$$= \frac{\sin^2 A + (1+\cos A)^2}{\sin A + (1+\cos A)}$$

$$= \frac{\sin^2 A + 1 + \cos^2 A + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{(\sin^2 A + \cos^2) + 1 + 2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{1+1+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2+2\cos A}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2\,(1+\cos A)}{\sin A\,(1+\cos A)}$$

$$= \frac{2}{\sin A}$$

$= 2\,\text{cosec}\,A = \text{R.H.S.}$

ଏଣୁ $\dfrac{\sin A}{1+\cos A} + \dfrac{1+\cos A}{\sin A} = 2\,\text{cosec}\,A$

ଉଦାହରଣ 22.18 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$

ସମାଧାନ :

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= (\sec A - \tan A)^2$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A} \qquad (\because \cos^2 A = 1 - \sin^2 A)$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$$

$$= \frac{1-\sin A}{1+\sin A}$$

= ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\frac{1-\sin A}{1+\sin A} = (\sec A - \tan A)^2$

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଅଭେଦଟିକୁ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା, ଏହିପରି ଭାବରେ :-

ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $= \frac{1-\sin A}{1+\sin A}$

$$= \frac{1-\sin A}{1+\sin A} - \frac{1-\sin A}{1-\sin A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$= \frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}$$

$$= \left(\frac{1-\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}\right)^2$$

$$= (\sec A - \tan A)^2$$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ମନ୍ତବ୍ୟ :

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ ନିମ୍ନ ପଦ୍ଧତି ପାଉ ।

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ ପାଇଁ ପଦ୍ଧତି :

ସୋପାନ 1 : ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ କିମ୍ବା ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଟି ସରଳ କରିବାକୁ ସହଜ ତାକୁ ବାଛ ।

ସୋପାନ 2 : ବିଭିନ୍ନ ଅଭେଦ ବ୍ୟବହାର କରି ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ କିମ୍ବା ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳ କର ଓ ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱର ଫଳାଫଳରେ ପହଞ୍ଚ ।

ସୋପାନ 3 : ଯଦି ତୁମେ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ କିମ୍ବା ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱର ଫଳାଫଳ ପାଇପାରୁ ନାହଁ, ଅନ୍ୟ ଏକ ଫଳାଫଳରେ ପହଞ୍ଚ ଏବଂ ତେବେ ଆଗରୁ ମିଳିଥିବା ଫଳାଫଳ ପାଇବାକୁ ଅପର ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳ କର ।

ସୋପାନ 4 : ବାମ ଅଭେଦଟି ପ୍ରତିପାଦିତ ହେଲା ଯେହେତୁ ଅଭେଦଟିର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱ ସମାନ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି, ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅ-ଭେଦ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଉ ଅଧିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 22.19 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

ସମାଧାନ : ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ = $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}} \times \frac{\sqrt{1+\sin\theta}}{\sqrt{1+\sin\theta}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{1+\sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\theta}}{1+\sin\theta} \qquad (\because 1 - \sin^2 q = \cos^2 q)$$

$$= \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

ଉଦାହରଣ 22.20 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

ସମାଧାନ : ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos^4 A - \sin^4 A$

$$= (\cos^2 A)^2 - (\sin^2 A)^2$$

$$= (\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)$$

$= \cos^2 A + \sin^2 A \qquad (\because \cos^2 A - \sin^2 A)$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ପୁନଶ୍ଚ $\cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A \; (\because \cos^2 A = \sin^2 A)$

$= 1 - 2\sin^2 A$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\cos^4 A - \sin^4 A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$

ଉଦାହରଣ 22.21 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A) = 1$$

ସମାଧାନ : ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $= \sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A)$

$$= \frac{1}{\cos A}(1 - \sin A)\left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)}{\cos A} \times \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{(1 - \sin A)(1 + \sin A)}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\sec A\,(1 - \sin A)\,(\sec A + \tan A) = 1$

ଉଦାହରଣ 22.22 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$$

ସମାଧାନ : ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \qquad (\because 1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta)$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)\,[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)\,(1 - \sec\theta - \tan\theta)}{(\tan\theta - \sec\theta + 1)}$$

$= \tan\theta + \sec\theta$

$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

= ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$

$$= \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$$= \frac{\cos^2\theta}{\cos\theta\,(1-\sin\theta)}$$

$= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\frac{\tan\theta+\sec\theta-1}{\tan\theta-\sec\theta+1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

ଉଦାହରଣ 22.23 :

ଯଦି $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

ସମାଧାନ :

ଆମକୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

କିମ୍ବା $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

କିମ୍ବା $\cos\theta = (\sqrt{2}+1)\sin\theta$

କିମ୍ବା $\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} = \sin\theta$

କିମ୍ବା $\sin\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{2}+1} \times \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)}$

କିମ୍ବା $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta}{2-1}$

କିମ୍ବା $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

ଅତଏବ $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

ଉଦାହରଣ 22.24 :

ଯଦି $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

ସମାଧାନ :

ଆମକୁ ଦତ୍ତ ଅଛି $\tan^4\theta + \tan^2\theta = 1$

କିମ୍ବା $\tan^2\theta\,(\tan^2\theta + 1) = 1$

କିମ୍ବା $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

କିମ୍ବା $\sec^2\theta = \cot^2\theta$ $\quad (\because 1 = \tan^2\theta = \sec^2\theta)$

କିମ୍ବା $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$

କିମ୍ବା $\sin^2\theta = \cos^4\theta$

କିମ୍ବା $1 - \cos^2\theta = \cos^4\theta$ $\quad (\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta)$

କିମ୍ବା $\cos^4\theta + \cos^2\theta = 1$

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 22.5

ନିମ୍ନ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କର ।

1. $(\operatorname{cosec}^2\theta - 1)\sec^2\theta = \cos^2\theta$
2. $\sin^4 A + \sin^2 A \,.\, \cos^2 A = \sin^2 A$
3. $\cos^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) = 1$
4. $(1 + \tan^2\theta)\sin^2\theta = \tan^2\theta$

ଟିପ୍ପଣୀ

5. $\dfrac{\sin A}{1+\cos A}+\dfrac{\sin A}{1-\cos A}=1\operatorname{cosec} A$

6. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}}+\dfrac{1+\cos A}{\sin A}$

7. $\sqrt{\dfrac{\sec A-\tan A}{\sec A+\tan A}}+\dfrac{\cos A}{1+\sin A}$

8. $(\sin A - \cos A)^2 + 2\sin A \,.\, \cos A = 1$

9. $\cos^4\theta + \sin^4\theta - 2\sin^2\theta \,.\, \cos^2\theta = (2\cos^2\theta - 1)^2$

10. $\dfrac{\sin A-\sin B}{\cos A+\cos B}+\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A+\sin B}=0$

11. $(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\sec\theta - \cos\theta)(\tan\theta + \cos\theta) = 1$

12. $\text{Sin}\,A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A$

13. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\operatorname{cosec} A-\cot A)^2$

14. $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=1+\sec A \,.\operatorname{cosec} A$

15. $\dfrac{\cot A+\operatorname{cosec} A-1}{\cot A-\operatorname{cosec} A-1}=\dfrac{1+\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sin A}{1-\cos A}$

16. ଯଦି $\sin^2\theta + \sin\theta = 1$ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉକ୍ତି ପାଇଁ ଦିଆଯାଇଥିବା ଚାରୋଟି ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ । (17-20)

17. $(\sin A + \cos A)^2 - 2\sin A \,.\, \cos A$ ସହ ସମାନ ।

(i) 0 (ii) 2 (iii) 1 (iv) $\sin^2 A - \cos^2 A$

18. $\sin^4 A - \cos^4 A$ ସହ ସମାନ ।

(i) 0 (ii) $\sin^2 A - \cos^2 A$ (iii) 0 (iv) $\tan^2 A$

19. $\sin^2 A - \sec^2 + \cos^2 A + \tan^2 A$ ସହ ସମାନ ।

(i) 0 (ii) 1 (iii) $\sin^2 A$ (iv) $\cos^2 A$

20. (sec A - tan A) (sec A + tan A) – cosec A – cot A) (cosec A + cot A) ସହ ସମାନ ।

