୧୧

ତ୍ରିଭୁଜ ମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା

ତୁମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକରିଥିବ ଯେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଗଛର ପତ୍ରମାନଙ୍କର ଆକୃତି ଭିନ୍ନ, ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗଛର ପତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ଆକୃତି ପ୍ରାୟ ଏକାପରି । ଅବଶ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକର ଆକାର ଭିନ୍ନ ହୋଇପାରେ । ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ର ସମଆକୃତି ଏବଂ ସମଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥିଲେ ସେ ଦୁଇଟି ଚିତ୍ରକୁ ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିର ଏହ ଗୁଣକୁ ସର୍ବସମତା କୁହାଯାଏ ।

ଏହି ପାଠରେ ତୁମେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏବଂ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିବ ।

ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠଟି ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ ତୁମେ

- ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର ସର୍ବସମ ବା ସର୍ବସମ ନୁହନ୍ତି ତାହା ପରୀକ୍ଷା କରି ଜାଣିପାରିବ;
- ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସର୍ବସମତାର ସର୍ତ୍ତ କ'ଣ କହିପାରିବ ଏବଂ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରିବାରେ ତାହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିପାରିବ;
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେ ବାହୁଦୁଇଟିର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ;
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅସମାନ ହେଲେ ବୃହତ୍ତର ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ ବୃହତ୍ତର ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବ;
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ଓ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ଅସମାନତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉକ୍ତିକୁ କହିପାରିବ ଓ ତା'ର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବ;
- ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଫଳାଫଳ ଉପରେ ଆଧାରିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ କରିପାରିବ ।

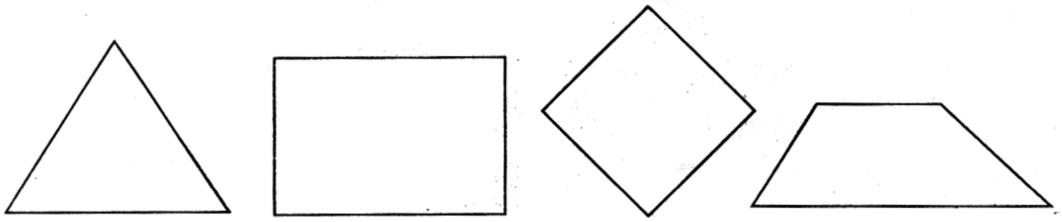
ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚିତ୍ରର ପରିଚୟ
- ରେଖାଖଣ୍ଡ ମଧ୍ୟରେ ଓ କୋଣ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନତା
- କୋଣମାନଙ୍କର ପ୍ରକାରଭେଦ
- ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ସମ୍ପର୍କିତ ଧର୍ମ
- କାଗଜ ଭାଙ୍ଗିବା ଓ କାଟିବା

11.1 ସର୍ବସମତା ଧାରଣା

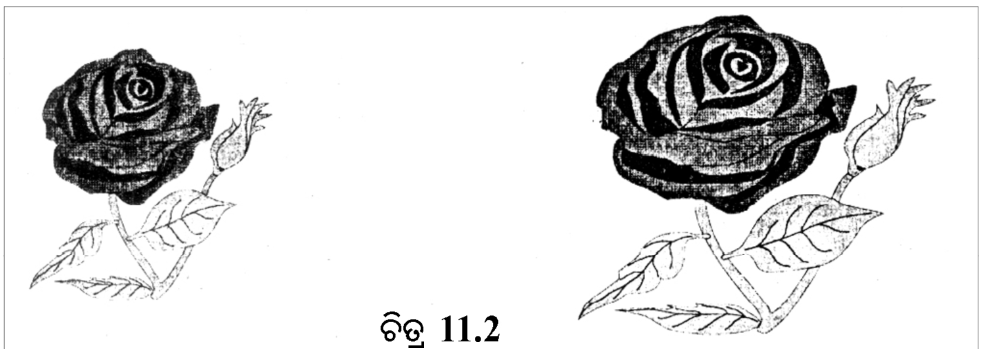
ଆମ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଆମେ ଅନେକ ଆକୃତି ଓ ବସ୍ତୁ ଦେଖିଥାଉ । ଏହି ଚିତ୍ର ବା ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକର ଆକୃତି ଓ ଆକାର ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସେଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭାଗୀକରଣ କରାଯାଇପାରିବ ।

(i) 11.1ରେ ବିଭିନ୍ନ ଆକୃତି ଥିବା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



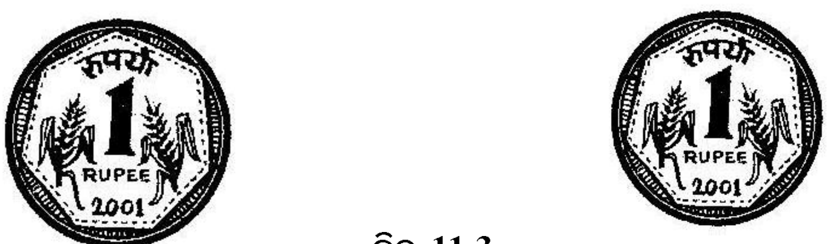
ଚିତ୍ର 11.1

(ii) ଏକା ଆକୃତି ମାତ୍ର ଭିନ୍ନ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଚିତ୍ରମାନ ଚିତ୍ର 11.2ରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



ଚିତ୍ର 11.2

(iii) ଦୁଇଟି ଏକଟଙ୍କିଆ ମୁଦ୍ରା



ଚିତ୍ର 11.3

(iv) ଦୁଇଟି ପୋଷ୍ଟକାର୍ଡ଼ରେ ଥିବା ଡାକଟିକଟ

ଚିତ୍ର 11.4

(v) ଏକା ନେଗେଟିଭ୍‌ରୁ ପ୍ରସ୍ତୁତ ସମାନ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଦୁଇଟି ଫଟୋଚିତ୍ର

ଚିତ୍ର 11.5

ସମ ଆକୃତି ଏବଂ ସମାନ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ଚିତ୍ର ସମ୍ପର୍କରେ ଆମେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ସମ ଆକୃତି ଓ ସମାନ ଆକାର ଥିବା ଦୁଇଟି ଚିତ୍ରକୁ ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ଓ ଚିତ୍ରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏହି ଧର୍ମକୁ ସର୍ବସମତା କୁହାଯାଏ ।

11.1.1 ତୁମ ପାଇଁ କାର୍ଯ୍ୟ

ଗୋଟିଏ ଫର୍ଦ୍ଦ କାଗଜ ନେଇ ତାକୁ ମଝିରୁ ଭାଙ୍ଗିଦିଅ ଏବଂ ଦୁଇଭାଗ ମଧ୍ୟରେ ଖଣ୍ଡେ କାର୍ବନ୍ କାଗଜ ରଖ । ଭଙ୍ଗା ଭାଗଜର ଉପର ପାଖରେ ଯେକୌଣସି ଏକ ପତ୍ର ବା ଫୁଲର ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ତଳକୁ ଥିବା କାଗଜ ଉପରେ ତୁମେ ଏକ କାର୍ବନ-ନକଲ ପାଇବ ।

ତୁମେ ଅଙ୍କନ କରିଥିବା ଚିତ୍ର ଏବଂ ତା'ର କାର୍ବନ-ନକଲ ଉଭୟର ଆକୃତି ଓ ଆକାର ସମାନ । ଏଣୁ ସେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର । ଗୋଟିଏ ପ୍ରଜାପତି ତା'ର ପକ୍ଷ ଦୁଇଟିକୁ ଯୋଡ଼ିଥିବାର ଦେଖିବାକ ଚେଷ୍ଟାକର । ସେ ଦୁଇଟି, ଗୋଟିଏ ଭଳି ଜଣାପଡ଼େ ।

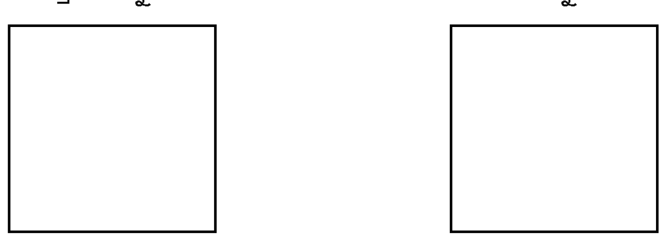
11.1.2 କେତେକ ଚିତ୍ରର ସର୍ବସମତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସର୍ତ୍ତାବଳୀ

