୧୨

ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା

ରେଖା ଓ କୋଣ ଅଧ୍ୟାୟରେ ତୁମେ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ତୁମେ ମଧ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଓ ତ୍ରିଭୁଜ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ରେଖା, ଯଥା- ମଧ୍ୟମା, ବାହୁର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ, କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (ବା ଉଚ୍ଚତା) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିଛ । ଏହି ପାଠରେ, ତମେ ସେହି ରେଖାଗୁଡ଼ିକର ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବା ଧର୍ମ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିବ । ଏହି ଧର୍ମ ଜ୍ୟାମିତି ଶିକ୍ଷାରେ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

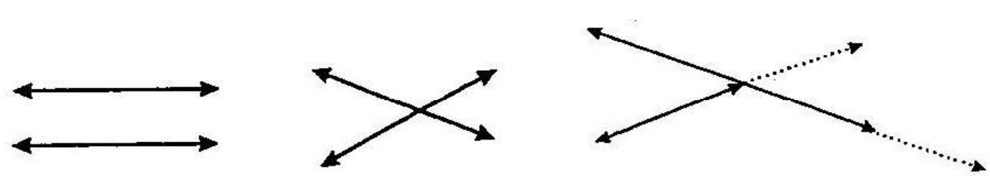
ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା, ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା, ଉଚ୍ଚତା, କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପଦଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରିପାରିବ;
- ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା, ଉଚ୍ଚତା, ବାହୁରେ ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଗୁଡ଼ିକର ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବା ଧର୍ମର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବ;

ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

ପରସ୍ପରଛେଦୀ ରେଖାମାନଙ୍କର ଧର୍ମ, ଯଥା :-

- ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ରେଖା ହୁଏତ ସମାନ୍ତର ହେବେ [ଚିତ୍ର 12.1 (a) ଦେଖ] କିମ୍ବା ପରସ୍ପରଛେଦୀ ହେବେ [ଚିତ୍ର 12.1 (b) ଓ (c) ଦେଖ]



(a) (b) (c)

Fig. 12.1

ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା

- ଏକ ସମତଳରେ ଥିବା ତିନୋଟି ରେଖା ହୁଏତ

(i) ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର ହେବେ ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ନାହିଁ [ଚିତ୍ର 12.2 (a) ଦେଖ], ବା

(ii) ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ [ଚିତ୍ର 12.2 (b)] ବା

(iii) ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ [ଚିତ୍ର 12.2 c)], ବା

(iv) ପରସ୍ପରକୁ ସର୍ବାଧିକ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ [ଚିତ୍ର 12.2 (d)]

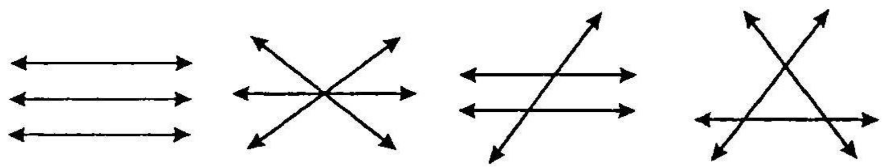

(a) (b) (c) (d)

Fig. 12.2

12.1 ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା

ଗୋଟିଏ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଯେଉଁ ତିନୋଟି ରେଖା ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ବା ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତି କରନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁକୁ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

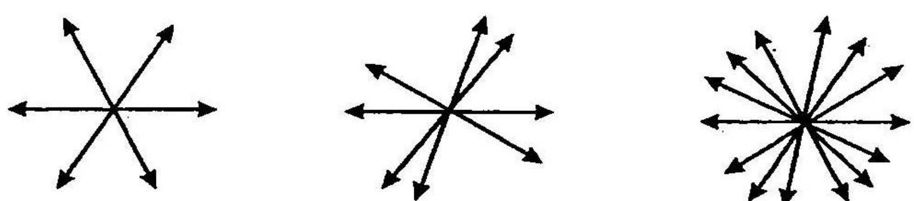
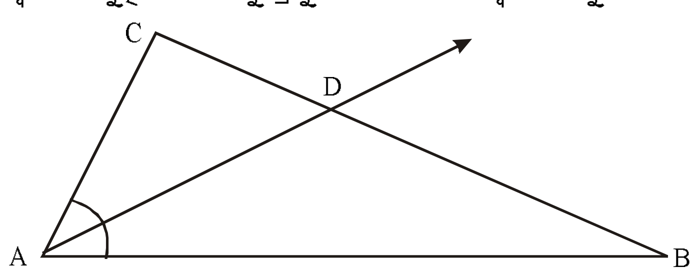

(a) (b) (c)

Fig. 12.3

12.1.1 ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ

ତ୍ରିଭୁଜ ABC ରେ AD ରେଖା $\angle A$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ [ଚିତ୍ର 12.4 ଦେଖ] । ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ରେଖାକୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କୁହାଯାଏ ।



