# ୪

# ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ ଏବଂ ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ପାଠରେ ତୁମେ ବୀଜଗଣିତୀୟ ରାଶିମାନଙ୍କର ବିଶେଷ କରି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗୁଣନ ବିଷୟରେ ପଢ଼ିଛ । ବୀଜଗଣିତ ଅଧ୍ୟୟନ କଲାବେଳେ ଆମେ କେତେକ ଗୁଣନ ଆମର ଦୃଷ୍ଟିକୁ ଆସେ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ବହୁ ସମୟରେ ଆମେ ଦେଖିଥାଉ । ସେପରି ଗୁଣନଗୁଡ଼ିକ ସହ ସୁପରିଚିତ ହେବା ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନର ବିଭିନ୍ନ ପାଦ ଦର୍ଶାଇ ଗୁଣନ କାର୍ଯ୍ୟ କରିବା ଦ୍ୱାରା ଯେଉଁ ସମୟ ଓ ଶକ୍ତି ନଷ୍ଟ ହୁଏ ତାକୁ ବଞ୍ଚାଇ ପାରିବା । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $108\times108,\ 97\times97,\ 104\times96,\ 99\times99\times99$ ଗୁଣନଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ସହଜରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ଯଦି $(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)(a-b),\ (a-b)^3$ ର ଗୁଣଫଳ ଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ଏହିପରି ଗୁଣନଗୁଡ଼ିକୁ **ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ** କୁହାଯାଏ ।

ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ହେଉଛି କେତେକ ଦିଆଯାଇଥିବା ଗୁଣଫଳ ଯଥା : $a^2-b^2, a^3+8b^3$ ଆଦିର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପଦ୍ଧତି । ଯେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗ ଗୁଡ଼ିକ କେବଳ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ସେହିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କାର୍ଯ୍ୟ କେବଳ ଆମେ ବିଚାର କରିବା ।

ଏହି ପାଠରେ, ତୁମେ କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ ଏବଂ କେତେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ପର୍କରେ ପଢ଼ିବ, ଏହାଛଡ଼ା ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ଓ ଲ:ସା:ଗୁ: ନିରୂପଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ମଧ୍ୟ ପଢ଼ିବ । ଶେଷରେ ପରିମେୟ ବୀଜଗଣିତୀୟ ରାଶି ବିଷୟରେ ଜାଣିବ ଏବଂ ପରିମେୟ ରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରିବାର ପଦ୍ଧତି ମଧ୍ୟ ଶିଖିବ ।

## ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ

ଏହି ପାଠ ପଢ଼ିସାରିବା ପରେ, ତୁମେ

- ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ $(a\pm b)^2, (a+b)(a-b), (x+a)(x+b), (a+b)(a^2-ab+b^2), (a-b)(a^2+ab+b^2), (a\pm b)^3$ ଏବଂ $(ax+b)(cx+d);$ ଲାଗି ସୂତ୍ର ଜାଣିବ ।
- ସୂତ୍ର ବ୍ୟବହାର କରି ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ବର୍ଗ ଓ ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ତଥା $a^2-b^2, a^3\pm b^3$ ରୂପକ ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବ ।
- $ax^2+bx+c\,(a\neq0)$ ଜାତୀୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ନିରୂପଣ କରିପାରିବ ।
- ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ଦ୍ୱାରା ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ଓ ଲ:ସା:ଗୁ: ନିରୂପଣ କରିପାରିବ ।

- ଗୋଟିଏ ବା ଦୁଇଟି ଚଳକୁ ନେଇ ଗଠିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉଦାହରଣ ଦେଇପାରିବ ।
- ପରିମେୟ ରାଶି (ବୀଜଗାଣିତିକ) ଉପରେ ଚାରି ମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା କାର୍ଯ୍ୟ କରିପାରିବ ।

## ପ୍ରତ୍ୟାଶିତ ପୂର୍ବଜ୍ଞାନ

- ସଂଖ୍ୟା ବ୍ୟବସ୍ଥା ଓ ଚାରିମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ।
- ଘାତାଙ୍କ ନିୟମାବଳୀ ।
- ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି ।
- ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ନେଇ ଚାରି ମୌଳିକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦ ।
- ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ଓ ଲ:ସା:ଗୁ: ।
- ପ୍ରାଥମିକ ଓ ଉଚ୍ଚ ପ୍ରାଥମିକ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ଜ୍ୟାମିତି ଓ ପରିମିତି ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ମୌଳିକ ଧାରଣା ।

