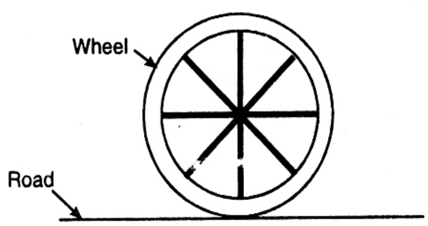
୧୭

ଛେଦକ, ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଧର୍ମ

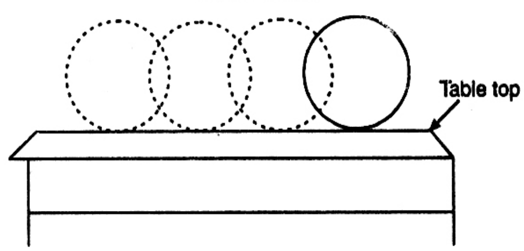
ରାସ୍ତାରେ ଚାଲୁଥିବା ସାଇକେଲଟିକୁ ଦେଖ । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ ସର୍ବଦା ସାଇକେଲର ଚକଦ୍ୱୟ ରାସ୍ତାର ଏକ ସୀମିତ ଅଂଶକୁ ଲାଗି ରହିଥିବ । ରାସ୍ତାର ଏହି ସୀମିତ ଅଂଶ ବାସ୍ତବତଃ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ।

ତୁମେ ଯଦି ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସମତଳ ପୃଷ୍ଠ ଯଥା ଏକ ଟେବୁଲ୍ ଉପରେ ଗଡ଼ାଇ ଦିଅ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମୁହୂର୍ତ୍ତରେ ଗଡୁଥିବା ମୁଦ୍ରାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦ, ମୁଦ୍ରାଟି ଯେଉଁ ପୃଷ୍ଠ ଉପରେ ଗଡୁଥାଏ, ସେ ପୃଷ୍ଠକୁ ଛୁଇଁଥାଏ ।

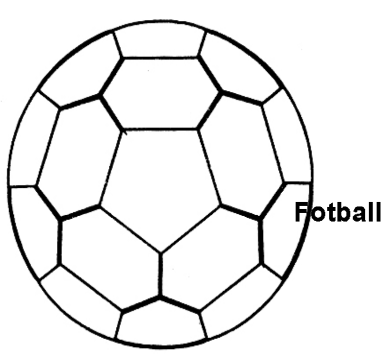
ଉପରୋକ୍ତ ପରିସ୍ଥିତିମାନଙ୍କରୁ ଆମେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ?



(i)



(ii)



(iii)

Fig. 17.1

ତୁମେ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଚକ ବା ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ରୂପେ ଏବଂ ତାହା ଲାଗି ରହିଥିବା ପୃଷ୍ଠ (ରାସ୍ତା ବା ଟେବୁଲର ପୃଷ୍ଠ)କୁ ଏକ ରେଖାରୂପେ ବିଚାର କର, ତେବେ ଉକ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ ଯେ ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ରେଖା ସ୍ପର୍ଶ କରେ । ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଗୋଟିଏ ରେଖା ମଧ୍ୟରେ କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ରହିପାରେ ସେ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ଏହି ପାଠରେ ପଢ଼ିବା ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ବିଭିନ୍ନ ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ଏକ ବୃତ୍ତର ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଜାଣିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ ସମାନ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ;
- ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ଛେଦକ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ତାରକା ଚିହ୍ନିତ ନ ହୋଇଥିବା ଫଳାଫଳ (ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ାରେ ପଦତ୍ତ)ର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ଦ୍ୱାରା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବ;

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- କୋଣ ଓ ରେଖାଖଣ୍ଡର ମାପ ପ୍ରକ୍ରିୟା
- ଦତ୍ତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ
- ଦତ୍ତ ରେଖା ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇଥିବା ଏବଂ ଲମ୍ବ ହୋଇଥିବା ରେଖା ଅଙ୍କନ
- ରେଖା ଓ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧିତ ପୂର୍ବ ପଠିତ ଫଳାଫଳ, ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ଏବଂ ବୃତ୍ତ ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟର ଧାରଣା
- ପିଥାଗୋରାସଙ୍କ ଉପାପାଦ୍ୟର ଧାରଣା

17.1 ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ଏକ ଉପକ୍ରମ

ପୂର୍ବ ପାଠମାନଙ୍କରେ ତୁମେ ରେଖା ଓ ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ମନେପକାଅ ଯେ ଏକ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଉକ୍ତ ସମତଳ ଉପରେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁର ଲୋକସ୍ ହେଉଛି ଏକ ବୃତ୍ତ । ଉପରୋକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ । ତୁମେ ମ୍ଭ ଜାଣ ଯେ ଏକ ରେଖା ହେଉଛି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍ ଏବଂ ଏହା ଉଭୟ ଦିଗରେ ଅସୀମ ଭାବରେ ବିସ୍ତୃତ । ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ହେଉଛି ଏକ ରେଖାର ଏକ ଅଂଶ ଏବଂ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଏହା ସୀମିତ ।

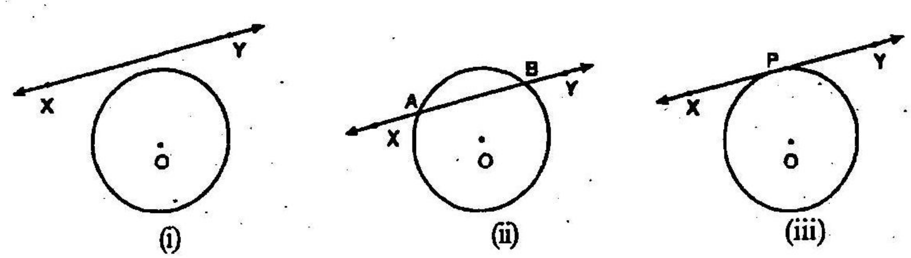


Fig. 17.2

ବର୍ତ୍ତମାନ ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଓ ଗୋଟିଏ ରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କରିବା । ତିନୋଟି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିସ୍ଥିତି ଉପୁଜିପାରେ ଯାହା ଚିତ୍ର 17.2 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