ଚିତ୍ର 12.4

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର କେତୋଟି କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଥାଇପାରେ ? ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ଥିବାରୁ ଆମେ ଏହାର ତିନୋଟି କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । ΔABC ରେ ସମ୍ଭବ ହେଉଥିବା ତିନୋଟି କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟରୁ AD ଗୋଟିଏ । ଆସ ଆମେ ଦ୍ୱିତୀୟ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅର୍ଥାତ୍ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ BE ଅଙ୍କନ କରିବା [ଚିତ୍ର 12.5 ଦେଖ] ।

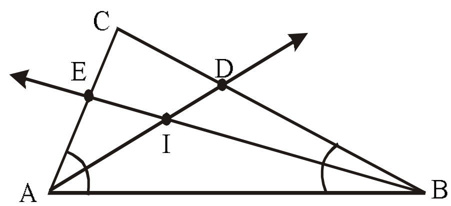


Fig. 12.5

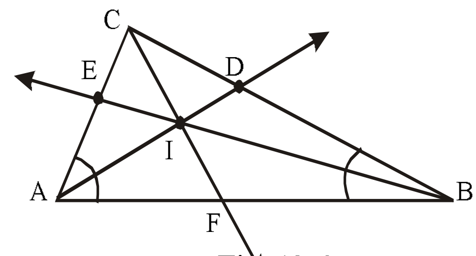


Fig. 12.6

ΔABC ର ଦୁଇଟି କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ I ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ ତୃତୀୟ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ଅର୍ଥାତ୍ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ CF ଅଙ୍କନ କରିବା [ଚିତ୍ର 12.6 ଦେଖ] ।

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଏହି ତୃତୀୟ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟ I ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତି କଲା । ଅନ୍ୟ କଥାରେ, କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତିନୋଟି ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଓ I ହେଉଛି ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ।

ଆମେ ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ, ଅର୍ଥାତ୍ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ, ସମକୋଣୀ ବା ସ୍ଥୁଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ ନେଇ ସେମାନଙ୍କର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନ ଅଙ୍କନ କଲେ, ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦେଖିବା ଯେ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତିନୋଟି ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ହେବେ [ଚିତ୍ର 12.7 ଦେଖ] ।

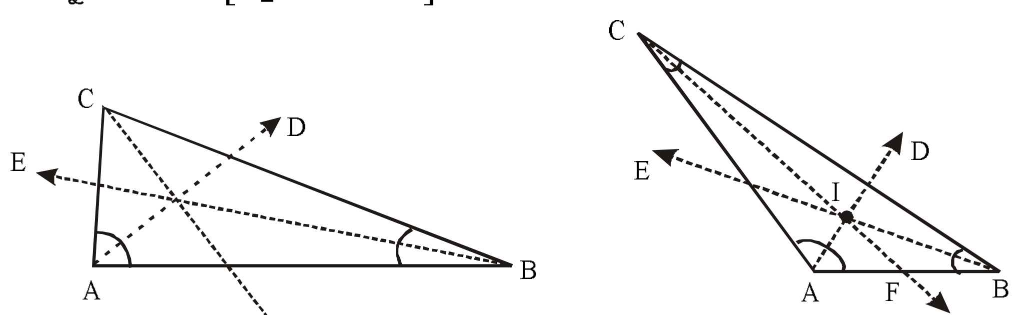


Fig. 12.7

ଏଣୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କଲେ

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଗତି କରନ୍ତି ଅର୍ଥାତ୍ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ । କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ତ୍ରିଭୁଜର 'ଅନ୍ତଃ କେନ୍ଦ୍ର' ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

'ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର' ନାମର ଯଥାର୍ଥ କ'ଣ ତାହା ଆମେ କହିପାରିବା କି ?

ମନେପକାଅ ଯେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରଛେଦୀ ରେଖାଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁର ଲୋକସ୍ (ସଞ୍ଚାରପଥ) ହେଉଛି ଉକ୍ତ ରେଖା ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖାଦ୍ୱୟ । $\angle BAC$ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଉପରେ I ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବାରୁ, ଏହା AB ଓ AC ଠାରୁ ନିଶ୍ଚୟ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । $\angle ABC$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଉପରେ ମଧ୍ୟ I ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ [ଚିତ୍ର 12.8 ଦେଖ] ।

ଏଣୁ ଏହା ମଧ୍ୟ AB ଓ BC ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ । ଫଳରେ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତ୍ରୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ I ହେଉଛି ΔABC ର ତିନୋଟିଯାକ ବାହୁଠାରୁ ସମାନ ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁ ।