(i) 2 (ii) 1 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{2}$

22.7 ଅନୁପୂରକ କୋଣ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ

ଜ୍ୟାମିତିରେ ଆମେ ଅନୁପୂରକ ଓ ପରିପୂରକ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଅଛେ । ମନେ ପକାଅ ଯେ ଦୁଇଟି କୋଣକୁ ପରସ୍ପର ଅନୁପରୂକ କୁହାଯାଏ, ଯଦି ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 90^0 ହୁଏ । ଯଦି A ଓ B କୋଣଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 90^0 ହୁଏ, ତେବେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ କୁ ଅନୁପୂରକ କୋଣ କୁହାଯାଏ । $\angle A$ ଓ $\angle B$ ପରସ୍ପରର ଅନୁପୂରକ ଓ 20^0 ଓ 70^0ର କୋଣ ଦ୍ୱୟ ଅନୁପୂରକ ଓ 20^0 କୁ 70^0 ର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ଓ 70^0 କୁ 20^0 ର ଅନୁପୂରକ କୋଣ କହନ୍ତି ।

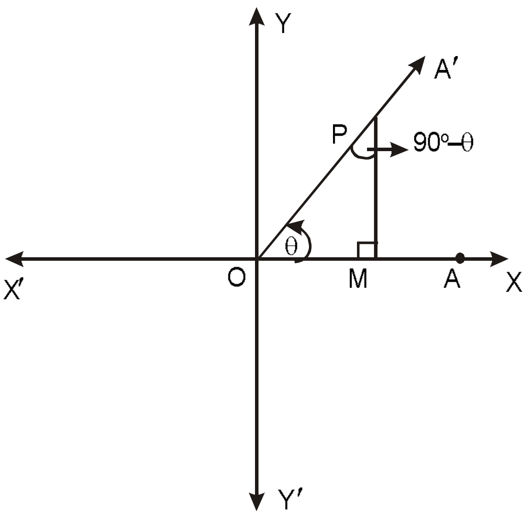


Fig. 22.28

ମନେକର XOX' ଓ YOY' ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱୟ । ମନେକର OX ଉପରେ 'A' ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ମନେକର OA ରଶ୍ମି ବାମାବର୍ତ୍ତୀ ଦିଗରେ ଘୂରାଯାଉ ଓ ଫଳରେ ଏହା ଏହାର ମୂଳ ଅବସ୍ଥାନ ସହ θ କୋଣ ସୃଷ୍ଟି କରିଛି । ମନେକର $\angle POM = \theta$, $PM \perp OX$ ଟାଣ, ତେବେ Δ PMO ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ଆଉ ମଧ୍ୟ $\angle POM + \angle OPM + \angle PMO = 180^0$

କିମ୍ବା $\angle POM + \angle OPM + 90^0 = 180^0$

କିମ୍ବା $\angle POM + \angle OPM = 90^0$

$\therefore$ $\angle OPM = 90^0 - \angle POM = 90^0 - \theta$

ଏଣୁ $\angle OPM$ ଓ $\angle POM$ ଅନୁପୂରକ କୋଣ ଅଟନ୍ତି ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ସମକୋଣୀ Δ PMO ରେ

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \quad \cos\theta = \frac{OM}{OP} \text{ ଓ } \tan\theta = \frac{PM}{OM}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} \text{ ଓ } \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

ସମକୋଣୀ Δ OPM ରେ $90^0 - \theta$ କୋଣ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ନେଲେ

$$\sin(90^0 - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos\theta$$

$$\cos(90^0 - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin\theta$$

$$\tan(90^0 - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot\theta$$

$$\cot(90^0 - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan\theta$$

$$\text{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec\theta$$

ଓ $$\sec(90^0 - \theta) = \frac{OP}{PM} = \text{cosec}\,\theta$$

ଉପରୋକ୍ତ ଛଅଟି ଫଳାଫଳ ଅନୁପୂରକ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଭାବେ ଜଣା ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\sin(90^0 - 20^0) = \cos 20^0$, ବାହ୍ୟ $\sin 70^0 = \cos 20^0$

$\tan(90^0 - 40^0) = \cot 40^0$, ବାହ୍ୟ $\tan 50^0 = \cot 40^0$

ଓ ସେହିପରି ..