ଚିତ୍ର 17.2(i)ରେ XY ରେଖା ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ ସେ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ନାହିଁ । ଚିତ୍ର 17.2(ii)ରେ, XY ସରଳରେଖା ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ A ଏବଂ B ଠାରେ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରୁଛି । ଚିତ୍ର 17.2(iii)ରେ, XY ରେ ରେଖା କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରୁଛି । ଏଠାରେ ବୃତ୍ତକୁ XY ରେଖା P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛି ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ଆମେ କହିପାରୁ, ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏକ ରେଖା ଓ ଏକ ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ତିନୋଟି ସମ୍ଭାବନା ଥିବାର କହିପାରୁ ।

(i) ରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ, ଅର୍ଥାତ୍ ରେଖାଟି ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ରେଖାର ଗୋଟିଏ ଅଂଶ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ, ଛେଦ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ ରେଖାର ଅବଶିଷ୍ଟାଂଶ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(iii) ରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । ଏଣୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞା କରିବା ।

ସ୍ପର୍ଶକ : ଯେଉଁ ରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକରେ ତାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକଟି ବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରେ, ତାକୁ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

ଏଣୁ ଚିତ୍ର 17.2(iii)ରେ, XY ରେଖା ହେଉଛି ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ P ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ।

ଛେଦକ : ଯେଉଁ ରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ, ତାହା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ (ସାଧାରଣ ଭାବରେ ଛେଦକ ରେଖା କୁହାଯାଏ) ।

ଚିତ୍ର 17.2(ii)ରେ XY ରେଖା ହେଉଛି O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ । A ଓ B ହେଉଛନ୍ତି ଛେଦକ ରେଖା XY ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ।

17.2 ସ୍ପର୍ଶକ – ଏକ ଚରମ ପରିସ୍ଥିତି

O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଛେଦକ XY କଥା ବିଚାର କରାଯାଉ । ମନେକରାଯାଉ XY ଛେଦକ ଏବଂ ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ସ୍ଥିର ଥାଇ XY ଛେଦକ A ର ଚାରିପାଖରେ ଘୁରୁଛି ଏବଂ ଏହାର ବିଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଏହା ବୃତ୍ତକୁ B', B'', B''', B'''' ଆଦି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି (ଚିତ୍ର 17.3) । ଏହି ଘୂରିବା ଅବସ୍ଥାରେ ଏକ ଅବସ୍ଥା ଆସିଲା ଯେତେବେଳେ ଏହା XAY ଅବସ୍ଥାରେ ପହଞ୍ଚିଲା । ସେହି ଅବସ୍ଥାରେ ରେଖାଟି ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି A ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଲା ।

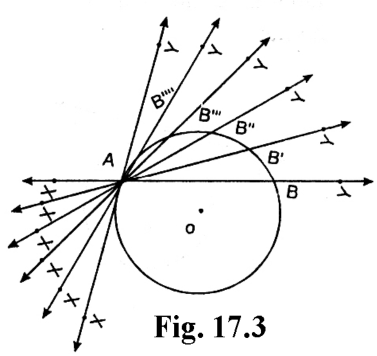


Fig. 17.3

ଏଣୁ ଆମେ କହୁ :

ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ରେଖାର ଏକ ଚରମ ଅବସ୍ଥା ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶକ, ଯେତେବେଳେ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ସହ ମିଶିଯାଆନ୍ତି ।

17.3 ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ

ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏହାର P ବିନ୍ଦୁରେ XY ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉ । OP ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର । ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ Q, R, S ଓ T ବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଉ ଏବଂ OQ, OR, OS, OT ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ । ଯେହେତୁ Q, R, S ଓ T ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ,

$\therefore$ OQ, OR, OS ଏବଂ OT ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅପେକ୍ଷା OP କ୍ଷୁଦ୍ରତର । ପୂର୍ବରୁ ପଢ଼ିଥିବା ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ ଆମେ ଜାଣୁ,

ଏକ ରେଖାର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ରେଖାପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଲମ୍ବ ହେଉଛି କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

O ବିନ୍ଦୁରୁ XY ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସମସ୍ତ ରେଖାଖଣ୍ଡ ମଧ୍ୟରେ OP କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ।

$\therefore OP \perp XY$ ।

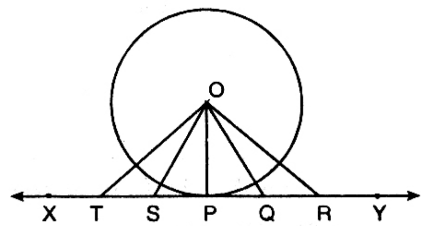


Fig. 17.4

ଏଣୁ ଆମେ କହିବା

ଗୋଟଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଲମ୍ବ ଅଟେ ।

ଚିତ୍ର 17.4 ରେ ଥିବା $\angle OPX$ ଏବଂ $\angle OPY$ କୁ ମାପିଲେ, ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଫଳାଫଳର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇପାରିବ ।

17.4 ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତି

O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଚିହ୍ନଟ କର । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ରେଖାମାନ ଅଙ୍କନ କର । ଏହି କେତେକ ରେଖା PT, PA, PB, PC, PD ଏବଂ PT ଚିତ୍ର 15.5 ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେତୋଟି ବୃତ୍ତକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଛନ୍ତି ? କେବଳ ଦୁଇଟି ।