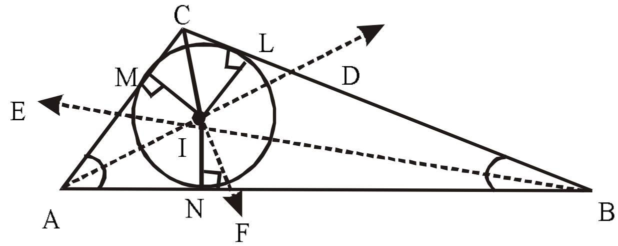


Fig. 12.8

ଏଣୁ $IL = IM = IN$ [ଚିତ୍ର 12.8] I କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଏବଂ IL କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କଲେ ଏହା ΔABC ର ସମସ୍ତ ବାହୁକୁ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ । ଏଣୁ ଏହି ବୃତ୍ତ ହେବ ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ । ଏହି ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର I ହୋଇଥିବାରୁ I କୁ ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ ଏହି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ IL ହୋଇଥିବାରୁ IL କୁ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

ଟୀକା : ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର ସର୍ବଦା ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିଥାଏ ।

12.1.3 ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ

ABC ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ BC କୁ DP ରେଖା ଲମ୍ବ ଭାବରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ । ଯେଉଁ ରେଖା ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁକୁ ଲମ୍ବ ଭାବରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ, ତାକୁ ଉକ୍ତ ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କୁହାଯାଏ । ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ବାହୁ ଥିବାରୁ ଆମେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିଗୋଟି ବାହୁର ତିନୋଟି ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କରିପାରିବୁ । ΔABC ରେ DP ହେଉଛି ତିନିଗୋଟି ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ [ଚିତ୍ର 12.9] । ଆମେ ଦ୍ୱିତୀୟ ବାହୁ AC ର ଲମ୍ବ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ EQ ଅଙ୍କନ କରିବା ଏବଂ O ବିନ୍ଦୁରେ DP କୁ ଛେଦ କରିବ [ଚିତ୍ର 12.10] । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଯଦି ତୃତୀୟ ବାହୁ AB ର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ FR ଅଙ୍କନ କରିବା, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ ER ମଧ୍ୟ O ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଯିବ [ଚିତ୍ର 12.11] । ଅନ୍ୟ କଥାରେ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ତିନୋଟିଯାକ ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ।

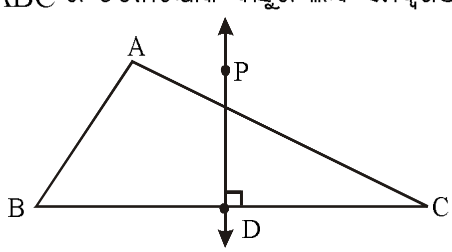


Fig. 12.9

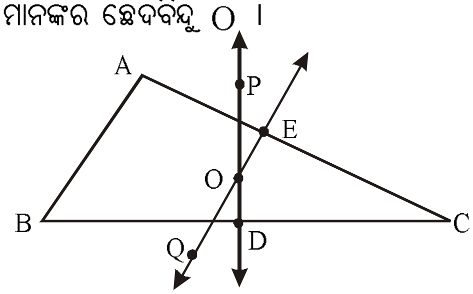


Fig. 12.10

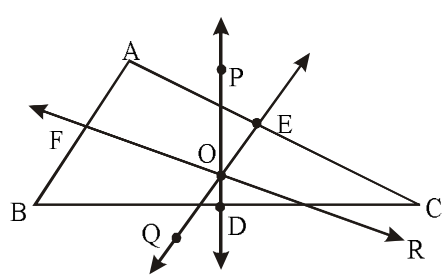


Fig. 12.11

ଆମେ ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ନେଇ ଏହି ପରୀକ୍ଷା କଲେ, ଆମେ ସର୍ବଦା ଦେଖିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତିନୋଟି ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ।