ଆସ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନେବା ଓ ଉପରୋକ୍ତ ଫଳାଫଳର ବ୍ୟବହାର ବର୍ଣ୍ଣନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 22.25 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan 13^0 = \cot 77^0$

ସମାଧାନ :

ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ $= \cot 77^0$

$= \cot(90^0 - 13^0)$ $\quad (\because \cot(90^0 - \theta) = \tan\theta)$

$= \tan 13^0$

$=$ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\tan 13^0 = \cot 77^0$

ଉଦାହରଣ 22.26 : $\sin^2 40^0 - \cos^2 50^0$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\cos 50^0 = \cos(90^0 - 40^0)$ $\quad [\because \cos(90^0 - \theta) = \sin\theta]$

$= \sin 40^0$

$\therefore \sin^2 40^0 - \cos^2 50^0 = \sin^2 40^0 - \sin^2 40^0$

ଉଦାହରଣ 22.27 : $\dfrac{\cos 41^0}{\sin 49^0} + \dfrac{\sec 37^0}{\text{cosec}\, 53^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\sin 49^0 = (90^0 - 41^0) = \cos 41^0 \quad [\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta]$

ଓ $\operatorname{cosec} 53^0 = \operatorname{cosec}(90^0 - 37^0) = \sec 37^0 \quad [\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta]$

$$\therefore \quad \frac{\cos 41^0}{\sin 49^0} + \frac{\sec 37^0}{\cos ec\, 53^0} = \frac{\cos 41^0}{\cos 41^0} + \frac{\sec 37^0}{\sec 37^0} = 1 + 1 = 2$$

ଉଦାହରଣ 22.28 :

ଦର୍ଶାଅ ଯେ $3 \sin 17^0 . \sec 73^0 + 2 \tan 20^0 . \tan 70^0 = 5$

ସମାଧାନ :

ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱ $= 3 \sin 17^0 . \sec 73^0 + 2 \tan 20^0 . \tan 70^0$

$= 3 \sin 17^0 . \sec(90^0 - 17^0) + 2 \tan 20^0 . \tan(90^0 - 20^0)$

$= 3 \sin 17^0 . \operatorname{cosec} 17^0 + 2 \tan 20^0 . \cot 20^0$

. . . [$\because \sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$ ଓ $\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$]

$$= 3 \sin 17^0 \frac{1}{\sin 17^0} + 2 \tan 20^0 \frac{1}{\tan 20^0}$$

$= 3 + 2 = 5 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 22.29 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\tan 7^0 . \tan 23^0 . \tan 67^0 . \tan 83^0 = 1$

ସମାଧାନ : $\tan 67^0 = \tan(90^0 - 23^0) = \cot 23^0$

ଏବଂ, $\tan 83^0 = \tan(90^0 - 7^0) = \cot 7^0$

ବର୍ତ୍ତମାନ, ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \tan 7^0 . \tan 23^0 . \tan 67^0 . \tan 83^0$

$= \tan 7^0 . \tan 23^0 . \cot 23^0 . \cot 7^0$

$= (\tan 7^0 . \cot 7^0)(\tan 23^0 . \cot 23^0)$

$= 1.1$

$=$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଅତଏବ, $\tan 7^0 . \tan 23^0 . \tan 67^0 . \tan 83^0 = 1$

ଉଦାହରଣ 22.30 : ଯଦି $\tan A = \cot B$, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $A + B = 90^0$

ସମାଧାନ : ଆମକୁ ଦତ୍ତ ଅଛି, $\tan A = \cot B$

କିମ୍ବା, $\tan A = \tan(90^0 - B) \quad [\because \cot\theta = \tan(90^0 - \theta)]$

$\therefore \quad A = 90^0 - B$

କିମ୍ବା, $A + B = 90^0$

ଉଦାହରଣ 22.31 : $\triangle$ ABC ପାଇଁ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}$, ଯେଉଁଠାରେ A, B ଓ C ଯଥାକ୍ରମେ $\triangle$ABC ର କୋଣ ତ୍ରୟ ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟର ମାପର ସମଷ୍ଟି 180^0 ।

$\therefore \quad A + B + C = 180^0$

କିମ୍ବା $\quad B + C = 180^0 - A$

କିମ୍ବା $\quad \frac{B+C}{2} = 90^0 - \frac{A}{2}$

$\therefore \quad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \frac{A}{2}\right)$

କିମ୍ବା $\quad \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

ଉଦାହରଣ 22.32 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\frac{\cos\theta}{\sin(90^0-\theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^0-\theta)} = 2$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ - $\frac{\cos\theta}{\sin(90^0-\theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^0-\theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\sin\theta}$

[$\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$ ଓ $\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$]

$= 1 + 1 = 2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\quad \frac{\cos\theta}{\sin(90^0-\theta)} + \frac{\sin\theta}{\cos(90^0-\theta)} = 2$