ଆଉ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ଏହା ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁଟିଏ ନେଇ ଏହି ପରୀକ୍ଷା ଆଉଥରେ ସମ୍ପାଦନ କର । ତୁମେ ସେହି ଫଳାଫଳ ପୁନଶ୍ଚ ଦେଖିବ । ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା

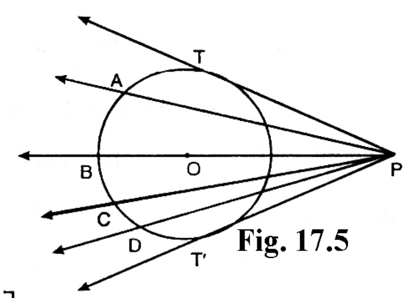


Fig. 17.5

ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ।

ଏକ ଉପରେ ବିନ୍ଦୁଟିଏ P ନେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରେ ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବ କି ? ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବ । ଯଦି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ P ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଏ, ସେ କ୍ଷେତ୍ରରେ କ'ଣ ହେବ ? ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଯେ କୌଣସି ରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଏଣୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି କୌଣସି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

(A) ବର୍ତ୍ତମାନ PT ଓ PT'ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ । ତୁମେ ଦେଖିବ

$$PT = PT' \ldots\ldots\ldots\ldots (i)$$

(B) ଦତ୍ତ : O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତପ୍ରତି PT ଓ PT' ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ (ଚିତ୍ର 17.6 ଦେଖ) ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $PT = PT'$

ଅଙ୍କନ : OP, OT ଏବଂ OT' ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔOPT ଏବଂ $\Delta OPT'$ ରେ

$\angle OPT = \angle OT'P$ [ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ହେତୁ]

$OT = OT' \therefore \Delta OPT \cong \Delta OPT'$ [ସ.କ.ବା ସର୍ବସମତା]

$\therefore PT = PT'$

ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ ସମାନ ।

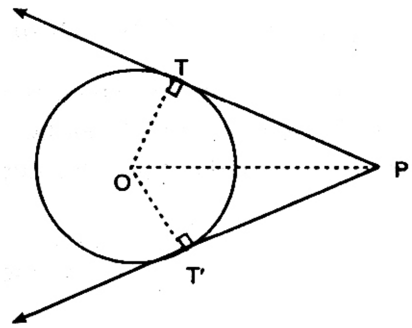


Fig. 17.6

ଚିତ୍ର 16.7 ରୁ ଆମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିପାରୁଛୁ,

$\angle OPT = \angle OPT$ [$\because \Delta OPT \cong \Delta OPT'$]

ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟ, ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଓ କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖା ପ୍ରତି ସମାନ ଭାବରେ ଆନତ ।

ଆସ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ଉପରୋକ୍ତ ଫଳାଫଳ ଗୁଡ଼ିକର ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 17.1 : ଚିତ୍ର 17.7 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 3 ସେ.ମି. । P ଏହି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ PT ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ । $OP = 5$ ସେ.ମି. ହେଲେ, ସ୍ପର୍ଶକ PT ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\angle OPT = 90^0$, $PT = x$ ସେ.ମି. ହେଉ ।

ସମକୋଣୀ ΔOTP ରେ, ଆମ୍ଭେ ଜାଣୁ,

$OP^2 = OT^2 + P$

ବା $5^2 = 3^2 + x^2$

ବା $x^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore x = 4$; ଅର୍ଥାତ୍ PT ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 ସେ.ମି. ।

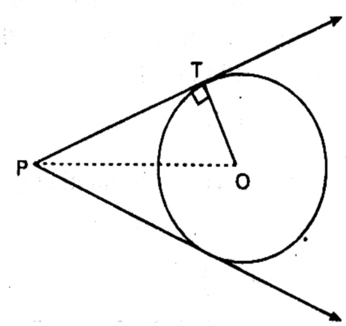


Fig. 17.7

ଉଦାହରଣ 17.2 : ଚିତ୍ର 17.8 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ PT ଓ PT' ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି । କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା 25 ସେ.ମି. ଏବଂ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 7 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ଓ PT' ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $OP = 25$ ସେ.ମି. ଏବଂ $OT = 7$ ସେ.ମି. ।

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\angle OTP = 90^0$

$\therefore PT^2 = OP^2 - OT^2$

$= 625 - 49 = 576 = (24)^2$

$\therefore PT = 24$ ସେ.ମି. ।

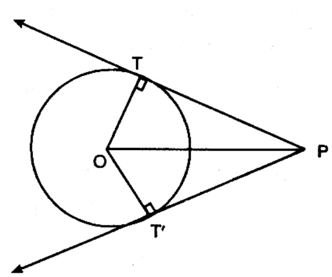


Fig. 17.8

ଆମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣୁ

$PT = PT'$

$\therefore PT' = 24$ ସେ.ମି. ।

ଉଦାହରଣ 17.3 : ଚିତ୍ର 17.9 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁ ତିନୋଟି ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ । ସ୍ପର୍ଶକ AP, BQ ଓ CR ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ 3 ସେ.ମି., 4 ସେ.ମି. ଓ 3.5 ସେ.ମି. । ΔABC ର ପରିସୀମା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।

$\therefore AP = AR$

$BP = BQ$

$CQ = CR$

$\therefore AP = AR = 3$ ସେ.ମି.

$BP = BQ = 4$ ସେ.ମି.

ଏବଂ $CR = CQ = 3.5$ ସେ.ମି.

$AB = AP + PB$

$= (3 + 4)$ ସେ.ମି. $= 7$ ସେ.ମି.

$BC = BQ + QC$

$= (4 + 3.5)$ ସେ.ମି. $= 7.5$ ସେ.ମି.

$CA = AR + CR$

$= (3 + 3.5)$ ସେ.ମି. $= 6.5$ ସେ.ମି.