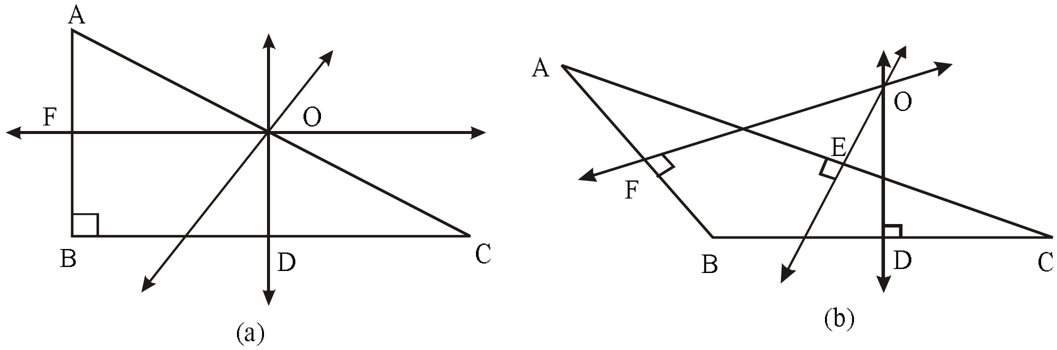


Fig. 12.12

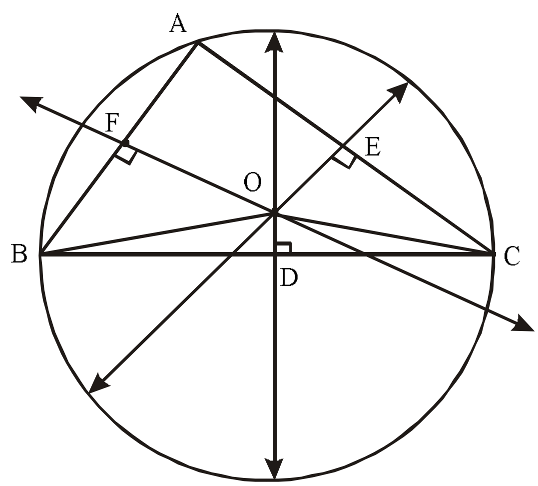
ଏଣୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିବା

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ତିନୋଟି କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି, ଅର୍ଥାତ୍ ବାହୁମାନଙ୍କର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।

ବାହୁମାନଙ୍କର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O କୁ ତ୍ରିଭୁଜର 'ପରିକେନ୍ଦ୍ର' କୁହାଯାଏ ।

ଆମେ କାହିଁକି ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ କାହିଁକି 'ପରିକେନ୍ଦ୍ର' ନାମ ଦେଲେ ତା'ର ଯଥାର୍ଥ କହିପାରିବା କି ?

ମନେପକାଅ ଯେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁର ଲୋକସ୍ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ । BC ରେଖାଖଣ୍ଡର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ O ବିନ୍ଦୁ ରହିଥିବାରୁ ଏହା B ଓ C ଉଭୟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବ, ଅର୍ଥାତ୍ $BO = CO$ [ଚିତ୍ର 12.13] AC ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଉପରେ ମଧ୍ୟ O ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ।



ଏଣୁ ଏହା ମଧ୍ୟ A ଓ C ଉଭୟ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେବ, ଅର୍ଥାତ୍ $AO = CO$ । ଏଣୁ $AO = BO = CO$ । ବର୍ତ୍ତମାନ O କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ OA କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କଲେ ଏହା

A, B ଓ C ଦେଇଯିବ । ଏଣୁ ଏହି ବୃତ୍ତକୁ ΔABC ର ପରିବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ଏହି ବୃତ୍ତ କେନ୍ଦ୍ର ହେତୁ O କୁ ପରିକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ ଏବଂ AO କୁ ପରିବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ ।

ମନେରଖ ଯେ :

୧. ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.11]

୨. ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ଉପରେ ରହିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.12 (a)]

୩. ସ୍ଥୁଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.12 (b)]

12.1.3 ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରୁ ବିପରୀତ ବାହୁମାନଙ୍କ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (ବା ଉଚ୍ଚତା)

ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ ବିପରୀତ ବାହୁ BC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ AL ଅଙ୍କିତ ହୋଇଛି । [ଚିତ୍ର 12.14]

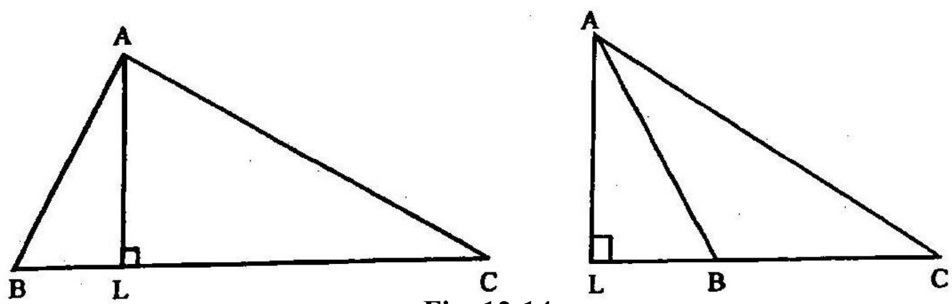


Fig. 12.14

ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବକୁ ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ । ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ କେତୋଟି ଉଚ୍ଚତା ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ? ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜରେ ତିନୋଟି ଶୀର୍ଷ ଥିବାରୁ, ଏଥିରେ ତିନୋଟି ଉଚ୍ଚତା ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା । AL ହେଉଛି ତିନୋଟି ଉଚ୍ଚତା ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉଚ୍ଚତା BM ଅଙ୍କନ କରିବା । ଏହା ପ୍ରଥମ ଉଚ୍ଚତା AL କୁ H ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ [ଚିତ୍ର 12.15] । ଆମେ ମଧ୍ୟ ତୃତୀୟ ଉଚ୍ଚତା CN ଅଙ୍କନ କରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବା ଯେ CN ମଧ୍ୟ H ବିନ୍ଦୁଦେଇ ଯିବ [ଚିତ୍ର 12.16] । ଏଥିରୁ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟିଯାକ ଉଚ୍ଚତା କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