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ ଅନ୍ୟଟି ଉପରେ ପକାଇଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ସହ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ମିଳିଯା'ନ୍ତି । ଅନ୍ୟ କଥାରେ କହିଲେ, ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବିଭିନ୍ନ ଅଂଶ ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ଅଂଶ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ଚିତ୍ର ଦୁଇଟିକୁ ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ :

(1) ଦୁଇଟି ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

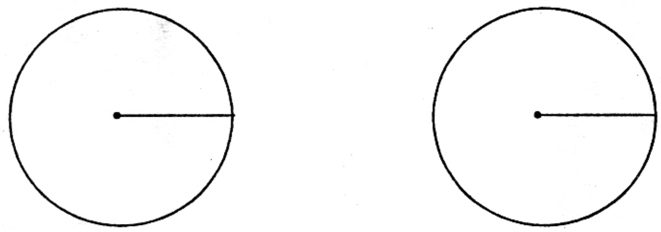
ଚିତ୍ର 11.6

(2) ଦୁଇଟି ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ସେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।



ଚିତ୍ର 11.7

(3) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେଲେ, ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କର ପରିଧି ସମାନ ହେଲେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।



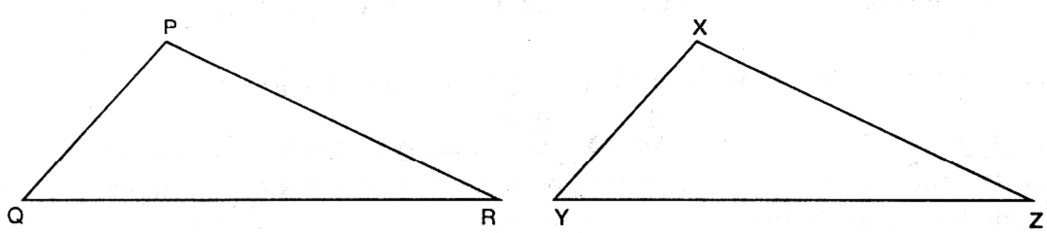
ଚିତ୍ର 11.8

11.2 ତ୍ରିଭୁଜ ମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା

ଜ୍ୟାମିତିରେ ତ୍ରିଭୁଜ ହେଉଛି ଏକ ମୌଳିକ ସରଳରୈଖିକ ଚିତ୍ର ଯାହାର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ସର୍ବନିମ୍ନ । ଏଣୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସର୍ବସମତା ମାଧ୍ୟମରେ ବହୁ ବ୍ୟବହାର ଉପଯୋଗୀ ଫଳାଫଳ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଏ । ଏଣୁ ଏହାକୁ ଭଲ ଭାବରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ତିନିବାହୁ ଓ ତିନିକୋଣ ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଓ କୋଣମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : ଚିତ୍ର 11.9ରେ ଥିବା PQR ଓ XYZ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ



ଚିତ୍ର 11.9

$$PQ = XY,\ PR = XY,\ QR = YZ,$$

$$\angle P = \angle X,\ \angle Q = \angle Y \text{ ଏବଂ } \angle R = \angle Z$$

ଏପରିସ୍ଥଳେ ଆମେ କହିପାରିବା ΔPQR ଓ ΔXYZ ସର୍ବସମ ଏବଂ ଆମେ ଲେଖୁ $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସର୍ବସମତା ସମ୍ପର୍କକୁ ଲେଖିବାବେଳେ ଅନୁରୂପ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକୁ ଉପଯୁକ୍ତ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଏ ।

ଏଠାରେ $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ ।

ଏଥିରୁ ଜଣାଯାଏ ଯେ Pର ଅନୁରୂପ X, Qର ଅନୁରୂପ Y ଏବଂ Rର ଅନୁରୂପ Z ।

ଏହି ଅନୁରୂପତାକୁ $\Delta QRP \cong \Delta YZX$ ରୂପେ ମଧ୍ଯ ଲେଖାଯାଏ । ଏଠାରେ Qର ଅନୁରୂପ Y, Rର ଅନୁରୂପ Z ଏବଂ Pର ଅନୁରୂପ X ବୋଲି ବୁଝିବା । ଏହାର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଯେ ଅନୁରୂପ ଅଂଶମାନ ସମାନ,

ଯଥା। $QR = YZ, RP = ZX, QP = YX,$

$\angle Q = \angle Y, \angle R = \angle X$ ଏବଂ $\angle P = \angle X$

ଏହି ଅନୁରୂପତାକୁ ନିମ୍ନମତେ ମଧ୍ଯ ଲେଖାଯାଏ :

$\Delta RPQ \cong \Delta ZXY$

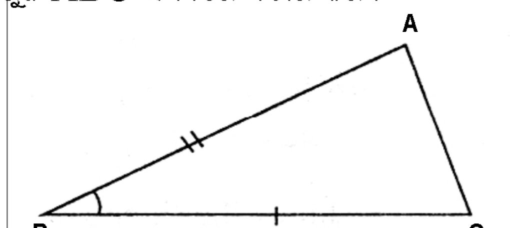
ମାତ୍ର $\Delta PQR \cong \Delta YZX$

ଅଥବା, $\Delta PQR \cong \Delta ZXY$ ରୂପେ ନୁହେଁ ।

11.3 ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମତାର ସର୍ତ୍ତାବଳୀ

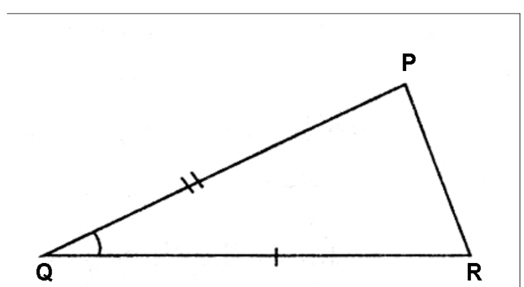
ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମତା ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଲାଗି, ଗୋଟିକର ଛଅଗୋଟି ଯାକ ଅଙ୍ଗ, ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ଛଅଗୋଟି ଅଙ୍ଗ ସହ ସମାନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଜାଣିବା ଯେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ତିନୋଟି ଅଙ୍ଗ, ଅନ୍ୟଟିର ଅନୁରୂପ ତିନୋଟି ଅଙ୍ଗ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବା ସମ୍ଭବ ।

ଚିତ୍ର 11.10ରେ ଥିବା ତ୍ରିଭୁଜ ABC ସମ୍ବନ୍ଧରେ ବିଚାର କର ।



ଚିତ୍ର 11.10

ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ PQR ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରି $QR = BC, \angle Q = \angle B$ ଏବଂ $PQ = AB$ (ଚିତ୍ର 11.11 ଦେଖ)



ଚିତ୍ର 11.11

ଆମେ ଯଦି ତ୍ରିଭୁଜ ABCର ଅବିକଳ ନକଲ ନେଇ ତ୍ରିଭୁଜ PQR ଉପରେ ପକାଉ, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ଅନ୍ୟଟି ସହ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ମିଳିଯିବ । ଏଣୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ଆମେ ମଧ୍ଯ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟର ଅବଶିଷ୍ଟ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକୁ ମାପି ଦେଖିପାରିବା ଯେ

$AC = PR, \angle A = \angle P$ ଏବଂ $\angle C = \angle R$ । ଏଥିରୁ ଆମେ ଲକ୍ଷ୍ୟକରିପାରିବା ଯେ ΔABC ସହ ସର୍ବସମ କରି ΔPQR କୁ ଅଙ୍କନ କରିବା ପାଇଁ ଆମେ କେବଳ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବାହୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣଯୋଡ଼ାକୁ ସମାନ କରିଥିଲେ, ଅର୍ଥାତ୍ ଆମେ $PQ = AB, QR = BC$ ଏବଂ $\angle Q = \angle B$ ନେଇଥିଲୁ ।