$\therefore \Delta ABC$ ର ପରିସୀମା $= (7 + 7.5 + 6.5)$ ସେ.ମି. $= 21$ $(7 + 7.5 + 6.5)$

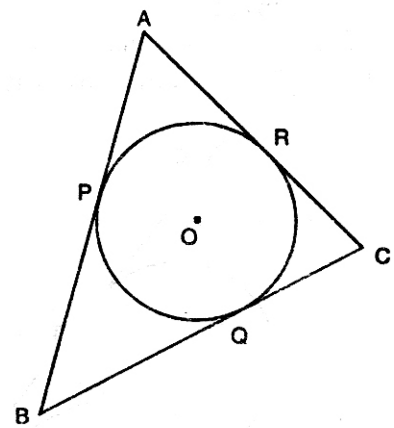


Fig. 17.9

ଉଦାହରଣ 17.4 : ଚିତ୍ର 17.10 ରେ $\angle AOB = 50^0$ । $\angle ABO$ ଏବଂ $\angle OBT$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $OA \perp XY$

$\Rightarrow \angle OAB = 90^0$

$\therefore \angle ABO = 180^0 - (\angle OAB + \angle AOB)$

$= 180^0 - (90^0 + 50^0) = 40^0$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $\angle OAB = \angle OBT$

$\Rightarrow \angle OBT = 40^0$

$\therefore \angle ABO = \angle OBT = 40^0$

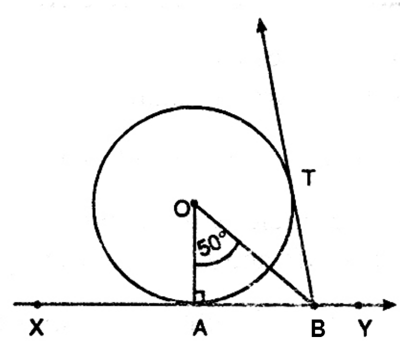


Fig. 17.10

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 17.1

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି .... ଅଟେ ।

(ii) ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ .... ।

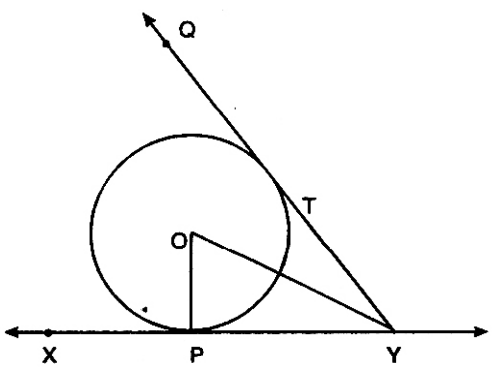
(iii) ଏକ ଛେଦକର ଚରମ ଅବସ୍ଥା ହେଉଛି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଯେତେବେଳେ .... ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ସହ ମିଶିଯାଆନ୍ତି ।

(iv) ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି .... ଗୋଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ।

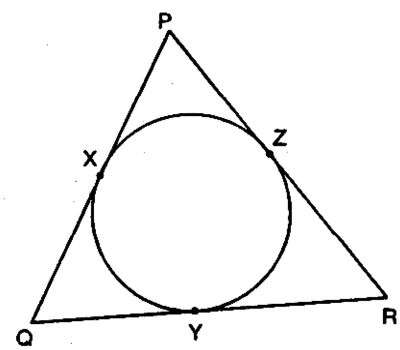
(v) ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ .... ।

2. ଚିତ୍ର 17.11ରେ $\angle POY = 40^0$ ହେଲେ $\angle OYP$ ଏବଂ $\angle OYT$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3. ଚିତ୍ର 17.12ରେ ΔPQR ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । $PX = 2.5$ ସେ.ମି., $RZ = 3.5$ ସେ.ମି. ଏବଂ ΔPQR ର ପରିସୀମା $= 18$ ସେ.ମି. ହେଲେ, QY ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 17.11



ଚିତ୍ର 17.12

4. ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଦ୍ୱୟ ସମାନ; ଏହି ସତ୍ୟ ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷା ପ୍ରଣାଳୀ ଲେଖ ।

17.5 ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃଛେଦୀ ଓ ବହିଃଛେଦୀ ଜ୍ୟା

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପାଠରେ ତୁମେ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ପଢ଼ିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ, ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦକଲେ, ଅଥବା ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାର ବର୍ଦ୍ଧିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦକଲେ, କ'ଣ ଫଳାଫଳ ମିଳେ, ତାହା ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ।

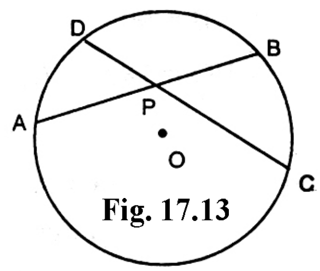


Fig. 17.13

ଆସ ନିମ୍ନ କାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ପାଦନ କରିବା :

ଯେକୌଣସି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରର ନାମ ଦିଅ O । ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା AB ଓ CD ଅଙ୍କନ କର । ଛେଦବିନ୍ଦୁର ନାମ ଦିଅ P । PD, PC, PA ଓ PB ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ସ୍ଥିର କର । $PA \times PB$ ଏବଂ $PC \times PD$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ ପାଇଥିବା ଗୁଣଫଳ ଦ୍ୱୟ ସମାନ । ଆଉ

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ଓ ତା'ର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କରି ପୂର୍ବ ପରୀକ୍ଷାକୁ ପୁନଃ ସମ୍ପାଦନ କର । ତୁମେ ପୁଣି ଦେଖିବ ଯେ

$PA \times PB = PC \times PD$

ବର୍ତ୍ତମାନ ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାର ବର୍ଦ୍ଧିତାଂଶ ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ସେପରି ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ନେଇ ନିମ୍ନ କାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ପାଦନ କରିବା ।