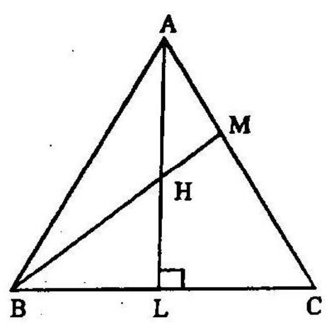


Fig. 12.15

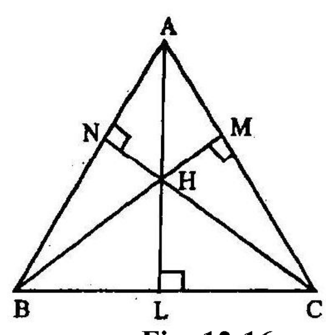


Fig. 12.16

ଆମେ ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର ତ୍ରିଭୁଜ ନେଇ ତା'ର ତିନୋଟିଯାକ ଉଚ୍ଚତା ଅଙ୍କନ କରିପାରନ୍ତି । ଆମେ ସବୁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦେଖିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟିଯାକ ଉଚ୍ଚତା ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ।

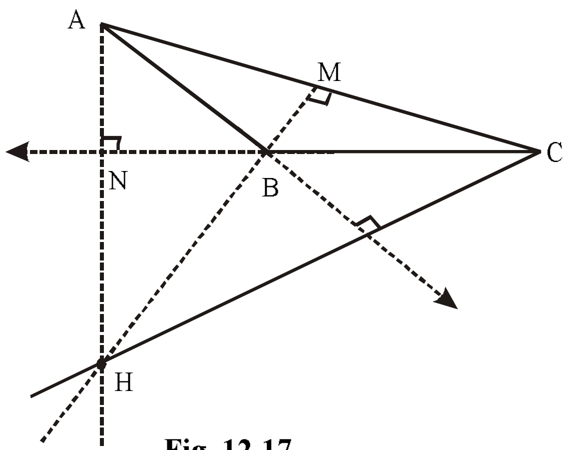


Fig. 12.17

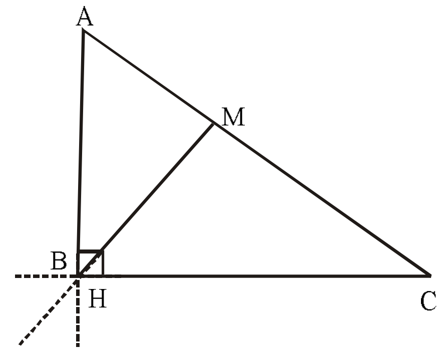


Fig. 12.18

ଏଣୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିବା

> ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟିଯାକ ଉଚ୍ଚତା ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ଅର୍ଥାତ୍ ଉଚ୍ଚତା ତିନୋଟି ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ।
>
> ଉଚ୍ଚତା ମାନଙ୍କର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁକୁ 'ଲମ୍ବ ବିନ୍ଦୁ' କୁହାଯାଏ ।

ତ୍ରିଭୁଜର ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମନେରଖ

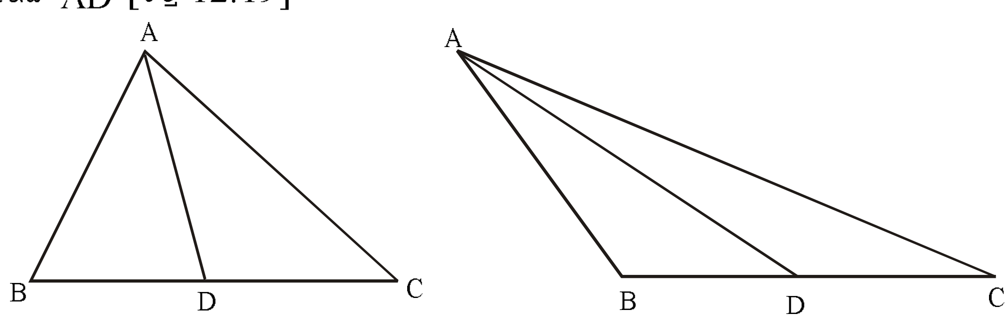
୧. ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଲମ୍ବ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.16]

୨. ସ୍ଥୂଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ରହିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.17]

୩. ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଲମ୍ବ ବିନ୍ଦୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ଥିବା ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ସହ ମିଳିଥାଏ [ଚିତ୍ର 12.18]

12.1.4 ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟମା

ABC ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷ A ଏବଂ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁ BC ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ହେଉଛି AD [ଚିତ୍ର 12.19]



(a) (b)

Fig. 12.19

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା କୁହାଯାଏ । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ତିନୋଟି ମଧ୍ୟମା ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ AD ଏକ ମଧ୍ୟମ । ଆମେ କୌଣସି ତ୍ରିଭୁଜରେ ତିନୋଟିଯାକ ମଧ୍ୟମା ଅଙ୍କନ କଲେ, ସର୍ବଦା ଦେଖିବା ଯେ ମଧ୍ୟମା ତିନୋଟି ପରସ୍ପରକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ [ଚିତ୍ର 12.20 (a), (b), (c)] ।