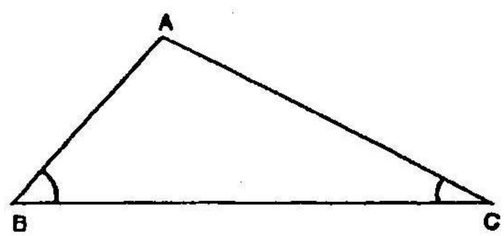
ଏଥିରୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ ଯେ ଏହି ତିନିଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଅଂଶମାନଙ୍କର ସମାନତା ଯୋଗୁ ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମତା ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।

ଏଣୁ ଆମେ ଜାଣିଲୁ :

ସର୍ତ୍ତ ୧ – ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁ ଓ ସେ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଓ ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

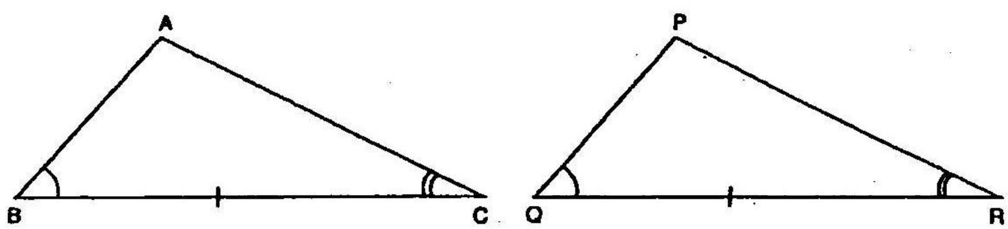
ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ ବା-କୋ-ବା (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ) ସର୍ତ୍ତ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର 11.12ରେ ଥିବା ΔABC କଥା ବିଚାର କର ।



ଚିତ୍ର **11.12**

ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ PQR ଅଙ୍କନ କର ଯେପରି $QR = BC, \angle Q = \angle B$ ଏବଂ $\angle R = \angle C$ (ଚିତ୍ର 11.13 ଦେଖ) ।



ଚିତ୍ର **11.13**

ଉପରି ସ୍ଥାପନ ପ୍ରଣାଳୀରେ ବା ଅବଶିଷ୍ଟ ଅନୁରୂପ ଅଂଶମାନଙ୍କର ମାପକରି ଆମେ ଦେଖିପାରିବା ଯେ $\angle P = \angle A, PQ = AB$ ଏବଂ $PR = AC$ । ଏଥିରୁ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ $\Delta PQR = \Delta ABC$ । ଏଥିରୁ ପୁନଶ୍ଚ ଜଣାଯାଏ ଯେ ତିନିଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଅଂଶମାନଙ୍କର ସମାନତା (ଦୁଇଟି କୋଣ ଏବଂ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ) ଯୋଗୁ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବସମତା ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥାଏ ।

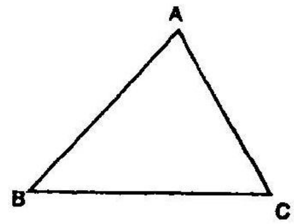
ଆମେ ମଧ୍ୟ ଜାଣୁ ଯେ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 । ଫଳରେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣଦ୍ୱୟ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ଉଭୟ ତ୍ରିଭୁଜର ତୃତୀୟ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ ହେବେ । ଏଣୁ ଅନ୍ତର୍ଗତ ବାହୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ଯେକୌଣସି ଯୋଡ଼ା ବାହୁ ସମାନ ହୋଇପାରେ । ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବ ।

ସର୍ତ୍ତ ୨ – ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି କୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ, ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ ଓ ବାହୁ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେବେ ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ କୋ-ବା-କୋ ବା କୋ-କୋ-ବା (କୋଣ-ବାହୁ-କୋଣ ବା କୋଣ-କୋଣ-ବାହୁ) କୁହାଯାଏ ।

11.3.1 ତୁମ ପାଇଁ କାର୍ଯ୍ୟ

ଆଉ ଗୋଟିଏ ସର୍ତ୍ତ ପାଇବା ଲାଗି ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ନିଅ । (ଚିତ୍ର 11.14)



ଚିତ୍ର 11.14

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABC ର ବାହୁ AB, BC ଓ CA ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ତିନିଖଣ୍ଡ ପତଳା କାଠି ନିଅ । ସେ ତିନୋଟିକୁ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖି ΔABC ପାଖରେ ΔPQR ଓ $\Delta P'Q'R'$ ଗଠନ କର (ଚିତ୍ର 11.15)

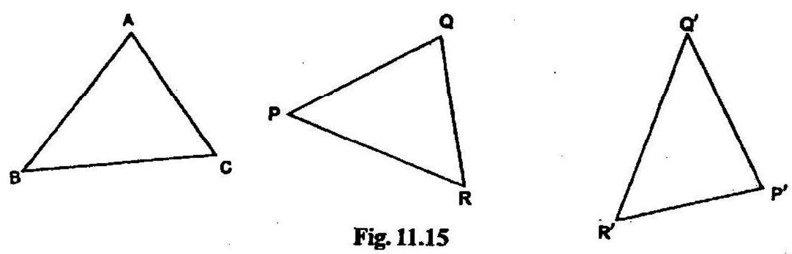


Fig. 11.15

ଅନୁରୂପ କୋଣଗୁଡ଼ିକୁ ମାପିଲେ ଆମେ ଦେଖିବା, $\angle P = \angle P' = \angle A$, $\angle Q = \angle Q' = \angle B$ ଏବଂ $\angle R = \angle R' = \angle C$ । ଏଥିରୁ ଜଣାଗଲା ଯେ

$$\Delta PQR \cong \Delta P'Q'R' \cong \Delta ABC$$

ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ଅନୁରୂପ ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହୋଇଥା'ନ୍ତି । ଏଣୁ ଆମେ ପାଇଲେ-

ସର୍ତ୍ତ ୩ – ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ, ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ ବା-ବା-ବା (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ) ସର୍ତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି ଆମେ ଆଉ ଗୋଟିଏ ସର୍ବସମତା ସର୍ତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ଯାହାକି କେବଳ ଦୁଇଟି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହେବ ।

ସର୍ତ୍ତ ୪ – ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ, ଯଥାକ୍ରମେ ଅନ୍ୟ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହୁଅନ୍ତି ।

ଏହି ସର୍ତ୍ତକୁ ସ-କ-ବା (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ-ବାହୁ) ସର୍ତ୍ତ କୁହାଯାଏ । ଏହି ସର୍ତ୍ତଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ତିନିଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଅଂଶର ସମାନତାର ଉପଯୋଗରେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବା ନୁହେଁ ତାହା ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ : 11.1

ନିମ୍ନ ସର୍ତ୍ତମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବସମ ନୁହନ୍ତି ?

(a) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସମାନ

(b) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମାନ

(c) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ଓ ସେମାନଙ୍କର ଅନ୍ତର୍ଗତ କୋଣ ସମାନ

(d) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଓ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସମାନ

ଉତ୍ତର (b)

ଉଦାହରଣ : 11.2

ଦୁଇଟି ସରଳରେଖୀ କ୍ଷେତ୍ର ସର୍ବସମ ହେବା ପାଇଁ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁ ସର୍ତ୍ତ ସିଦ୍ଧ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ?

(e) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସମାନ

(f) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମାନ

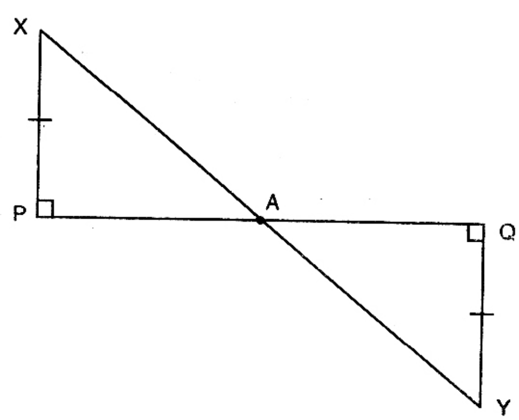
(g) କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସମାନ

(h) ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ କୋଣ ଓ ସମସ୍ତ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସମାନ

ଉତ୍ତର (d)

ଉଦାହରଣ : 11.3

ଚିତ୍ର 11.16ରେ PX ଓ QY ପ୍ରତ୍ୟେକ PQ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଏବଂ PX = QY । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX = AY ।



ଚିତ୍ର 11.16

ସମାଧାନ

ΔPAX ଏବଂ ΔQAYରେ,

$\angle XPA = \angle YQA$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ 90^0)

$\angle PAX = \angle QY$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

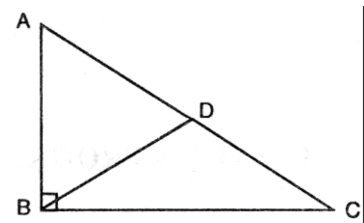
ଏବଂ $PX = QY$

$\therefore \Delta PAX \cong \Delta QAY$ (AAS)

$\therefore AX = AY$

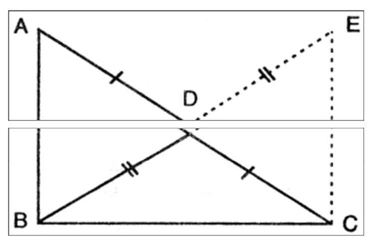
ଉଦାହରଣ : 11.4

ଚିତ୍ର 11.17ରେ, ସମକୋଣୀ ΔABCର $\angle B = 90^0$ ଏବଂ AC ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BD = \frac{1}{2}AC$.