ଯେକୌଣସି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତା'ର କେନ୍ଦ୍ରର ନାମ ଦିଅ O । ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା BA ଓ DC ଅଙ୍କନ କର ଯେଉଁ ଦୁଇଟିର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିବ । PA, PB, PC ଓ PD ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପି ସ୍ଥିର କର । $PA \times PB$ ଏବଂ $PC \times PD$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

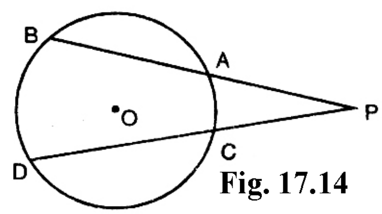


Fig. 17.14

ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ

$PA \times PB$ ର ଗୁଣଫଳ ଏବଂ $PC \times PD$ ର ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍, $PA \times PB = PC \times PD$

ଆଉ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଜ୍ୟାମାନ ନେଇ ପୁନର୍ବାର ଏହି ପରୀକ୍ଷା କର । ତୁମେ ପୁଣି ପାଇବ

$PA \times PB = PC \times PD$

ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ABCD ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ (ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅଥବା ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ)

$PA \times PB = PC \times PD$ ହୁଏ ।

7.6 ବୃତ୍ତର ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟରେ କି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି ଜାଣିବା ପାଇଁ ଆସ ନିମ୍ନ କାର୍ଯ୍ୟ ସମ୍ପାଦନ କରିବା । ଯେକୌଣସି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରର ନାମଦିଅ O । ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ PAB ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ PT ଅଙ୍କନ କର ।

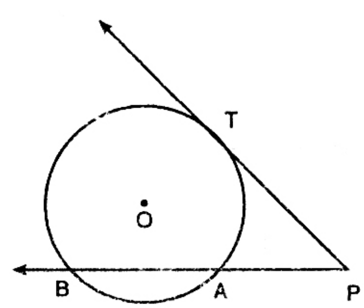


Fig. 17.15

PA, PB ଓ PT ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପ । $PA \times PB$ ର ଗୁଣଫଳ ଏବଂ $PT \times PT$ ବା PT^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । କ'ଣ ଦେଖୁଛ ?

ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ

$PA \times PB = PT^2$

ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏହି କାର୍ଯ୍ୟ ପୁନଃ ସମ୍ପାଦନ କର । ତୁମେ ପୁନର୍ବାର ସେହି ଫଳାଫଳ ପାଇବ ।

ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା

ଯଦି ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଛେଦକ PAB ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ PT ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକରେ, ତେବେ $PA \times PB = PT^2$ ହୁଏ ।

ଆସ ଉପରେ ପାଇଥିବା ଫଳାଫଳକୁ କେତେକ ଉଦାହରଣରେ ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 17.5 : ଚିତ୍ର 17.16ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ABCD ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । PA = 3 ସେ.ମି., PB = 2 ସେ.ମି. ଏବଂ PC = 1.5 ସେ.ମି. ହେଲେ, PD ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

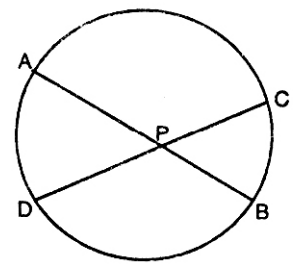


Fig. 17.16

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ PA = 3 ସେ.ମି., PB = 2 ସେ.ମି. ଏବଂ PC = 1.5 ସେ.ମି. ।

ମନେକରାଯାଉ ଯେ PD ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ସେ.ମି. ।

ଆମେ ଜାଣୁ, $PA \times PB = PC \times PD$

$$\Rightarrow 3 \times 2 = 1.5 \times x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \times 2}{1.5} = 4$$

$\therefore$ PD ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4 ସେ.ମି. ।

ଉଦାହରଣ 17.6 : ଚିତ୍ର 17.7 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ଅଙ୍କିତ ଏକ ଛେଦକ PAB ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଛେଦକ PAB ଉପରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ PT ସ୍ପର୍ଶକ, ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । PT = 8 ସେ.ମି. ଏବଂ OP = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ $PA \times PB = PT^2$ ସମ୍ପର୍କକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧକୁ x ମନେକରାଯାଉ ।

ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ OP = 10 ସେ.ମି. ।

$\therefore PA = PO - OA = (10 - x)$ ସେ.ମି.

ଏବଂ PB = OP + OB = 10 + x ସେ.ମି.

PT = 8 ସେ.ମି. ଲ

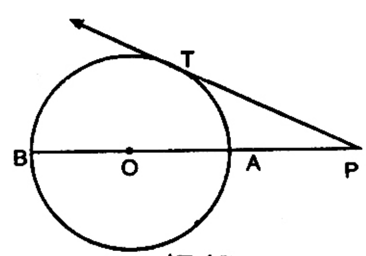


Fig. 17.17

ଆମେ ଜାଣୁ, $PA \times PB = PT^2$

$\therefore (10 - x)(10 + x) = 8^2$

ବା, $100 - x^2 = 64$

ବା, $x^2 = 36$ ବା, $x = 6$

ଅର୍ଥାତ୍, ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେଉଛି 6 ସେ.ମି. ।

ଉଦାହରଣ 17.7 :ଚିତ୍ର 17.18ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା BA ଓ DC ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି । PA = 4 ସେ.ମି., PB = 10 ସେ.ମି., CD = 3 ସେ.ମି. ହେଲେ, PC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $PA = 4$ ସେ.ମି., $PB = 10$ ସେ.ମି., $CD = 3$ ସେ.ମି. ।