ଉଦାହରଣ 22.33 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\frac{\sin(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)} + \frac{\cos(90^0-\theta)}{\sec(90^0-\theta)} = 1$

ସମାଧାନ :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ - $\frac{\sin(90^0-\theta)}{\operatorname{cosec}(90^0-\theta)} + \frac{\cos(90^0-\theta)}{\sec(90^0-\theta)}$

$= \frac{\cos\theta}{\sec\theta} + \frac{\sin\theta}{\operatorname{cosec}\theta}$

[$\because \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$ ଓ $\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$, $\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$ ଓ $\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$]

ଟିପ୍ପଣୀ

$$= \cos\theta \times \frac{1}{\sec\theta} + \sin\theta \times \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$

$$= \cos\theta \,.\, \cos\theta + \sin\theta \,.\, \sin\theta$$

$$\left[\because \frac{1}{\sec\theta} = \cos\theta \text{ ଓ } \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta} = \sin\theta\right]$$

$= \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଏଣୁ $\dfrac{\sin(90^0 - \theta)}{\operatorname{cosec}(90^0 - \theta)} + \dfrac{\cos(90^0 - \theta)}{\sec(90^0 - \theta)} = 1$

ଉଦାହରଣ 22.34 : ସରଳ କର - $\dfrac{\cos(90^0 - \theta)\sec(90^0 - \theta)\tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^0 - \theta)\sin(90^0 - \theta)\cot\theta} + \dfrac{\tan(90^0 - \theta)}{\cot\theta}$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଟି -

$$= \frac{\cos(90^0 - \theta)\sec(90^0 - \theta)\tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^0 - \theta)\sin(90^0 - \theta)\cot\theta} + \frac{\tan(90^0 - \theta)}{\cot\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta \,.\, \operatorname{cosec}\theta \,.\, \tan\theta}{\operatorname{cosec}(90^0 - \theta)\sin(90^0 - \theta)\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{\cot\theta}$$

$= 1 + 1$ [$\because \sin\theta \,.\, \operatorname{cosec}\theta = 1$ ଓ $\sec\theta \,.\, \cos\theta = 1$]

$= 2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

ଉଦାହରଣ 22.35 : $\tan 68^0 + \sec 68^0$, ଏହାକୁ 0^0 ଓ 45^0 କୋଣ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୋଣ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ $\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$ ଓ $\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$

$\therefore$ $\tan 68^0 = \tan(90^0 - 22^0) = \cot 22^0$

ଓ $\sec 68^0 = \sec(90^0 - 22^0) = \operatorname{cosec} 22^0$

ଏଣୁ $\tan 68^0 + \sec 68^0 = \cot 22^0 + \operatorname{cosec} 22^0$

ମନ୍ତବ୍ୟ : ଆମେ ଯେତେବେଳେ ଅନୁପୂରକ କୋଣର ଧାରଣା ବ୍ୟବହାର କରୁଛନ୍ତି, ସାଧାରଣ ଭାବେ ଆମେ ଯେଉଁ କୋଣଟିର ମାନ 45^0 ରୁ ବୃହତ୍ତର ତାହାକୁ ତାର ଅନୁପୂରକ କୋଣକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରିଥାଉ ।

ଉଦାହରଣ 22.36 : ଯଦି $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$ ଯେଉଁଠାରେ 2A ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ, A ର ମାନ କର ।

ସମାଧାନ :

ଆମକୁ ଦତ୍ତ ଅଛି - $\tan 2A = \cot(A - 18^0)$

କିମ୍ବା $\cot(90^0 - 2A) = \cot(A - 18^0)$ [$\because \cot(90^0 - 2A) = \tan 2A$]

କିମ୍ବା $(90^0 - 2A) = A - 18^0$

କିମ୍ବା $3A = 90^0 + 18^0$

କିମ୍ବା $3A = 108^0$

କିମ୍ବା $A = 36^0$

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 22.6

1. ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
   (i) $\cos 55^0 = \sin 35^0$
   (ii) $\sin^2 11^0 - \cos^2 79^0 = 0$
   (iii) $\cos^2 51^0 - \sin^2 39^0 = 0$

2. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) $\dfrac{3 \sin 19^0}{\cos 71^0}$
   (ii) $\dfrac{\tan 65^0}{2 \cos 25^0}$
   (iii) $\dfrac{\cos 89^0}{3 \sin 1^0}$
   (iv) $\cos 48^0 - \sin 42^0$
   (v) $\dfrac{3 \sin 5^0}{\cos 85^0} + \dfrac{2 \tan 33^0}{\cot 57^0}$
   (vi) $\dfrac{\cot 54^0}{\tan 36^0} + \dfrac{\tan 20^0}{\cot 70^0} - 2$
   (vii) $\sec 41^0 . \sin 49^0 + \cos 49^0 . \operatorname{cosec} 41^0$
   (viii) $\dfrac{\cos 75^0}{\sin 15^0} + \dfrac{\sin 12^0}{\cos 78^0} - \dfrac{\cos 18^0}{\sin 72^0}$

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
   (i) $\left(\dfrac{\sin 47^0}{\cos 43^0}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 43^0}{\sin 47^0}\right)^2$
   (ii) $\dfrac{\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0}{3 (\sin^2 59^0 + \sin^2 31^0)}$

4. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ :
   (i) $\sin \theta \ . \ \cos (90^0 - \theta) = \cos \theta \ . \ \sin (90^0 - \theta) = 1$

ଟିପ୍ପଣୀ

(ii) $\cos\theta \cdot \cos(90^0 - \theta) - \sin\theta \cdot \sin(90^0 - \theta) = 0$

(iii) $\dfrac{\cos(90^0 - \theta)}{1 + \sin(90^0 - \theta)} + \dfrac{1 + \sin(90^0 - \theta)}{\cos(90^0 - \theta)} = 2\,\mathrm{cosec}\,\theta$

(iv) $\sin(90^0 - \theta)\cos(90^0 - \theta) = \dfrac{\tan(90^0 - \theta)}{1 + \tan(90^0 - \theta)}$

(v) $\tan 45^0 . \tan 13^0 . \tan 77^0 . \tan 85^0 = 1$

(vi) $2 \tan 15^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 75^0 = 2$

(vii) $\sin 20^0 . \sin 70^0 - \cos 20^0 . \cos 70^0 = 0$

5. ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\sin(50^0 + \theta) - \cos(40^0 - \theta) = 0$

6. ଯଦି $\sin A = \cos B$ ଯେଉଁଠାରେ A ଓ B ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $A + B = 90^0$ ।

7. Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ :

(i) $\tan\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cot\left(\dfrac{A}{2}\right)$

(ii) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{C}{2}\right)$

8. $\sin 59^0 + \mathrm{cosec}\, 85^0$ କୁ 0^0 ଓ 45^0 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତମାନଙ୍କର ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

9. $\sec 46^0 - \cos 87^0$ କୁ 0^0 ଓ 45^0 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତମାନଙ୍କର ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

10. $\sec 62^0 + \sec 69^0$ କୁ 0^0 ଓ 45^0 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା କୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତମାନଙ୍କର ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ନିମ୍ନରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ । (11-12)

11. $\dfrac{\sin 40^0}{2\cos 50^0} - \dfrac{2\cos 41^0}{3\,\mathrm{cosec}\, 49^0}$ ର ମୂଲ୍ୟ -

(i) -1 (ii) $\dfrac{1}{6}$ (iii) $-\dfrac{1}{6}$ (iv) 1

12. ଯଦି $\sin(\theta + 36^0) = \cos\theta$, ଯେଉଁଠାରେ $\theta + 36^0$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ, ତେବେ θ ର ମାନ –

(i) 54^0 (ii) 18^0 (iii) 21^0 (iv) 27^0

ଟିପ୍ପଣୀ

ଆମେ କ'ଣ ଶିଖିଲେ

- ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ Δ ABC ପାଇଁ ଆମେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ।

$$\cos\theta = \frac{\theta \text{ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣ}} = \frac{AB}{AC}$$

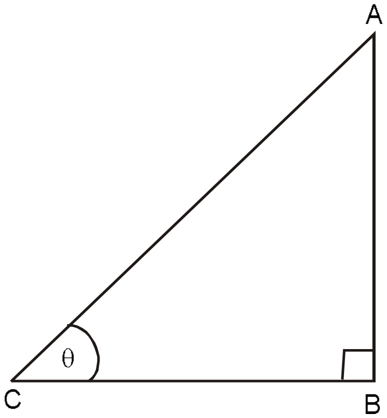
$$\cos\theta = \frac{\theta \text{ କୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣ}} = \frac{BC}{AC}$$

$$\tan\theta = \frac{\theta \text{ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ}}{\theta \text{ କୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ}} = \frac{AB}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{\theta \text{ କୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ}}{\theta \text{ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{କର୍ଣ୍ଣ}}{\theta \text{ କୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ}} = \frac{AC}{BC}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{କର୍ଣ୍ଣ}}{\theta \text{ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ}} = \frac{AC}{AB}$$



- ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ନିମ୍ନ ସଂପର୍କ ଥାଏ ।

(i) $\tan\theta \ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ (ii) $\cot\theta \ \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(iii) $\sec\theta \ \frac{1}{\cos\theta}$ (iv) $\operatorname{cosec}\theta \ \frac{1}{\sin\theta}$

(v) $\cot\theta \ \frac{1}{\tan\theta}$

- ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲା -

(i) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(ii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

(iii) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

- ଦୁଇଟି କୋଣକୁ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ କୁହାଯାଏ ଯାହାର ସମଷ୍ଟି 90^0 ।

- $\sin(90^0 - A) = \cos A$, $\cos(90^0 - A) = \sin A$ ଓ $\tan(90^0 - A) = \cot A$ ।
- $\cos(90^0 - A)$, $\sec(90^0 - A) = \text{cosec}\, A$ ଓ $\cot(90^0 - A) = \tan A$ ।
- Supportive Website :

  http://www.wikipedia.org

  http://mathworldwolfram.com

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀ

1. ଯଦି $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A$ ଓ $\tan A$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

2. ଯଦି $\tan A = \frac{20}{21}$, $\text{cosec}\, A$ ଓ $\sec A$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଯଦି $\cot\theta = \frac{3}{4}$, $\sin\theta + \cos\theta$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ଯଦି $\sec\theta = \frac{m}{n}$, $\sin\theta$ ଓ $\tan\theta$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

5. ଯଦି $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\frac{\sin\theta . \tan\theta - 1}{2\tan^2\theta}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

6. ଯଦି $\sec\theta = \frac{5}{4}$, $\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଯଦି $\tan A = 1$ ଓ $\tan B = \sqrt{3}$, $\cos A - \sin A . \sin B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ନିମ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ଦିଅ ।(8 - 20)

8. $(\sec\theta + \tan\theta) = (1 - \sin\theta) = \cos\theta$

9. $\frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = \frac{\text{cosec}\,\theta}{\sec\theta}$

10. $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = (\text{cosec}\,\theta - \cot\theta)^2$

11. $\dfrac{\tan\theta + \sin\theta}{\tan\theta - \sin\theta} = \dfrac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}$

12. $\dfrac{\tan A + \cot B}{\cot A + \tan B} = \tan A . \cot B$

13. $\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{1-\cos A}} = \dfrac{\cos A}{1-\sin A}$

14. $\sqrt{\dfrac{\operatorname{cosec} A + 1}{\operatorname{cosec} A - 1}} = \dfrac{\cos A}{1-\sin A}$

15. $\sin^3 A - \cos^3 A = (\sin A - \cos A)(1 + \sin A . \cos A)$

16. $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \cos A + \sin A$

17. $\sqrt{\dfrac{\sec A - 1}{\sec A + 1}} + \sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = 2\operatorname{cosec} A$

18. $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \dfrac{1}{(\tan A + \cot A)}$

19. $(1 + \cot\theta - \operatorname{cosec}\theta)(1 + \tan\theta + \sec\theta) = 2$

20. $2(\sin^6\theta + \cos^6\theta) - 3(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + 1 = 0$

21. ଯଦି $\sec\theta + \tan\theta = p$, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $\sin\theta = \dfrac{p^2 - 1}{p^2 + 1}$ ।

22. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{\cos(90^0 - A)}{1+\sin(90^0 - A)} + \dfrac{1+\sin(90^0 - A)}{\cos(90^0 - A)} = 2\sec(90^0 - A)$ ।

23. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{\sin(90^0 - A)\cos(90^0 - A)}{\tan - A} = \sin^2(90^0 - A)$ ।

24. ଯଦି $\tan\theta = \dfrac{3}{4}$ ଓ $\theta + \alpha = 90^0$, $\cot\alpha$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

25. ଯଦି $\cos(2\theta + 54^0) = \sin\theta$ ଓ $2\theta + 54^0$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ, θ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