## 4.1 ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ

ବୀଜଗଣିତରେ ବାରମ୍ବାର ଦେଖାଯାଉଥିବା କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

1. ଆସ $(a+b)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା :

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$= a(a+b) + b(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

### ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ

ପାଖରେ ଥିବା ଚିତ୍ରକୁ ଧ୍ୟାନ ଦେଇ ଦେଖ :

(i) $(a+b)^2$=ABCD ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ଆୟତଚିତ୍ର EBIF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ +

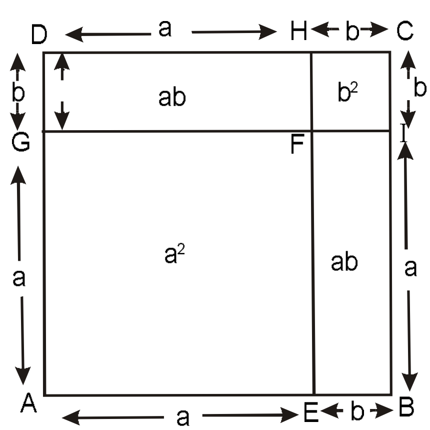
ଆୟତଚିତ୍ର DGFH ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ +

ବର୍ଗ CHFI ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

ଏଣୁ $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



2. ଆସ $(a-b)^2$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା :

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a(a-b) - b(a-b)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

**ଦ୍ୱିତୀୟ ପ୍ରଣାଳୀ :** $(a+b)^2$ କୁ ବ୍ୟବହାର କରି

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ $a - b = a + (-b)$

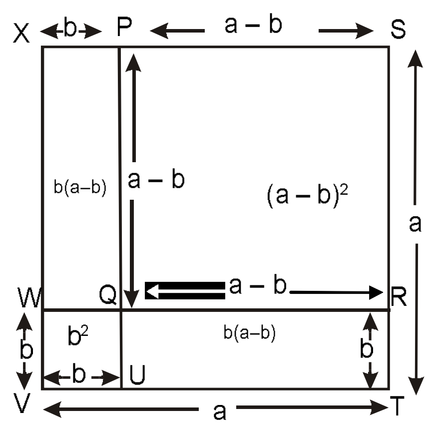
$\therefore (a-b)^2 = [a + (-b)]^2$

$= a^2 + 2(a)(-b) + (-b)^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

## ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ

ପାଖରେ ଥିବା ଚିତ୍ରକୁ ଧ୍ୟାନ ଦେଇ ଦେଖ :




$(a-b)^2$=PQRS ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= STVX ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - (ଆୟତଚିତ୍ର RTVW ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + PUVX ଆୟତଚିତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ - QUVW ବର୍ଗର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ)

$= a^2 - (ab + ab - b^2)$

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$

**ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ :** ଆମେ ପାଇଲେ-

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .....(1)

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .....(2)

(1) + (2) ରୁ ମିଳିବ :

$\mathbf{(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)}$

(1) – (2) ରୁ ମିଳିବ :

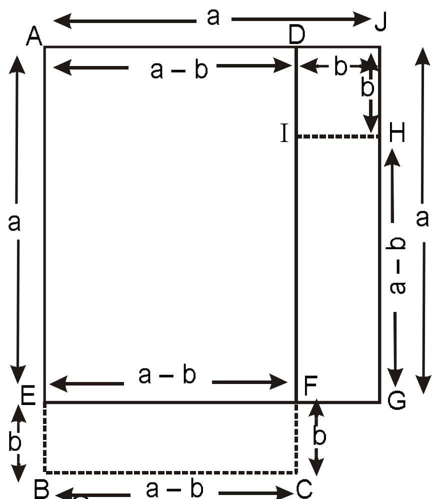
$\mathbf{(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab}\ (1) + (2)$

(3) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ $(a+b)(a-b)$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା

$(a+b)(a-b) = a(a-b) + b(a-b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$




### ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରଣାଳୀରେ ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ :

$(a+b)(a-b)$ = ଆୟତଚିତ୍ର ABCD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ଆୟତଚିତ୍ର AEFD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

\+ ଆୟତଚିତ୍ର EBCF ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ଆୟତଚିତ୍ର AEFD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

\+ ଆୟତଚିତ୍ର FGHI ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= (ଆୟତଚିତ୍ର AEFD ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ + ଆୟତଚିତ୍ର FGHI ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

\+ ବର୍ଗ DIHJ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ) - ବର୍ଗ DIHJ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

= ବର୍ଗ AEGJ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ – ବର୍ଗ DIHJ ର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ

$= a^2 - b^2$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a+b)\ (a-b) = a^2 - b^2}$

ପାଟୀଗଣିତରେ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳକୁ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟିର ବିୟୋଗଫଳ ସହ ଗୁଣନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉପଯୋଗୀ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$64 \times 56 = (60+4) \times (60-4)$

$= 60^2 - 4^2$

$= 3600 - 16$

$= 3584$

(4) ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ $(x+a)\ (x+b)$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$(x+a)(x+b) = x(x+b) + a(x+b)$ ବଣ୍ଟନ ନିୟମ

$= x^2 + bx + ax + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

ଏଣୁ, $\mathbf{(x+a)\ (x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ, (i) $\mathbf{(x-a)\ (x-b) = x^2 - (a+b)\,x + ab}$

(ii) $\mathbf{(x-a)\ (x+b) = x^2 + (b-a)\,x - ab}$

ଛାତ୍ରମାନେଏହି ଫଳାଫଳ ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରନ୍ତୁ ।

(5) ଆସ ବର୍ତ୍ତମାନ $(ax + b)(cx + d)$ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$$(ax + b)(cx + d) = ax(cx + d) + b(cx + d)$$
$$= acx^2 + adx + bcx + bd$$
$$= acx^2 + (ad + bc)x + bd$$

ଏଣୁ, $\mathbf{(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ, (i) $\mathbf{(ax - b)(cx - d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd}$

(ii) $\mathbf{(ax - b)(cx + d) = acx^2 - (bc - ad)x - bd}$

ଛାତ୍ରମାନେ ଏହି ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିବା ବିଧେୟ ।

## ଉଦାହରଣ 4.1

ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳ ଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(2a + 3b)^2$ (ii) $\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2$

(iii) $(3x + y)(3x - y)$ (iv) $(x + 9)(x + 3)$

(v) $(a + 15)(a - 7)$ (vi) $(5x - 8)(5x - 6)$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a)$ (viii) $(2x + 5)(3x + 4)$

**ସମାଧାନ :**

(i) ଏଠାରେ a ସ୍ଥାନରେ 2a ଅଛି ଏବଂ b ସ୍ଥାନରେ 3b ଅଛି ।

$$(2a + 3b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2$$
$$= 4a^2 + 12ab + 9b^2$$

(ii) ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ (2) ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପାଇବା

$$\left(\frac{3}{2}a - 6b\right)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}a\right)(6b) + (6b)^2$$
$$= \frac{9}{4}a^2 - 18ab + 36b^2$$

(iii) $(3x + y)(3x - y) = (3x)^2 - y^2$ (ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ (3) ବ୍ୟବହାର କରି)

$$= 9x^2 - y^2$$

(iv) $(x + 9)(x + 3) = x^2 + (9 + 3)x + 9 \times 3$ (ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ (4) ବ୍ୟବହାର କରି)

$$= x^2 + 12x + 27$$

(v) $(a + 15)(a - 7) = a^2 + (15 - 7)a - 15 \times 7$

$= a^2 + 8a - 105$

(vi) $(5x - 8)(5x - 6) = (5x)^2 - (8 + 6)(5x) + 8 \times 6$

$= 25x^2 - 70x + 48$

(vii) $(7x - 2a)(7x + 3a) = (7x)^2 + (3a - 2a)(7x) - (3a)(2a)$

$= 49x^2 + 7ax - 6a^2$

(viii) $(2x + 5)(3x + 4) = (2 \times 3)x^2 + (2 \times 4 + 5 \times 3)x + 5 \times 4$