ମନେକରାଯାଉ $PC = x$ ସେ.ମି. ।

ଆମେଜାଣୁ ଯେ $PA \times PB = PC \times PD$

ବା, $4 \times 10 = (x+3)x$

ବା, $x^2 + 3x - 40 = 0$

$(x+8)(x-5) = 0$

$\Rightarrow x = 5$

$\therefore PC = 5$ ସେ.ମି. ।

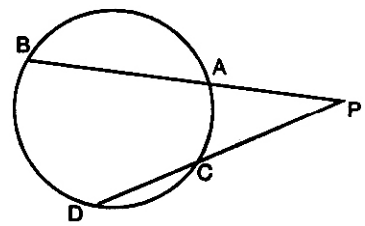
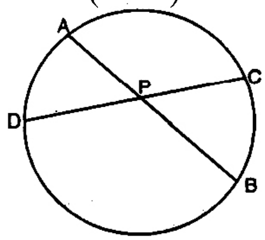


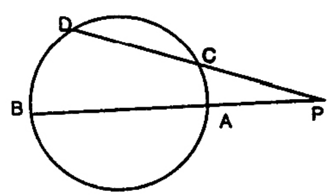
Fig. 17.18

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 17.2

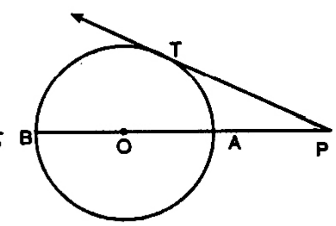
1. ଚିତ୍ର 17.19ରେ, $PA = 3$ ସେ.ମି., $PB = 6$ ସେ.ମି. ଏବଂ $PD = 4$ ସେ.ମି. ହେଲେ, PC ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
2. ଚିତ୍ର 17.19ରେ, $PA = 4$ ସେ.ମି., $PB = (x+3)$ ସେ.ମି., $PD = 3$ ସେ.ମି. ଏବଂ $PC = (x+5)$ ସେ.ମି. ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



ଚିତ୍ର 17.19



ଚିତ୍ର 17.20



ଚିତ୍ର 17.21

3. ଚିତ୍ର 17.20ରେ, $PA = 4$ ସେ.ମି., $PB = 10$ ସେ.ମି., $PC = 5$ ସେ.ମି. ହେଲେ, PD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
4. ଚିତ୍ର 17.20ରେ, $PC = 4$ ସେ.ମି., $PD = (x+5)$ ସେ.ମି., $PA = 5$ ସେ.ମି. ଏବଂ $PB = (x+2)$ ସେ.ମି. ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. ଚିତ୍ର 17.21ରେ, $PT = 2\sqrt{7}$ ସେ.ମି., $OP = 8$ ସେ.ମି., ଏବଂ କେନ୍ଦ୍ର O, ଛେଦକ PAB ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7.7 ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ

ଚିତ୍ର 17.22ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ସ୍ପର୍ଶକ XY । ସେହିଭଳି ଏକ ଚିତ୍ର ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ PQ ଜ୍ୟା ଅଙ୍କନ କର । ବୃହତ୍ ଚାପ PRQ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ R ଚିହ୍ନଟ କର ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ PSQ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ S ଚିହ୍ନଟ କର ।

ବୃହତ୍ ଚାପ PRQ ଓ ଜ୍ୟା PQ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡକୁ $\angle QPY$ ର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ PSQ ଓ ଜ୍ୟା PQ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡକୁ $\angle QPX$ ର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ କୁହାଯାଏ ।

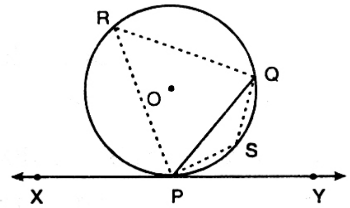


Fig. 17.22

ଆସ ଦେଖିବା, ଚିତ୍ରରେ ଥିବା ସ୍ପର୍ଶକ ଓ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଓ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି କି ।

QR ଏବଂ PR ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କର ।

$\angle PRQ$ ଏବଂ $\angle QPY$ (ଚିତ୍ର 17.22 ଦେଖ)କୁ ମାପ ।

କ'ଣ ଦେଖିଲ ? ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ $\angle PRQ = \angle QPY$ ।

ସମାନ ବା ଭିନ୍ନ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଅନ୍ୟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ସେହି କାର୍ଯ୍ୟ ପୁନଃ ସମ୍ପାଦନ କର । ତୁମେ ପୁଣି ଦେଖିବ ଯେ $\angle QPY = \angle PRQ$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\angle QPX$ ଏବଂ $\angle QSP$ କୁ ମାପ । ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ ଏହି କୋଣଦୁଇଟି ମଧ୍ୟ ସମାନ ।

ଏଣୁ ଆମେ କହିବା

ଏକ ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଜ୍ୟା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ଏହି କୋଣର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ସମାନ ।

ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ସାଧାରଣ ଭାବରେ "ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ" ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତିର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ।

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରର ନାମ ଦିଅ O ଏବଂ ଏକ ଜ୍ୟା PQ ଅଙ୍କନ କର । ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ $\angle PRQ$ ନିଅ (ଚିତ୍ର 17.23 ପରି) ।

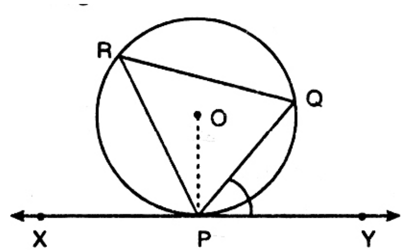


Fig. 17.23

P ଠାରେ $\angle QPY$ କୋଣ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $\angle QPY = \angle QRP$ ହେବ । ରେଖାଖଣ୍ଡ PY କୁ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବଢ଼ାଇ XY ରେଖା ଅଙ୍କନ କର । OP ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ $\angle OPY$ କୁ ମାପ ।

କ'ଣ ଦେଖିଲ ? ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ $\angle OPY = 90^0$ ।