ଚିତ୍ର **11.17**

ସମାଧାନ: BD କୁ E ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ କର ଯେପରି BD= DE । CE ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।



ଚିତ୍ର **11.18**

ΔADB ଓ ΔCDE ରେ

$AD = CD$ (D, ACର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ)

$DB = DE$ (ଅଙ୍କନ ହେତୁ)

ଏବଂ $\angle ADB = \angle CDE$ (ପ୍ରତୀପ କୋଣ)

$\therefore \Delta ADB \cong \angle CDE$..............(i)

$\therefore AB = EC$

ପୁନଶ୍ଚ $\angle DAB = \angle DCE$

ମାତ୍ର ସେ ଦୁଇଟି ଏକାନ୍ତର କୋଣ

$\therefore AB \parallel EC$

$\therefore \angle ABC + \angle ECB = 180^0$ (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ)

$\therefore 90^0 + \angle ECB = 180^0$

$\therefore \angle ECB = 180^0 - 90^0 = 90^0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔABC ଓ ΔECB ରେ

$AB = EC$ (ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ପାଦ (i) ଅନୁଯାୟୀ)

$BC = BC$ (ସାଧାରଣ ବାହୁ)

ଏବଂ $\angle ABC = \angle ECB$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ 90^0)

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta ECB$

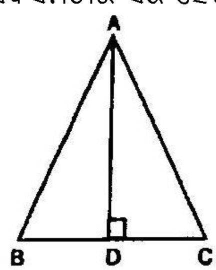
$\therefore AC = EB$

ମାତ୍ର $BD = \frac{1}{2}EB$

$\therefore BD = \frac{1}{2}AC$

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 11.1

1. ΔABC (ଚିତ୍ର 11.19)ରେ, ଯଦି $\angle B = \angle C$ ଏବଂ $AD \perp BC$ ହୁଏ, ତେବେ $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ । ଏହି ସର୍ବସମତାର ସର୍ତ୍ତ ହେଉଛି

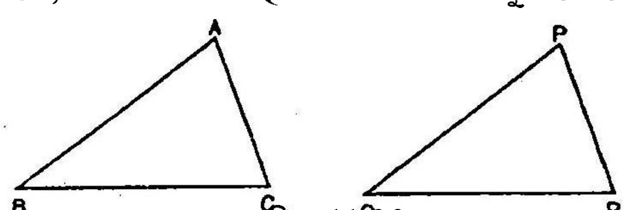


ଚିତ୍ର 11.19

(a) ସ-କ-ବା (b) କୋ-ବା-କୋ

(c) ବା-କୋ-ବା (d) ବା-ବା-ବା

2. ଚିତ୍ର 11.20ରେ, $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ । ଏହି ସର୍ବସମତାକୁ ଆମେ ଲେଖିବା



ଚିତ୍ର 11.20

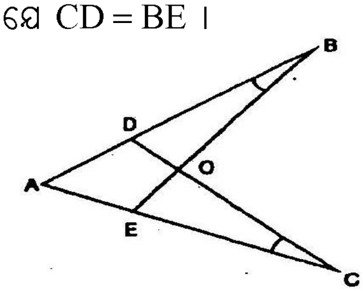
(a) $\Delta BAC \cong \Delta RPQ$ (b) $\Delta BAC \cong \Delta QPR$

(c) $\Delta BAC \cong \Delta RQP$ (d) $\Delta BAC \cong \Delta PRQ$

3. ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବସମ ହେବାପାଇଁ, ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମାନ ହେବା ସହ ଅନ୍ୟ ଯେଉଁ ଅଙ୍ଗ ସମାନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ତାହା ହେଉଛି
(a) କୌଣସି ଅନୁରୂପ ବାହୁର ସମାନତାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ
(b) ଅନ୍ୟୂନ ଗୋଟିଏ ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ବାହୁ
(c) ଅନ୍ୟୂନ ଦୁଇଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣ
(d) ତିନୋଟି ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ବାହୁ

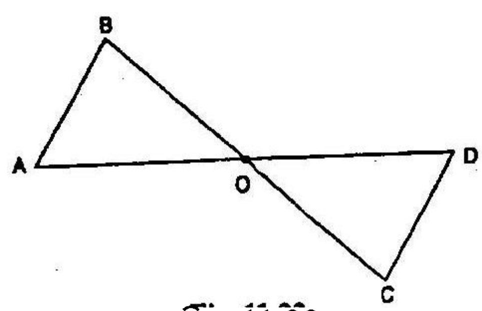
4. ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବସମ ହେବ ଯଦି -
(a) ତିନୋଟି ଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ କୋଣ ସମାନ
(b) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ ସହ ସମାନ
(c) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଓ ଗୋଟିଏ ବାହୁ, ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ଓ ଅନୁରୂପ ବାହୁ ସହ ସମାନ
(d) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଓ ଦୁଇବାହୁ, ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଓ ଦୁଇଟି ବାହୁ ସହ ସମାନ

5. ଚିତ୍ର 11.21ରେ, $\angle B = \angle C$ ଏବଂ $AB = AC$ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$। ତତ୍ପରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $CD = BE$ ।



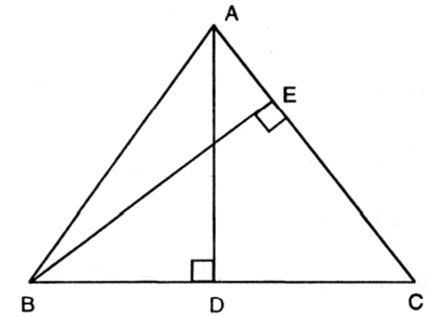
ଚିତ୍ର 11.21

6. ଚିତ୍ର 11.22ରେ, AB II CD । ଯଦି BCର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ O ହୋଇଥାଏ, ପ୍ରମାଣରକ ଯେ O ମଧ୍ୟ ADର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



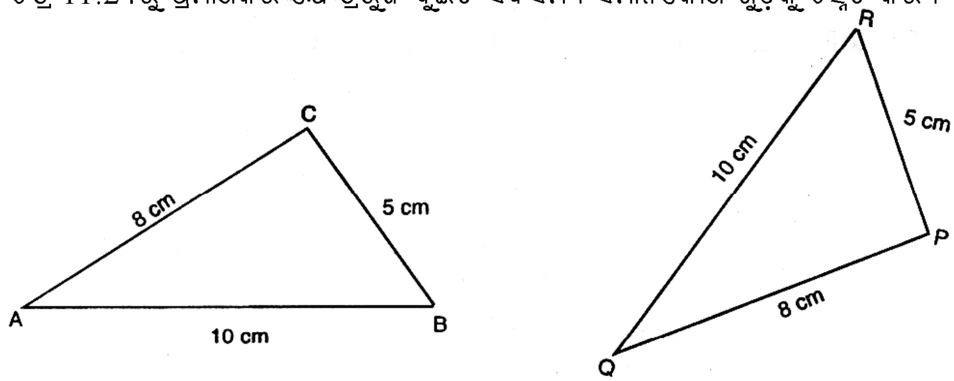
ଚିତ୍ର 11.22

7. ΔABC (ଚିତ୍ର 11.23)ରେ, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$ ଏବଂ $AD = BE$ ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AE = BD$ ।