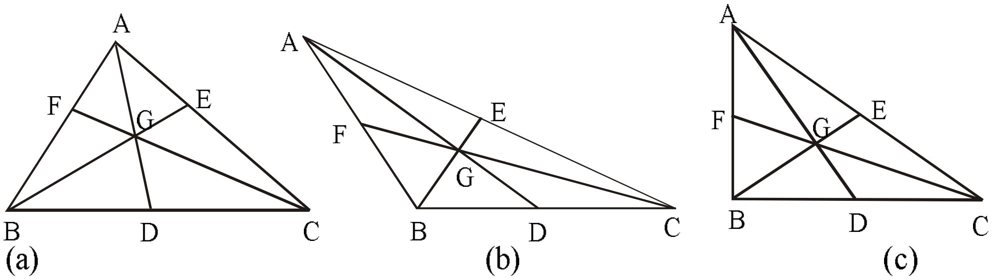


Fig. 12.20

ଉପରିସ୍ଥ ଚିତ୍ର 12.20ରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ରେ ଅଙ୍କିତ ତିନୋଟିଯାକ ମଧ୍ୟମା AD, BE ଓ CF ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ G । ପ୍ରତ୍ୟେକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଥିବା ମଧ୍ୟମା ତିନୋଟିକୁ G ବିନ୍ଦୁ ଯେଉଁ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମାପିଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ

$AG = 2GD$, $BG = 2GE$ ଏବଂ $CG = 2GF$ ।

ଅନ୍ୟ କଥାରେ, ମଧ୍ୟମାମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁ G , ପ୍ରତ୍ୟେକ ମଧ୍ୟମାକୁ $2:1$ ଅନୁପାତରେ ଭାଗକରେ ।

ଏଣୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିବା

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମଧ୍ୟମାକୁ $2:1$ ଅନୁପାତରେ ଛେଦ କରେ । ମଧ୍ୟମାମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ 'ଭରକେନ୍ଦ୍ର' କୁହାଯାଏ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ :

ଖଣ୍ଡେ କାର୍ଡ଼ବୋର୍ଡ଼ (ପଟି କାଗଜ)କୁ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିର କାଗଜଖଣ୍ଡ କାଟିନିଅ । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ କାଗଜ ଖଣ୍ଡର ତିନୋଟି ମଧ୍ୟମା ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଭରକେନ୍ଦ୍ର G ଚିହ୍ନଟ କର । ମୁନିଆଁ କାଠି ବା କମ୍ପାସ୍ କଣ୍ଟାର ମୁନ ଉପରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିକୁ ଏପରି ଭାବେ ରଖ ଯେପରିକି G ବିନ୍ଦୁରେ କାଠି ବା କଣ୍ଟାର ମୁନ ରହିବ । ଯଦି G ବିନ୍ଦୁଟି ଠିକ୍ ଭାବେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଇଥାଏ, ତେବେ ତ୍ରିଭୁଜ ଆକୃତିଟି ସମତୁଲ ହୋଇ ରହିବ [ଚିତ୍ର 12.21] ।

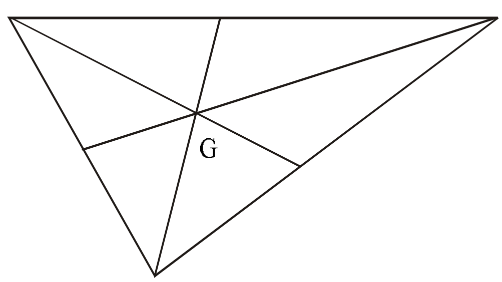


Fig. 12.21

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମାମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ କାହିଁକି ଭରକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ, ତା'ର କାରଣ କହିପାରିବ କି? ଏହି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ସମଗ୍ର ତ୍ରିଭୁଜର ଓଜନ (ବା ଭାର) କେନ୍ଦ୍ରୀଭୂତ ହୋଇଥାଏ ।

ଏହି ଧାରଣାକୁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥିବା କେତେକ ଉଦାହରଣର ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଉଦାହରଣ 12.1 : ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଉଛି ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ଗୋଟିଏ ବାହୁ ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା ଓ ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା ଏହା ପ୍ରମାଣ କର ।

ସମାଧାନ : ΔABD ଓ ΔACD ରେ

$AB = AC$ (ଦତ୍ତ)

$\angle BAD = \angle CAD$ [$\because$ AD ହେଉଛି $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ]

ଏବଂ $AD = AD$ [ସାଧାରଣ ବାହୁ]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [ବା-କୋ-ବା]