ଏଥିରୁ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ XY ହେଉଛି ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବୃତ୍ତ ନେଇ ଏହି କାର୍ଯ୍ୟ ଏକାଧିକ ବାର ସମ୍ପାଦନ କର । ତୁମେ ସେହି ଫଳାଫଳ ପାଇବ । ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା

ଏକ ବୃତ୍ତର ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ସରଳ ରେଖାଟିଏ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଯଦି ସେହି ସରଳରେଖା ଓ ଜ୍ୟା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ, ଏହାର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ସହ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

ଆସ କେତେକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ଏହି ଫଳାଫଳର ବ୍ୟବହାର କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 17.8 : ଚିତ୍ର 17.24 ରେ, O କେନ୍ଦ୍ର ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର XY ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । ଯଦି AOB ଏକ ବ୍ୟାସ ଏବଂ $\angle PAB = 40^0$ ହୁଏ, ତେବେ $\angle APX$ ଓ $\angle BPY$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

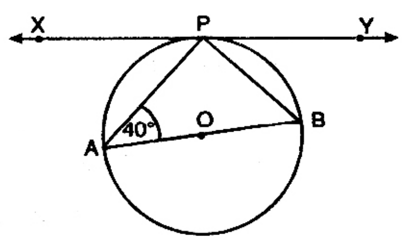


Fig. 17.24

ସମାଧାନ : ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ ଉପପାଦ୍ୟ ଦ୍ୱାରା, ଆମେ ଜାଣୁ

$\angle BPY = \angle BAP$

$\therefore \angle BPY = 40^0$

ପୁନଶ୍ଚ $\angle APB = 90^0$ [ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତସ୍ଥ କୋଣ]

ଏବଂ $\angle BPY + \angle APB + \angle APX = 180^0$ ଏକ ରେଖା ଉପରିସ୍ଥ କୋଣ

ଉଦାହରଣ 17.9 :

ଚିତ୍ର 17.25ରେ, ABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ଯାହାର AB = AC ଏବଂ XY ହେଉଛି ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ XY ଓ BC ସମାନ୍ତର ।

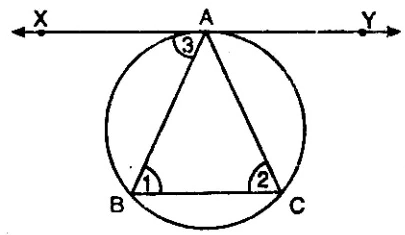


Fig. 17.25

ସମାଧାନ :

ΔABC ରେ, AB = AC

$\therefore \angle 1 = \angle 2$

ପୁନଶ୍ଚ, ବୃତ୍ତର A ବିନ୍ଦୁରେ XY ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶକ ।

$\therefore \angle 3 = \angle 2$ [ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ]

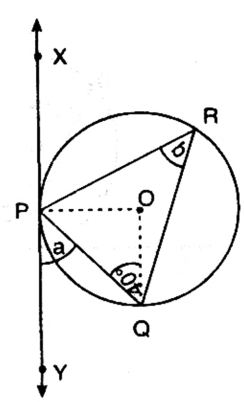
$\therefore \angle 1 = \angle 3$

ମାତ୍ର ଏହି କୋଣଦୁଇଟି ଏକାନ୍ତର କୋଣ ।

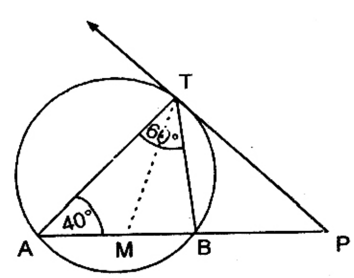
$\therefore$ XY II BC

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 17.3

1. ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ର କରି, ଏକ ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟା ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ ଦର୍ଶାଅ ।
2. ଚିତ୍ର 17.26ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ P ବିନ୍ଦୁରେ XY ହେଉଛି ସ୍ପର୍ଶକ । $\angle OQP = 40^0$ ହେଲେ, a ଓ bର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।



ଚିତ୍ର **17.26**



ଚିତ୍ର **17.27**

3. ଚିତ୍ର 17.27ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ହେଉଛି PT । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା AB ବର୍ଦ୍ଧିତ ହୋଇ ସ୍ପର୍ଶକ TPକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । TA ଓ TB ରେଖାଖଣ୍ଡମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । TM ହେଉଛି $\angle ATB$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ । $\angle PAT = 40^0$ ଏବଂ $\angle ATB = 60^0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $PM = PT$ ।

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଯେଉଁ ରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ, ତାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ କୁହାଯାଏ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରୁଥିବା ରେଖାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ କୁହାଯାଏ ।
- ଏକ ଛେଦକର ଛେଦବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମିଶିଗଲେ ଛେଦକର ଯେଉଁ ଚରମ ଅବସ୍ଥା ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ତାହା ହେଉଛି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଠାରେ ଅଙ୍କିତ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ଏବଂ ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।
- ଏକ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା AB ଓ CD ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ (ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅଥବା ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ) $PA \times PB = PC \times PD$ ହୁଏ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତକୁ କୌଣସି ଏକ ଛେଦକ PAB ଯଦି A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ଏବଂ PT ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତକୁ T ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶକରେ, ତେବେ $PA \times PB = PT^2$ ହୁଏ ।
- ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ସ୍ପର୍ଶକ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ, ଏହାର ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତ ଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ସହ ସମାନ ।
- ଯଦି ଏକ ବୃତ୍ତର କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟାର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ଯେପରିକି ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ଓ ସରଳରେଖା ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ଓ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ଏକାନ୍ତର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ସମାନ ହୁଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ସ୍ପର୍ଶକ ହେବ ।