ଚିତ୍ର **11.23**

8. ଚିତ୍ର 11.24ରୁ ପ୍ରମାଣକର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ । ସମାନକୋଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।



ଚିତ୍ର **11.24**

11.4 ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ସମାନ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ପରିସ୍ଥିତି

ସର୍ବସମତାର ସର୍ତ୍ତଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବୁ ।

ଉପପାଦ୍ୟ : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ କୋଣଦ୍ୱୟ ସମାନ ।

ଦତ୍ତ : ΔABCରେ $AB = AC$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle B = \angle C$

ଅଙ୍କନ : $\angle BAC$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହା BCକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

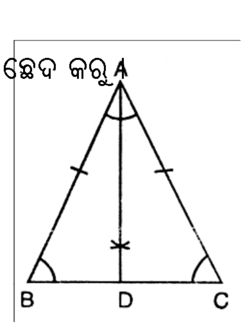


Fig. 11.25

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACDରେ $AB = AC$ (ଦତ୍ତ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)

ଏବଂ $AD = AD$ (ସାଧାରଣ)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ବା-କୋ-ବା)

ଏଣୁ $\angle B = \angle C$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ଆମେ ଏହାକୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ ରୂପେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ।

11.4.1 ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସମାନ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବିପରୀତ ବାହୁଦ୍ୱୟ ସମାନ ।

ଦତ୍ତ : ΔABCରେ $\angle B = \angle C$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AB = AC$

ଅଙ୍କନ : $\angle BAC$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଅଙ୍କନ କର ଓ ଏହା BCକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔACDରେ $\angle B = \angle C$ (ଦତ୍ତ)

$\angle BAD = \angle CAD$ (ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ)

ଏବଂ $AD = AD$ (ସାଧାରଣ ବାହୁ)

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ବା-କୋ-ବା)

ଏଣୁ $AB = AC$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ବାହୁ)

ଏଣୁ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରମାଣିତ ।

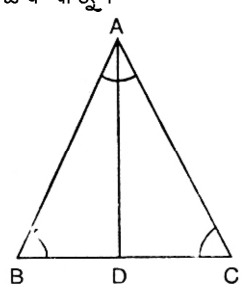


Fig. 11.26

ଉଦାହରଣ : 11.5

ପ୍ରମାଣକର ଯେ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ : ΔABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle A = \angle B = \angle C$

ପ୍ରମାଣ : $AB = AC$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore \angle C = \angle B$ (ସମାନ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ସମାନ) .... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $AC = BC$

$\therefore \angle B = \angle A$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇଲେ,

$\angle A = \angle B = \angle C$

ଏଣୁ ପ୍ରମାଣିତ ।

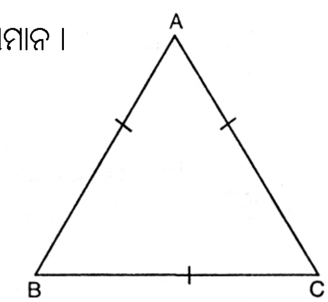


Fig. 11.27

ଉଦାହରଣ : 11.6

ABC ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ $AB = AC$ ଯଦି $BD \perp AC$ ଏବଂ $CE \perp AB$ ହୁଏ (ଚିତ୍ର 11.28), ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BD = CE$ ।

ସମାଧାନ: ΔBDC ଓ ΔCEB ରେ

$\angle BDC = \angle CEB$ (ପ୍ରତ୍ୟେକ 90^0 ହେତୁ)

$\angle DCB = \angle EBC$ (ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ସମାନ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ)

ଏବଂ $BC = CB$ (ସାଧାରଣ ବାହୁ)

$\therefore \Delta BDC \cong \Delta CEB$ (AAS)

ଏଣୁ $BD = CE$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ)

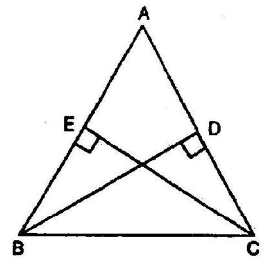


Fig. 11.28

ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ନିମ୍ନମତେ କୁହାଯାଇପାରେ ।

ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଥିବା ସମାନ ସମାନ ବାହୁର ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବାହୁଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ (ବା ଉଚ୍ଚତା) ଦ୍ୱୟ ସମାନ ।

ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ମଧ୍ୟ ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରିବା ଏବଂ ଏହାଦ୍ୱାରା ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟିଯାକ ଉଚ୍ଚତା ସମାନ ।

ଉଦାହରଣ : 11.7 ΔABC ରେ, AC ଓ AB ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ (D ଓ E) । ଯଦି $AB = AC$ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BD = CE$ ।

ସମାଧାନ: $BE = \frac{1}{2}AB$

ଏବଂ $CD = \frac{1}{2}AC$

$\therefore BE = CD$ ....(i)

ΔBEC ଓ ΔCDB ରେ

$BE = CD$ [(i) ଯୋଗୁ]

$BC = CB$ [ସାଧାରଣ ବାହୁ]

ଏବଂ $\angle EBC = \angle DCB$ $[\because AB = AC]$

$\therefore \Delta BEC \cong \Delta CDB$ [ବା-କୋ-ବା]

ଏଣୁ, $CE = BD$ [ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ]

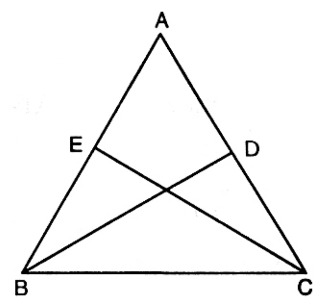


Fig. 11.29

ଉଦାହରଣ : 11.8

ΔABC ରେ $AB = AC$ (ଚିତ୍ର 11.30) ଏବଂ $\angle DAC = 124^0$, ତ୍ରିଭୁଜ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ: $\angle BAC = 180^0 - 124^0 = 56^0$

$\angle B = \angle C$ [ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ]

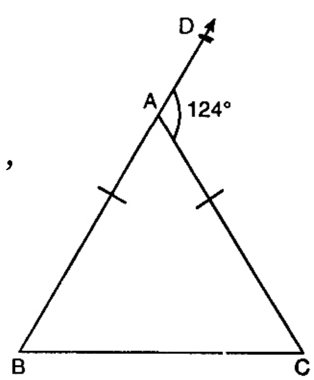


Fig. 11.30

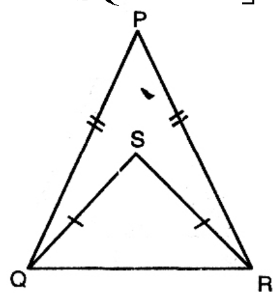
ପୁନଶ୍ଚ $\angle B + \angle C = 124^0$

$$\angle B + \angle C = \frac{124^0}{2} = 62^0$$

ଏଣୁ $\angle A = 56^0, \angle B = 62^0$ ଏବଂ $\angle C = 62^0$

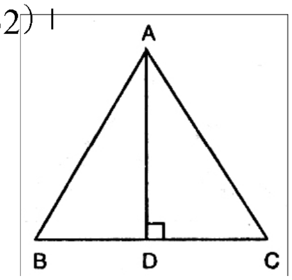
ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 11.2

1. ଚିତ୍ର 11.31ରେ, PQ= PR ଏବଂ SQ = SR । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\angle PQS = \angle PRS$ ।



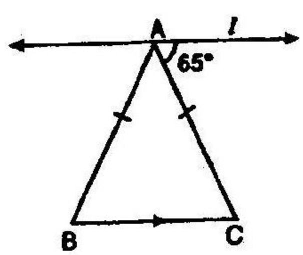
ଚିତ୍ର 11.31

2. ତ୍ରିଭୁଜ ABCରେ, ବାହୁ BCକୁ ଉଚ୍ଚତା AD ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ΔABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ (ଚିତ୍ର 11.32) ।



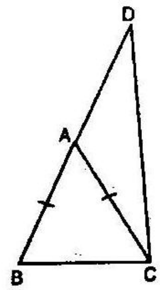
ଚିତ୍ର 11.32

3. ଚିତ୍ର 11.33ରେ ଥିବା ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔABC ର ଭୂମି BC ସହ ℓ ରେଖା ସମାନ୍ତର ଓ ଏହା AC ସହ ℓ ରେଖା ସମାନ୍ତର ଓ ଏହା AC ସହ 65^0 କୋଣ ଅଙ୍କନ କଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



