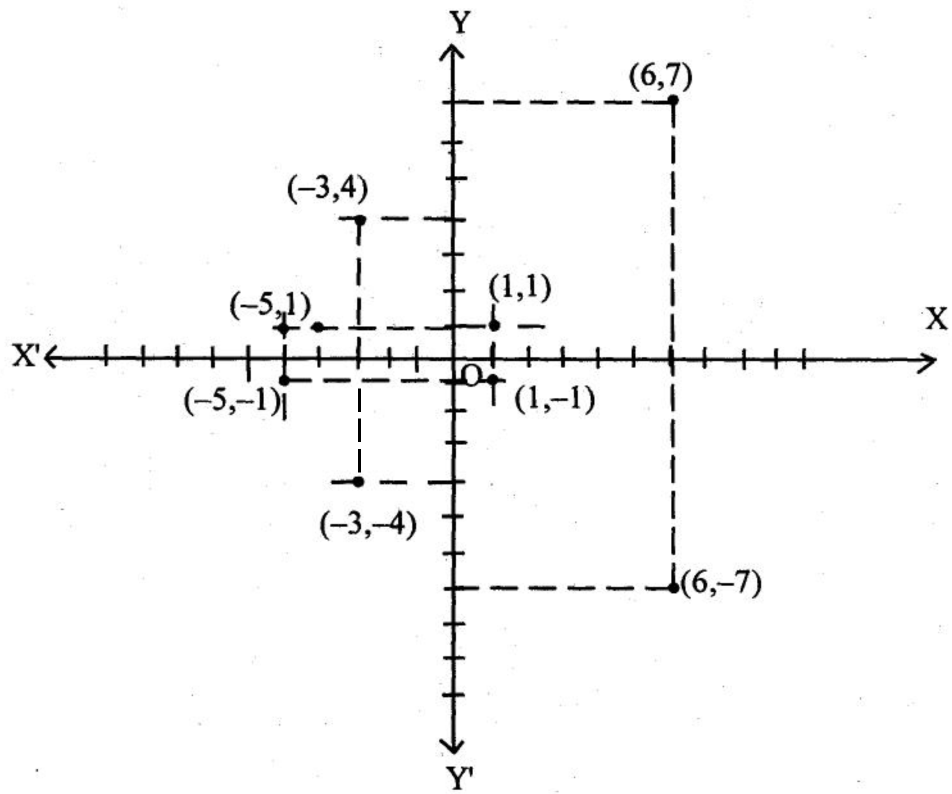
(c)



(d)



(e)



3. (a) 3 (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\sqrt{13}$ (iv) $\sqrt{21}$

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.3

1. (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)$ i

(b) $\frac{1}{6}(6+\text{i})$

(c) 7 i

(d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(7-\sqrt{3}\right)$

2. (a) 11 + 3 i (b) 11 + 3i (c) ହଁ

(d) –1–i (e) 1 + i (f) ନାଁ

3. (a) 4 + 3i (b) 4 + 3i (c) ହଁ

(d) 2 + 5i (e) –2 – i (f) ନାଁ

4. (a) –12 + 7 i (b) 4 + 3i

5. 18 – 6 i

ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 1.4

1. (a) $\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(2\sqrt{2}-1\right)i$ (b) $1+2\sqrt{2}\,i$

   (c) $-2 + 6\,i$ (d) $\frac{1}{5}(-4+7i)$ (e) $\frac{1}{2}(3+i)$

   (f) $\frac{1}{58}(3-7i)$

2. (a) $\frac{1}{25}(3+4i)$ (b) $\frac{1}{52}\left(\sqrt{3}-7i\right)$ (c) $\frac{1}{34}(-9-19i)$

ପାଠଶେଷ ଅଭ୍ୟାସ କାର୍ଯ୍ୟ

1. (a) 2, 7
   (b) 3, 0
   (c) $-\frac{1}{2}, 0$
   (d) 0, 5
   (e) $\frac{2}{12}, -\frac{3}{13}$
2. (a) –9
   (b) $-12\sqrt{6}\,i$
   (c) $-4 - 3\,i$
3. (a) $3 - 5i$
   (b) $0 - 4i$
   (c) $8+\pi\,i$
4. (a) $1 + 2\,i$
   (b) $-1+2i$
   (c) $6+\sqrt{2}\,i$
   (d) $-4\,i$
   (e) $4\,i$
5. (a) $\sqrt{2}$
   (b) $\sqrt{9+\pi^2}$
   (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{7}$

6. (a) $9 + 4i$

7. (a) $x = 2, y = -1$

   (b) $x = 2, y = -3$

   (c) $x = 7, y = -3$

8. (a) $1 + 3i$

   (b) $\frac{2}{7} + 0i$

9. (a) $-3 + 7i, \frac{1}{58}(3 + 7i)$

   (b) $-11 + 2i, \frac{1}{125}(-11, +2i)$

   (c) $-\sqrt{3} - 2i, \frac{1}{7}\left(\sqrt{3} - 2i\right)$

   (d) $-1 + \sqrt{2}i, \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{2}i\right)$

   (e) $2 - 3i, \frac{1}{13}(2 + 3i)$

10. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{5}\sqrt{145}$ (c) $\sqrt{26}$ (d) $4\sqrt{5}$