$= 6x^2 + 23x + 20$

ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ (ଯାହାକୁ **ବୀଜଗାଣିତିକ** ସୂତ୍ର ବୋଲି ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ)ର ବ୍ୟବହାର କରି ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟ ସହଜରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇପାରିବ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଆସ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

**ଉଦାହରଣ 4.2** ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳର ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $101 \times 101$ (ii) $98 \times 98$ (iii) $68 \times 72$

(iv) $107 \times 103$ (v) $56 \times 48$ (vi) $94 \times 99$

**ସମାଧାନ :** (i) $101 \times 101 = 101^2 = (100 + 1)^2$

$= 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2$

$= 10000 + 200 + 1$

$= 10201$

(ii) $98 \times 98 = 98^2 = (100 - 2)^2$

$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$

$= 10000 - 400 + 4$

$= 9604$

(iii) $68 \times 72 = (70 - 2) \times (70 + 2)$

$= 70^2 - 2^2$

$= 4900 - 4$

$= 4896$

(iv) $107 \times 103 = (100 + 7)(100 + 3)$

$= 100^2 + (7 + 3) \times 100 + 7 \times 3$

$= 10000 + 1000 + 21$

$= 11021$

(v) $56 \times 48 = (50+6)(50-2)$
$= 50^2 + (6-2) \times 50 - 6 \times 2$
$= 2500 + 200 - 12$
$= 2688$

(vi) $94 \times 99 = (100-6)(100-1)$
$= 100^2 - (6+1) \times 100 + 6 \times 1$
$= 10000 - 700 + 6$
$= 9306$

## ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 4.1

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(5x+y)^2$ (ii) $(x-3)^2$ (iii) $(ab+cd)^2$

(iv) $(2x-5y)^2$ (v) $\left(\frac{x}{3}+1\right)^2$ (vi) $\left(\frac{z}{2}-\frac{1}{3}\right)^2$

(vii) $(a^2+5)(a^2-5)$ (viii) $(xy-1)(xy+1)$ (ix) $\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right)$

(x) $\left(\frac{2}{3}x^2-3\right)\left(\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}\right)$ (xi) $(2x+3y)(3x+2y)$ (xii) $(7x+5y)(3x-y)$

2. ସରଳ କର ।

(i) $(2x^2+5)^2-(2x^2-5)^2$ (ii) $(a^2+3)^2+(a^2-3)^2$

(iii) $(ax+by)^2+(ax-by)^2$ (iv) $(p^2+8q^2)^2-(p^2-8q^2)^2$

3. ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନସ୍ଥ ହିସାବଗୁଡ଼ିକ ସମ୍ପାଦନ କର ।

(i) $102 \times 102$ (ii) $108 \times 108$ (iii) $69 \times 69$

(iv) $998 \times 998$ (v) $84 \times 76$ (vi) $157 \times 143$

(vii) $306 \times 294$ (viii) $508 \times 492$ (ix) $105 \times 109$

(x) $77 \times 73$ (xi) $94 \times 95$ (xii) $993 \times 996$

## 4.2 ଆଉ କେତେକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ

(6) ଦ୍ୱିପଦୀ $(a+b)$କୁ ବିଚାର କର । ଆସ ଏହାର ଘନ ବା ତୃତୀୟ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2$

$= (a+b)(a^2+2ab+b^2)$ (ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି)

$= a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା)

$= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$

$= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$= a^3+3ab(a+b)+b^3$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3}$

(7) ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ $(a-b)$ର ଘନ ବା ତୃତୀୟଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।

$(a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2$

$= (a-b)(a^2-2ab+b^2)$ (ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ବ୍ୟବହାର କରି)

$= a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା)

$= a^3-2a^2b+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3$

$= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$= a^3-3ab(a-b)-b^3$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a-b)^3 = a^3-3ab(a-b)-b^3}$

**ଲକ୍ଷ୍ୟକର :** $(a+b)^3 = a^3+3ab(a+b)+b^3$ ରେ $b$ ପରିବର୍ତ୍ତେ $-b$ ନେଇ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ବ ଫଳାଫଳ ମିଳିପାରିଥା'ନ୍ତା ।