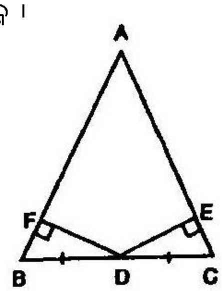
ଚିତ୍ର 11.33

4. ସମଦ୍ୱିବାହୁ ΔABC ରେ AB = AC । BA ବାହୁକୁ D ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବର୍ଦ୍ଧିତ କରାଯାଇଛି ଯେପରିକି AB = AD (ଚିତ୍ର 11.34) । ପ୍ରମାଣକର ଯେ AB = AD ।



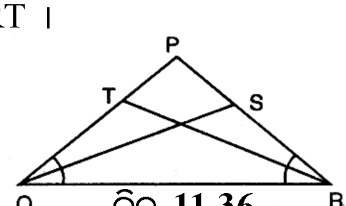
ଚିତ୍ର **11.34**

5. ଚିତ୍ର 11.35ରେ, ΔABCର BC ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Dରୁ AB ଓ AC ବାହୁ ପ୍ରତି ଯଥାକ୍ରମେ DF ଓ DE ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି । ଯଦି DF ଓ DE ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ΔABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।



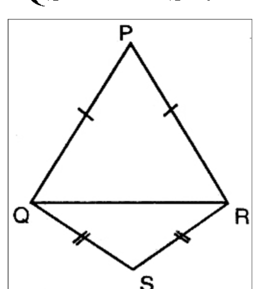
ଚିତ୍ର **11.35**

6. ଚିତ୍ର 11.36ରେ, $PQ = PR$, $\angle Q$ ଓ $\angle R$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଯଥାକ୍ରମେ QS ଓ RT । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $QS = RT$ ।



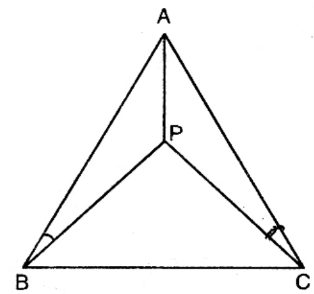
ଚିତ୍ର **11.36**

7. ଏକା ଭୂମି QR ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ହେଉଛନ୍ତି ΔPQR ଓ ΔSQR (ଚିତ୍ର 11.37) । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\angle PQS = \angle PRS$ ।



ଚିତ୍ର **11.37**

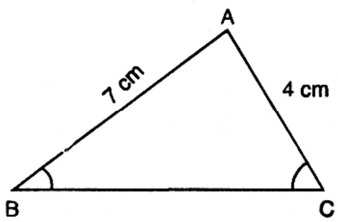
8. ΔABCରେ $AB = AC$ (ଚିତ୍ର 11.38) ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $\angle ABP = \angle ACP$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\angle BAC$ କୋଣକୁ AP ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ।



ଚିତ୍ର 11.38

11.5 ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅସମତା

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନ ସମାନ ହେଲେ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଏବଂ କୋଣମାନ ସମାନ ହେଲେ, ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ଆମେ ଆଗରୁ ପଢ଼ିଛେ । ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନ ଅସମାନ ହେଲେ କୋଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ଓ କୋଣମାନ ଅସମାନ ହେଲେ ବାହୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ କ'ଣ ସମ୍ପର୍କ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ପଢ଼ିବା ।



ଚିତ୍ର 11.39

ଚିତ୍ର 11.39ରେ ଥିବା ΔABCର ବାହୁ ACର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା ବାହୁ ABର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଧିକ । ବର୍ତ୍ତମାନ $\angle B$ ଓ $\angle C$କୁ ମାପିଲେ, ତୁମେ ଦେଖିବ ଯେ ଏହି କୋଣଦୁଇଟି ସମାନ ନୁହେଁ ଏବଂ $\angle B$ ଅପେକ୍ଷା $\angle C$ ବୃହତ୍ତର । ଏକାଧିକ ବାର ଏହି ପରୀକ୍ଷା କଲେ ତୁମେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର ପୂର୍ବ ଫଳାଫଳ ହିଁ ପାଇବ । ଏହି ସମ୍ପର୍କକୁ ଆମେ ନିମ୍ନମତେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ।

11.5.1 ଉପପାଦ୍ୟ :

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁ ଅସମାନ ହେଲେ, ବୃହତ୍ତର ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ, କ୍ଷୁଦ୍ରତର ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ।

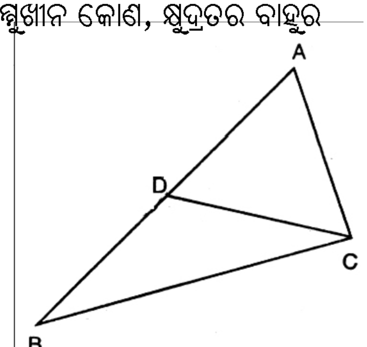


Fig. 11.40

ଦତ୍ତ : ΔABCରେ $AB > AC$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle ACB > \angle ABC$

ଅଙ୍କନ : AB ବାହୁ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ D ନିଅ ଯେପରିକି $AD = AC$ ଏବଂ DC ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ΔACDରେ $AD = AC$

$\therefore \angle ACD = \angle ADC$ [ସମାନ ସମାନ ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣ]

ମାତ୍ର $\angle ADC > \angle ABC$ [ତ୍ରିଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ କୋଣଠାରୁ ବୃହତ୍ତର]

ପୁନଶ୍ଚ, $\angle ACB > \angle ACD$ [D ବିନ୍ଦୁ $\angle ACB$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେତୁ]

$\therefore \angle ACB > \angle ABC$

ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ବିପରୀତ ଉକ୍ତି ସମ୍ବନ୍ଧରେ କ'ଣ କହିପାରିବା ? ଆସ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖିବା ।

ΔABC ରେ (ଚିତ୍ର 11.41), $\angle C$ ଓ $\angle B$ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର । ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\angle C > \angle B$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେ କୋଣଦ୍ୱୟର ବିପରୀତ ବାହୁ AB ଓ AC କୁ ମାପି ସେମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ତୁଳନା କଲେ, ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ AC ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପେକ୍ଷା AB ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅଧିକ ।

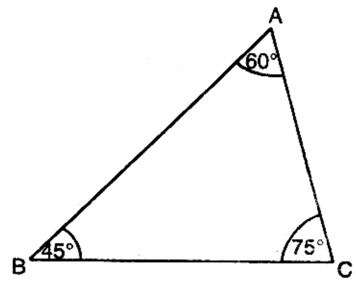


Fig. 11.41

ପୁନଶ୍ଚ $\angle C$ ଓ $\angle A$ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର ଏବଂ ସେ କୋଣ ଦୁଇଟିର ବିପରୀତ ବାହୁ AB ଓ BC ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାପିଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ $\angle C > \angle A$ ଏବଂ $AB > BC$; ଅର୍ଥାତ୍ ବୃହତ୍ତର କୋଣର ବିପରୀତ ବାହୁ ବୃହତ୍ତର ।

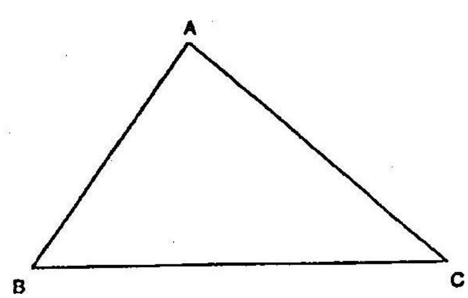
$\angle A$ ଓ $\angle B$ କୁ ତୁଳନା କଲେ ଆମେ ମଧ୍ୟ ଅନୁରୂପ ଫଳାଫଳ ପାଇବା । ଆମେ ଦେଖିବା, $\angle A > \angle B$ ଏବଂ $BC > AC$; ଅର୍ଥାତ୍ ବୃହତ୍ତର କୋଣର ବିପରୀତ ବାହୁ ବୃହତ୍ତର । ତୁମେ ମଧ୍ୟ ସମକୋଣୀ ବା ସ୍ଥୁଳକୋଣୀ, ଯେକୌଣସି ପ୍ରକାର ବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରି ବାହୁ ଓ କୋଣ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପୂର୍ବ ଧର୍ମର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବ ।

ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି କୋଣକୁ ମାପ । ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର ଏବଂ ଉକ୍ତ କୋଣଦ୍ୱୟର ବିପରୀତ ବାହୁ ଦୁଇଟିକୁ ମାପି ସେ ଦୁଇଟିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମଧ୍ୟରେ ତୁଳନା କର । ତୁମେ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଫଳାଫଳ ସର୍ବଦା ସତ୍ୟ ବୋଲି ଦେଖିବ ଏହି ଫଳାଫଳକୁ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଧର୍ମ ବୋଲି କହିବା ।

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜରେ, ବୃହତ୍ତର କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ବୃହତ୍ତର ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବା ଯେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ସମକୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ବୃହତ୍ତମ ଏବଂ ଏକ ସ୍ଥୁଳକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ, ସ୍ଥୁଳକୋଣର ବିପରୀତ ବାହୁ ବୃହତ୍ତମ ।

ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର କୋଣତ୍ରୟ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ ଜାଣିଛ, ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣର ସମଷ୍ଟି 180^0 ବୋଲି ତୁମେ ଜାଣିଛ । ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିବାହୁ ମଧ୍ୟରେ କିଛି ସମ୍ପର୍କ ଅଛି କି ନାହିଁ, ବର୍ତ୍ତମାନ ତାହା ଜାଣିବା ।



ଚିତ୍ର 11.42

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ABC ଅଙ୍କନ କର । ଏହାର AB, BC ଓ CA ବାହୁ ତିନୋଟିକୁ ମାପ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଏହି ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇ ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଅର୍ଥାତ୍ AB+ BC, BC + CA ଓ CA + AB ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଭାବରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଯୋଡ଼ା ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିକୁ ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ତୁଳନା କର । ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିପାରିବ ଯେ

(i) $AB + BC > CA$

(ii) $BC + CA > AB$ ଏଣୁ

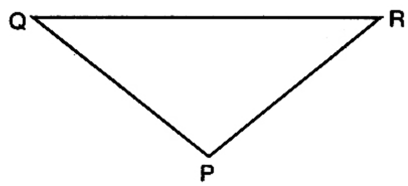
(iii) $CA + AB > BC$

ଏଣୁ ଆମେ ସିଦ୍ଧାନ୍ତ କରିବା

ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ ବଡ଼ ।

ତୁମ ପାଇଁ କାର୍ଯ୍ୟ

ତିନୋଟି କଣ୍ଟା P, Q ଓ Rକୁ ଗୋଟିଏ କାଠପଟା ଉପରେ ଅଥବା ଅନ୍ୟ କୌଣସି ପୃଷ୍ଠ ଉପରେ ପୋତିଦିଅ । QR ସହ ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଖଣ୍ଡେ ସୂତା ନିଅ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ସୂତାଖଣ୍ଡେ ନିଅ ଯାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ



ଚିତ୍ର 11.43

(QP + PR) ସହ ସମାନ । ଏହି ଦୁଇ ସୂତାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ତୁଳନା କର । ତୁମେ ଦେଖିବ (PQ + RR) ସହ ସମାନ ସୂତାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, QR ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ସୂତାଖଣ୍ଡଠାରୁ ବୃହତ୍ତର । ଏଥିରୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ଧର୍ମର ପୁନଃ ପ୍ରତିପାଦନ ହେଲା ।

ଉଦାହରଣ : 11.9

ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚାରୋଟି କ୍ଷେତ୍ରରୁ କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଥିବା ମାପଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ତ୍ରିଭୁଜ ଅଙ୍କନ କରିବା ସମ୍ଭବ ହେବ ?

(a) 5 ସେ.ମି., 8 ସେ.ମି. ଓ 3 ସେ.ମି.

(b) 14 ସେ.ମି., 6 ସେ.ମି. ଓ 7 ସେ.ମି.

(c) 3.5 ସେ.ମି., 2.5 ସେ.ମି. ଓ 5.2 ସେ.ମି.

(d) 20 ସେ.ମି., 25 ସେ.ମି. ଓ 48 ସେ.ମି.

ସମାଧାନ:

(a) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $5 + 3 > 8$

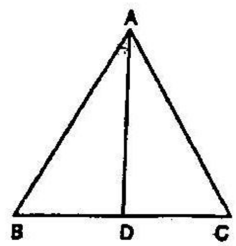
(b) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $6 + 7 > 14$

(c) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $3.5 + 2.5 > 5.2$ ଏବଂ $3.5 + 5.2 > 2.5$ ଏବଂ $2.5 + 5.2 > 3.5$

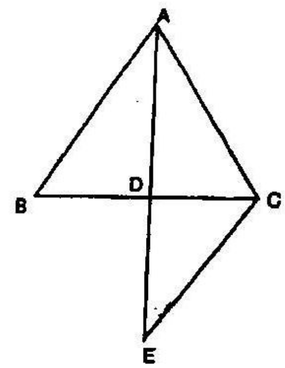
(d) କ୍ଷେତ୍ରରେ, $20 + 25 > 48$

ଉତ୍ତର (d)

ଉଦାହରଣ : 11.10 : ଚିତ୍ର 11.44ରେ ΔABCର ଗୋଟିଏ ମ୍ଧ୍ୟମା AD । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AB + AC > 2AD$



ଚିତ୍ର 11.44



ଚିତ୍ର 11.45

ସମାଧାନ: ADକୁ E ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବଢ଼ାଅ ଯେପରି $AD = DE$ ଏବଂ EC ରେଖାଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କର ।

ΔABD ଓ ΔECDକୁ ବିଚାର କର ।

ଏଠାରେ, $BD = CD$

$\angle ADB = \angle EDC$

ଏବଂ $AD = ED$

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$

$\therefore AB = EC$

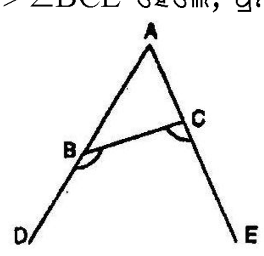
ବର୍ତ୍ତମାନ ΔACEରେ

$EC + AC > AE$

ବା $AB + AC > 2AD \quad [\because AD = ED \rightarrow AE = 2AD]$

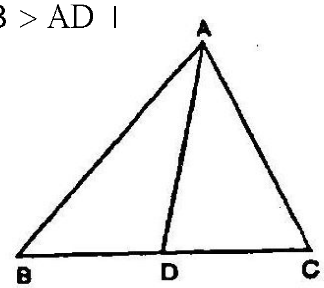
ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 11.3

1. PQRS ଚତୁର୍ଭୁଜରେ କର୍ଣ୍ଣ PR ଓ QS ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $PQ + QR + RS + SP > PR + QS$ ।
2. ΔABC ରେ $AB = 5.7$ ସେ.ମି., $BC = 6.2$ ସେ.ମି. ଏବଂ $CA = 4.8$ ସେ.ମି. । ଏହାର ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣର ନାମ ଲେଖ ।
3. ଚିତ୍ର 11.46 ରେ, $\angle CBD > \angle BCE$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AB > AC$ ।



ଚିତ୍ର 11.46

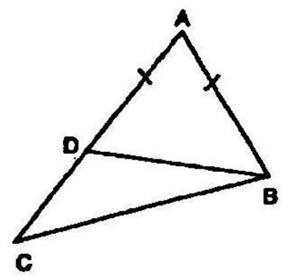
4. ଚିତ୍ର 11.47 ରେ, ΔABC ର BC ବାହୁ ଉପରେ D କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । $AB > AC$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ $AB > AD$ ।



ଚିତ୍ର 11.47

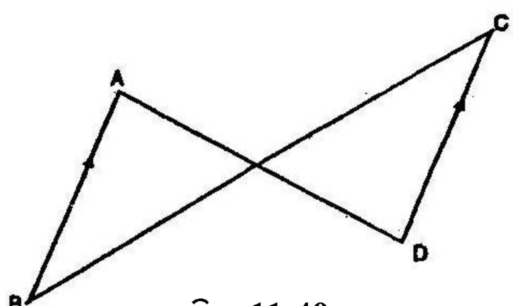
5. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି ମଧ୍ୟମାର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ଅପେକ୍ଷା ଏହାର ତିନୋଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟି ବୃହତ୍ତର । [ଉଦାହରଣ 11.10ର ପ୍ରୟୋଗ କର]