26. ଯଦି $\sec Q = \operatorname{cosec} P$ ଓ P ଓ Q ସୂକ୍ଷ୍ମ କୋଣ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ $P + Q = 90^0$ ।

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବାର ଉତ୍ତର

22.1

1. (i) $\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\cos\theta = \frac{12}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{5}$, $\sec\theta = \frac{13}{12}$ ଓ $\cot\theta = \frac{12}{5}$

(ii) $\sin\theta = \frac{3}{5}$, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3}$, $\sec\theta = \frac{5}{4}$ ଓ $\cot\theta = \frac{4}{3}$

(iii) $\sin\theta = \frac{24}{25}$, $\cos\theta = \frac{7}{25}$, $\tan\theta = \frac{24}{7}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{25}{24}$, $\sec\theta = \frac{25}{7}$ ଓ $\cot\theta = \frac{7}{24}$

(iv) $\sin\theta = \frac{4}{5}$, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{4}$, $\sec\theta = \frac{5}{3}$ ଓ $\cot\theta = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos A = \frac{4}{\sqrt{41}}$ ଓ $\tan A = \frac{5}{4}$

3. $\sin C = \frac{40}{41}$, $\cot C = \frac{9}{40}$ ଓ $\cos C = \frac{40}{41}$

4. $\sec C = \sqrt{2}$, $\operatorname{cosec} C = \sqrt{2}$ ଓ $\cot C = 1$

5. (iv)

6. (ii)

22.2

1. $\sin C = \frac{3}{5}$, $\cos C = \frac{4}{5}$ ଓ $\tan C = \frac{3}{4}$

2. $\sin A = \frac{24}{25}$, $\text{cosec } A = \frac{25}{24}$ ଓ $\cot A = \frac{7}{24}$

3. $\sec P = \sqrt{2}$, $\cot P = 1$ ଓ $\text{cosec } P = \sqrt{2}$

4. $\tan R = \sqrt{3}$, $\text{cosec } R = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sin P = \frac{1}{2}$ ଓ $\sec P = \frac{2}{\sqrt{3}}$

5. $\cot \theta = \frac{24}{7}$, $\sin \theta = \frac{7}{24}$, $\sec \theta = \frac{25}{24}$ ଓ $\tan \theta = \frac{7}{24}$

6. $\sin P = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\cos P = \frac{5}{7}$, $\sin R = \frac{5}{7}$ ଓ $\cos R = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, $\sin P - \cos R = 0$

7. (iii)

22.3

1. $\cos \theta = \frac{21}{29}$ ଓ $\tan \theta = \frac{20}{21}$

2. $\sin \theta = \frac{24}{25}$ ଓ $\cos \theta = \frac{7}{25}$

3. $\sin A = \frac{24}{25}$ ଓ $\tan A = \frac{24}{7}$

4. $\cot \theta = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ ଓ $\text{cosec } \theta = \frac{n}{\sqrt{n^2 - m^2}}$

5. $-\frac{256}{135}$

6. $\frac{27}{8}$

7. $\sin B = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ଓ $\tan B = \frac{2}{3}$

11. (ii)

22.4

1. $\cot B = \sqrt{3}$ ଓ $\sec \theta = \frac{2}{\sqrt{3}}$

2. $\frac{3}{4}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\sin A = \frac{1}{2}$ ଓ $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

5. $-\frac{14}{3}$

22.5

17. (iii)
18. (ii)
19. (i)
20. (iii)

22.6

1. (i) 3   (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{1}{3}$ (iv) 0

   (v) 5   (vi) 0   (vii) 2   (viii) 1

3. (i)2   (ii) $\frac{1}{3}$

8. $\cot 31^0 + \sec 5^0$
9. $\operatorname{cosec} 44^0 - \sin 3^0$
10. $\operatorname{cosec}^2 28^0 + \operatorname{cosec}^2 21^0$
11. (ii)
12. (iv)

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନର ଉତ୍ତର

1. $\cos A = \frac{3}{5}$ ଓ $\tan A = \frac{4}{3}$

2. $\operatorname{cosec} A = \frac{29}{20}$ ଓ $\sec A = \frac{29}{21}$

3. $\frac{7}{5}$

4. $\sin\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$ ଓ $\tan\theta = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$

5. $\frac{3}{160}$

6. $\frac{3}{7}$

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

24. $\frac{3}{4}$

25. 12^0