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀ

1. ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଏକ ବୃତ୍ତର ଛେଦକ ଓ ସ୍ପର୍ଶକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ପାର୍ଥକ୍ୟକୁ ସୂଚାଅ ।
2. ଉପଯୁକ୍ତ କାର୍ଯ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରତିପାଦନ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ, ଏହାର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁଗାମୀ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।
3. ଚିତ୍ର 17.28ରେ, $AC = BC$ ଏବଂ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର AB ଏକ ବ୍ୟାସ ହେଲେ, $\angle x, \angle y, \angle z$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

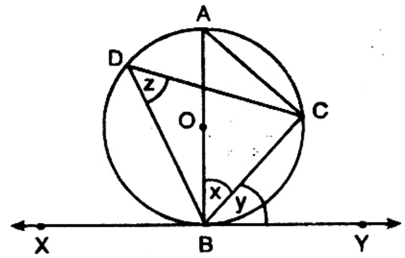


Fig. 17.28

4. ଚିତ୍ର 17.29 ରେ, $OT = 7$ ସେ.ମି. ଏବଂ $OP = 25$ ସେ.ମି. ହେଲେ, PTର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଯଦି ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅନ୍ୟ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ହୁଏ, ତେବେ PTର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏବଂ $\angle POT$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

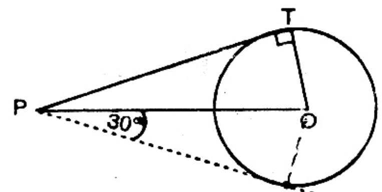


Fig. 17.29

5. ଚିତ୍ର 17.30 ରେ, ଥିବା ΔABC ର ପରିସୀମା ହେଉଛି 27 ସେ.ମି., $PA = 4$ ସେ.ମି., $QB = 5$ ସେ.ମି. ହେଲେ QC ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

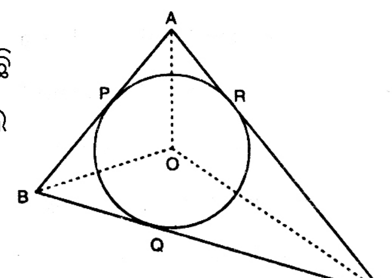


Fig. 17.30

6. ଚିତ୍ର 17.30 ରେ, $\angle ABC = 70^0$ ହେଲେ, $\angle BOC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସୂଚନା : $\angle QBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$

7. ଚିତ୍ର 17.31 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା AB ଓ CD ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $PA = (x+3)$ ସେ.ମି., $PB = (x-3)$ ସେ.ମି., $PD = 3$ ସେ.ମି. ଏବଂ $PC = 5\frac{1}{3}$ ସେ.ମି. ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

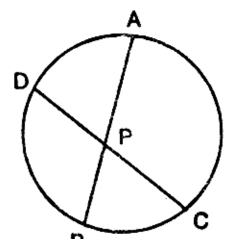


Fig. 17.31

8. ଚିତ୍ର 17.32 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା BA ଓ DC ପରସ୍ପରକୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ O ହେଉଛି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର । $PA = 4$ ସେ.ମି., $PB = 9$ ସେ.ମି., $PC = x$ ସେ.ମି. ଏବଂ $PD = 4x$ ସେ.ମି. ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

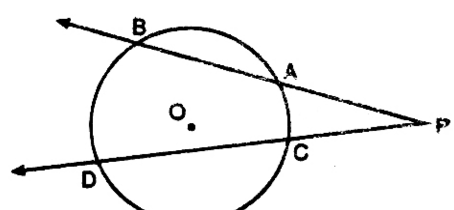


Fig. 17.32

9. ଚିତ୍ର 17.33 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ PAB ଓ ସ୍ପର୍ଶକ PT ଦର୍ଶାଯାଇଛି । $PT = x$ ସେ.ମି., $PA = 4$ ସେ.ମି. ଏବଂ $AB = 5$ ସେ.ମି. ହେଲେ, x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

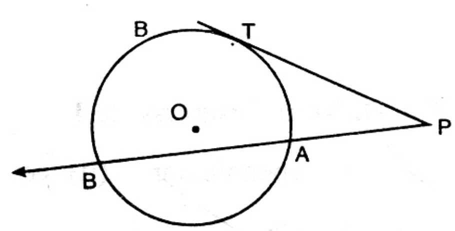


Fig. 17.33

10. ଚିତ୍ର 17.34ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\angle PBQ = 40^0$ ହେଲେ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) $\angle QPY$

(ii) $\angle POQ$

(iii) $\angle OPQ$

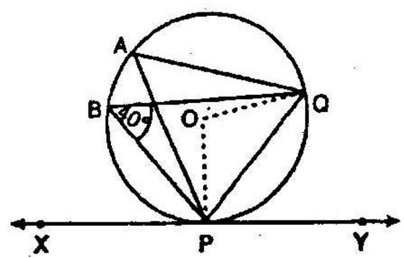


Fig. 17.34

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବାର ଉତ୍ତର

17.1 1. (i) ଲମ୍ବ (ii) ସମାନ (iii) ଛେଦବିନ୍ଦୁ

(iv) ଦୁଇ (v) ନାହିଁ

2. $50^0, 50^0$

3. 3 ସେ.ମି.

17.2 1. 4.3 ସେ.ମି. 2. 3 ସେ.ମି.

3. 8 ସେ.ମି. 4. 10 ସେ.ମି.

5. 6 ସେ.ମି.

17.3 2. $\angle a = \angle b = 50^0$

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀର ଉତ୍ତର

1. $\angle x = \angle y = \angle z = 45^0$

4. PT = 24 ସେ.ମି., PT' = 24 ସେ.ମି., $\angle POT = 60^0$

5. QC = 4.5 ସେ.ମି.

6. $\angle BOC = 125^0$

7. x = 5

8. x = 3

9. x = 6

10. (i) 40^0 (ii) 80^0 (iii) 50^0