$\therefore BD = CD$

ଅର୍ଥାତ୍ AD ଏକ ମଧ୍ୟମା ।

ପୁନଶ୍ଚ $\angle ADB = \angle ADC = 90^0$

$\Rightarrow$ AD ଏକ ଉଚ୍ଚତା

ଯେହେତୁ $BD = DC$,

AD ହେଉଛି ΔABC ର ବାହୁ BC ର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ

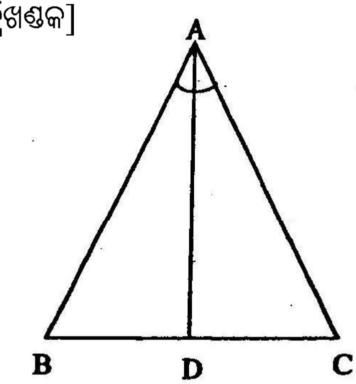


Fig. 12.22

ଉଦାହରଣ 12.2 : ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ ତିନୋଟିଯାକ କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଉଛି ବାହୁମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ, ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ମଧ୍ୟମା, ପ୍ରମାଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\because AB = AC$

ଏଣୁ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ AD ହେଉଛି BC ର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ΔABC ର ଗୋଟିଏ ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ଗୋଟିଏ ମ୍ଦମା ।

[ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣ 12.1 ଦେଖ]

ସେହିପରି, $AB = BC$ ଏବଂ $BC = AC$

$\therefore$ BE ଓ CF ଯଥାକ୍ରମେ ΔABC ର $\angle B$ ଓ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, AC ଓ AB ଲମ୍ବ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, AC ଓ AB ପ୍ରତି ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ AC ଓ AB ପ୍ରତି ମଧ୍ୟମା ।

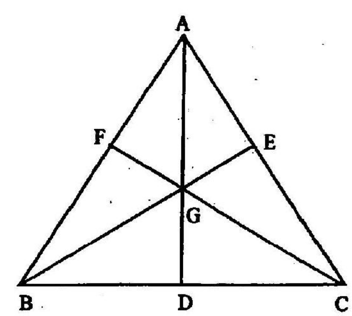
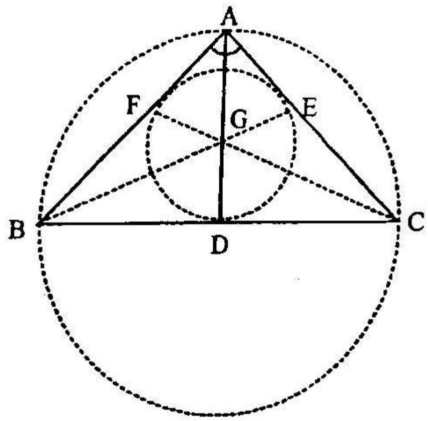


Fig. 12.23

ଉଦାହରଣ 12.3 : ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ହେଲେ, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ପରି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଓ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ΔABC ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ A ରୁ ବାହୁ BC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ AD ଅଙ୍କନ କରିବା, AD ମଧ୍ୟ $\angle A$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ବାହୁ BC ର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଏବଂ A ଓ BC ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ମଧ୍ୟମା [ଚିତ୍ର 12.24]



ଚିତ୍ର 12.24

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ଯେହେତୁ $BC = a$

$\Rightarrow AG = \Delta ABC$ ର ପରିବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

ଏବଂ $GD = \Delta ABC$ ଅନ୍ତଃବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a$

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 12.1

1. ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $BF = FC$, $\angle BAE = \angle CAE$ ଏବଂ $\angle ADE = \angle GFC = 90^0$, ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ମଧ୍ୟମା, ଗୋଟିଏ କୋଣ କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ, ଗୋଟିଏ ଉଚ୍ଚତା ଏବଂ ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକର ନାମ ଲେଖ ।

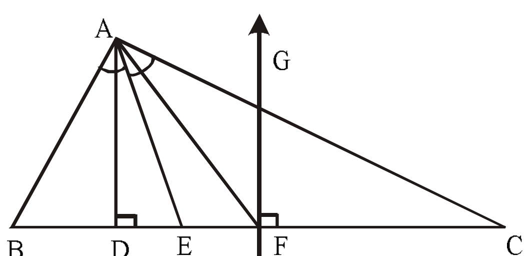


Fig. 12.25

2. ପ୍ରମାଣକର ଯେ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର, ପରିକେନ୍ଦ୍ର, ଭରକେନ୍ଦ୍ର ଓ ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ ଅଭିନ୍ନ ।

3. ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ABC (ଚିତ୍ର 12.26)ର G ହେଉଛି ଭରକେନ୍ଦ୍ର । AG ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 4.8 ସେ.ମି. ହେଲେ, AD ଓ BE ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

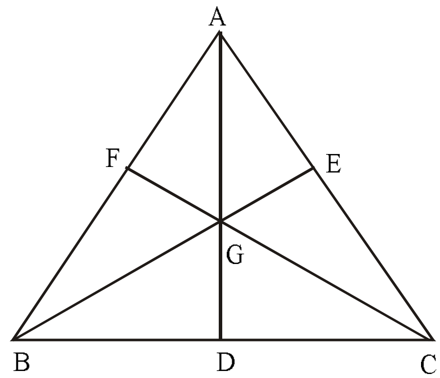


Fig. 12.26

4. ΔABCର ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ H ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ΔHBCର ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ A ।

5. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଦତ୍ତ ଥିବା ଚାରୋଟି ବିକଳ୍ପ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ ।

(i) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ସମତଳରେ ସେହି ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁକୁ କେଉଁ ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ?