6. ଚିତ୍ର 11.48ରେ $AB = AD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $BC > CD$ ।
[ସୂଚନା : $\angle ADB = \angle ABD$]



ଚିତ୍ର 11.48

7. ଚିତ୍ର 11.49 ରେ, AB ଓ CD ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $BC > AD$ ।



ଚିତ୍ର 11.49

ଆମେ ଯାହା ଶିଖିଲେ

- ଯେଉଁ ଚିତ୍ର ଦୁଇଟି ଆକୃତି ଅଭିନ୍ନ ଓ ଆକାର ସମାନ, ସେ ଚିତ୍ର ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି ।
- ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚିତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ ଅନ୍ୟଟି ଉପରେ ରଖିଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ଚିତ୍ର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ପରସ୍ପର ସହ ମିଶିଯିବେ । ଗୋଟିଏ ଚିତ୍ରର ସମସ୍ତ ଅଙ୍ଗ, ଅନ୍ୟ ଚିତ୍ରର ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ ସହ ସମାନ ।

ତ୍ରିଭୂଜ ମାନଙ୍କର ସର୍ବସମତା

ଟିପ୍ପଣୀ

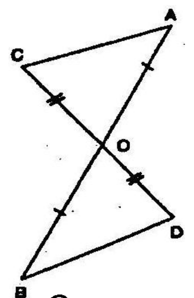
- ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜକୁ ସର୍ବସମ ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ, ସେ ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରେ ତିନିଯୋଡ଼ା ଅନୁରୂପ ଅଙ୍ଗ ପରସ୍ପର ସମାନ ବୋଲି ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନିମ୍ନସ୍ଥ ଚାରିପ୍ରକାର ସମାନତା ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ସମାନତା ଦ୍ୱାରା ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବମ ହୋଇପାରିବେ ।

  (i) ବା-କୋ-ବା (ii) କୋ-ବା-କୋ ବା କୋ-କୋ-ବା

  (iii) ବା-ବା-ବା (iv) ସ-କ-ବା
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ଉକ୍ତ ବାହୁଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସମାନ ।
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ ହେଲେ, ଉକ୍ତ କୋଣଦ୍ୱୟର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ।
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ନ ହେଲେ, ବୃହତ୍ତର ବାହୁର ସମ୍ମୁଖୀନ କୋଣର ପରିମାଣ ବୃହତ୍ତର ।
- ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣ ଅସମାନ ହେଲେ, ବୃହତ୍ତର କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ ବୃହତ୍ତର ।
- ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ବାହୁର ସମଷ୍ଟି ଏହାର ତୃତୀୟ ବାହୁ ଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ।

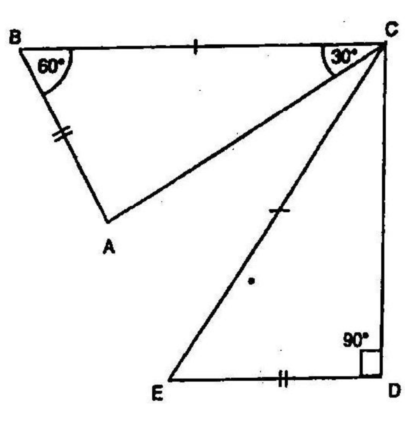
ପାଠ ଶେଷ ଅନୁଶୀଳନୀ

1. AB ଓ CD ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 11.50) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ CA = BD ।



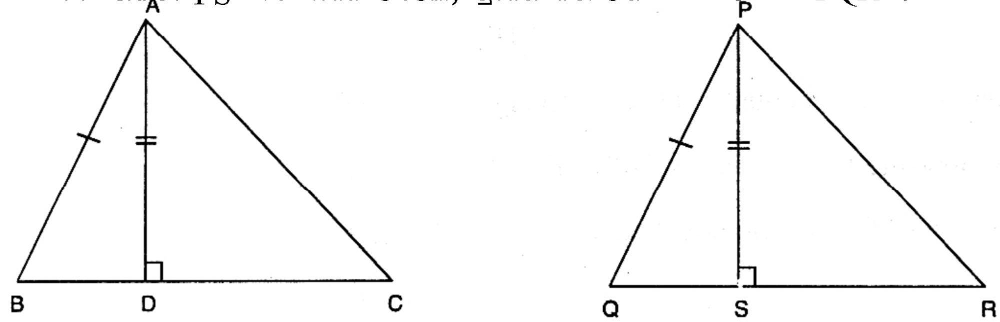
ଚିତ୍ର **11.50**

2. ΔABC ର ମଧ୍ୟମା AD ଯଦି ବାହୁ BC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମଦ୍ୱିବାହୁ ।
3. ΔABC ଓ ΔCDE ମଧ୍ୟରେ, $BC = CE$ ଏବଂ $AB = DE$ (ଚିତ୍ର 11.51), $\angle B = 60^0, \angle ACE = 30^0$ ଏବଂ $\angle D = 90^0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।



ଚିତ୍ର **11.51**

4. ΔABC ର ବାହୁ AB ଓ BC ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା AD ଯଥାକ୍ରମେ ΔPQR ର ବାହୁ PQ, QR ଏବଂ ଉଚ୍ଚତା PS ସହ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ ।

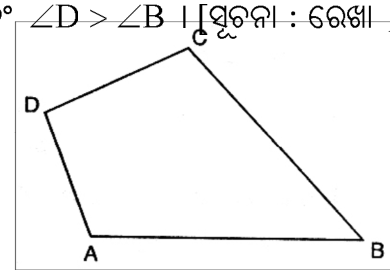


ଚିତ୍ର **11.52**

5. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ 30^0 । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ହେଉଛି 30^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଦୁଇଗୁଣ ।

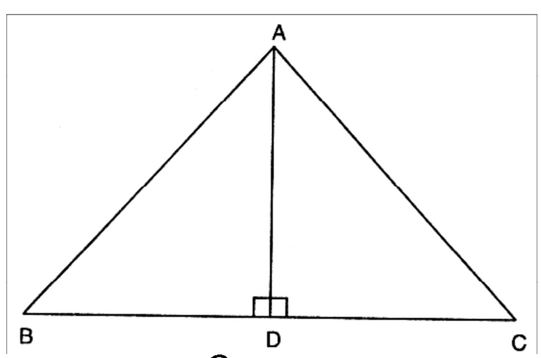
6. AB ଓ CD ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି ଏବଂ O ହେଉଛି ABର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ । AC ଓ DB ପରସ୍ପର ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ CD ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ O ।

7. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବୃହତ୍ତମ ବାହୁ CD ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁ DC (ଚିତ୍ର 11.53) । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $\angle C > \angle A$ ଏବଂ $\angle D > \angle B$ । [ସୂଚନା : ରେଖା AC ଓ BD ଅଙ୍କନ କର]



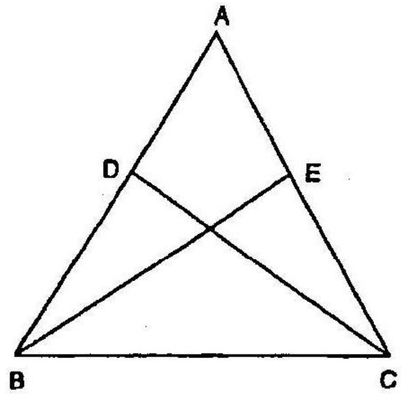
ଚିତ୍ର **11.53**

8. ABC ଏକ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ଯାହାର $AB = AC$ ଏବଂ A ବିନ୍ଦୁରୁ AD ହେଉଛି BC ପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ $BD = DC$ ।



ଚିତ୍ର **11.54**

9. ଗୋଟିଏ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ସମାନ ବାହୁଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ମଧ୍ୟମା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସମାନ । [ସୂଚନା : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta DBC = \Delta ECB$]



ଚିତ୍ର **11.55**

ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବାର ଉତ୍ତର

11.1

1.(a) 2.(b)

3.(b) 4.(c)

11.2 3. $\angle B = \angle C = 60^0$, $\angle A = 50^0$

11.3 2. ବୃହତ୍ତମ କୋଣ ହେଉଛି A ଏବଂ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ କୋଣ ହେଉଛି B ।