(a) ଭରକେନ୍ଦ୍ର (b) ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର

(c) ପରିକେନ୍ଦ୍ର (d) ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ

(ii) ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ସମତଳରେ, ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ବିନ୍ଦୁକୁ କେଉଁ ନାମରେ ନାମିତ କରାଯାଏ ?

(a) ଭରକେନ୍ଦ୍ର (b) ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର

(c) ପରିକେନ୍ଦ୍ର (d) ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଗୋଟିଏ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବା ତା'ଠାରୁ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ସରଳରେଖା ପରସ୍ପରକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଏକବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା କୁହାଯାଏ ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାକୁ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କୁହାଯାଏ ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିବା ରେଖାକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ କୁହାଯାଏ ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ଉଚ୍ଚତା କୁହାଯାଏ ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁକୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ସହ ଯୋଗ କରୁଥିବା ସରଳରେଖାକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ମଧ୍ୟମା କୁହାଯାଏ ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର

(i) କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ

ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା

(ii) ବାହୁତ୍ରୟର ଲମ୍ବ-ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ ।

(iii) ଉଚ୍ଚତା ତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ ।

(iv) ମଧ୍ୟମାତ୍ରୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଛେଦବିନ୍ଦୁକୁ ଭରକେନ୍ଦ୍ର କୁହାଯାଏ ।

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀ

1. ଚିତ୍ର 12.27 ରେ ଥିବା ΔABC ର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D, E, F । ପ୍ରମାଣକର ଯେ

$$BE + CF > \frac{3}{2}BC$$

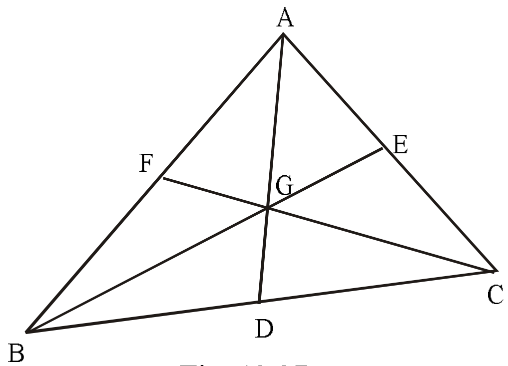


Fig. 12.27

2. ΔABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ [ଚିତ୍ର 12.28] ଓ ଏଥିରେ $AB = AC$ । BC ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ର, ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର, ପରିକେନ୍ଦ୍ର ଓ ଲମ୍ବବିନ୍ଦୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ AD ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

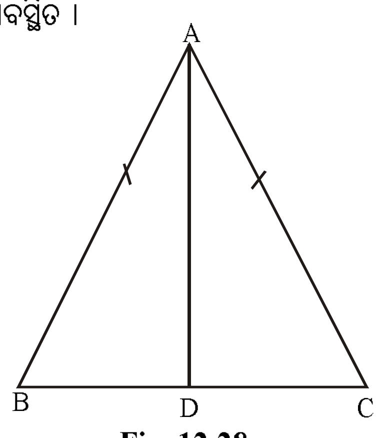


Fig. 12.28

3. ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔABC ରେ $AB = AC = 17$ ସେ.ମି. ଏବଂ ଭୂମି $BC = 16$ ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ତ୍ରିଭୁଜର ଭରକେନ୍ଦ୍ର G ହେଲେ, AG ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 12 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର ଭରକେନ୍ଦ୍ର G ହେଲେ, AG ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ତୁମ ପାଇଁ କାମ :

1. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
2. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହାର ଅନ୍ତଃକେନ୍ଦ୍ର ଓ ପରିକେନ୍ଦ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଓ ପରିବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।
3. 5 ସେ.ମି. ଦୀର୍ଘ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି ଏହାର ପରିବୃତ୍ତ ଓ ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କର ।

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବାର ଉତ୍ତର

12.1

1. ମଧ୍ୟମା - AF, କୋଣ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ AE
   ଉଚ୍ଚତା – AD ଏବଂ ବାହୁର ଲମ୍ବ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ – GF
3. $AD = 7.2$ ସେ.ମି., $BE = 7.2$ ସେ.ମି.
5. (i) (c) (ii) (b)

ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀର ଉତ୍ତର

3. $AG = 10$ ସେ.ମି.
4. $AG = 4\sqrt{3}$ ସେ.ମି.