(8) $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$

$= a^3+b^3$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3}$

(9) $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a(a^2+ab+b^2)-b(a^2+ab+b^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$

$= a^3-b^3$

ଏଣୁ, $\mathbf{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3}$

ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ ଗୁଡ଼ିକ ବ୍ୟବହାର କରି ଆସ କେତେକ ଉଦାହରଣର ଆଲୋଚନା କରିବା :

**ଉଦାହରଣ : 4.3** ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(7x+9y)^3$ (ii) $(px-yz)^3$ (iii) $(x-4y^2)^3$

(iv) $(2a^2+3b^2)^3$ (v) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)^3$ (vi) $\left(1+\frac{4}{3}c\right)^3$

**ସମାଧାନ :**

(i) $(7x+9y)^3 = (7x)^3+3(7x)(9y)(7x+9y)+(9y)^3$

$= 343x^3 + 189xy(7x+9y) + 729y^3$

$= 343x^3 + 1323x^2y + 1701xy^2 + 729y^3$

(ii) $(px-yz)^3 = (px)^3 - 3(px)(yz)(px-yz) - (yz)^3$

$= p^3x^3 - 3pxyz(px-yz) - y^3z^3$

$= p^3x^3 - 3p^2x^2yz + 3pxy^2z^2 - y^3z^3$

(iii) $(x-4y^2)^3 = x^3 - 3x(4y^2)(x-4y^2) - (4y^2)^3$

$= x^3 - 12xy^2(x-4y^2) - 64y^6$

$= x^3 - 12x^2y^2 + 48xy^4 - 64y^6$

(iv) $(2a^2+3b^2)^3 = (2a^2)^3 + 3(2a^2)(3b^2)(2a^2+3b^2) + (3b^2)^3$

$= 8a^6 + 18a^2b^2(2a^2+3b^2) + 27b^6$

$= 8a^6 + 36a^4b^2 + 54a^2b^4 + 27b^6$

(v) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right)^3 = \left(\frac{2}{3}a\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{5}{3}b\right)\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right) - \left(\frac{5}{3}b\right)^3$

$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{10}{3}ab\left(\frac{2}{3}a-\frac{5}{3}b\right) - \frac{125}{27}b^3$

$= \frac{8}{27}a^3 - \frac{20}{9}a^2b + \frac{50}{9}ab^2 - \frac{125}{27}b^3$

(vi) $\left(1+\frac{4}{3}c\right)^3 = (1)^3 + 3(1)\left(\frac{4}{3}c\right)\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \left(\frac{4}{3}c\right)^3$

$= 1 + 4c\left(1+\frac{4}{3}c\right) + \frac{64}{27}c^3$

$= 1 + 4c + \frac{16}{3}c^2 + \frac{64}{27}c^3$

**ଉଦାହରଣ : 4.4** ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣଫଳ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଘନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 19 (ii) 101 (iii) 54 (iv) 47

**ସମାଧାନ :** (i) $19^3 = (20-1)^3$

$= 20^3 - 3 \times 20 \times 1\ (20-1) - 1^3$

$= 8000 - 60\ (20-1) - 1$

$= 8000 - 1200 + 60 - 1$

$= 6859$

(ii) $101^3 = (100+1)^3$

$= 100^3 + 3 \times 100 \times 1\ (100+1) + 1^3$

$= 1000000 + 300 \times 100 + 300 + 1$

$= 1030301$

(iii) $54^3 = (50+4)^3$

$= 50^3 + 3 \times 50 \times 4\ (50+4) + 4^3$

$= 125000 + 600\ (50+4) + 64$

$= 125000 + 30000 + 2400 + 64$

$= 157464$

(iv) $47^3 = (50-3)^3$

$= 50^3 - 3 \times 50 \times 3\ (50-3) - 3^3$

$= 125000 - 450\ (50-3) - 27$

$= 125000 - 22500 + 1350 - 27$

$= 103823$

**ଉଦାହରଣ : 4.5** ବିନା ଗୁଣନରେ ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $(2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$

(ii) $(3a-2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$

**ସମାଧାନ :** (i) $(2a+3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2) = (2a+3b)[(2a)^2 - (2a)(3b) + (3b)^2]$

$= (2a)^3 + (3b)^3$

$= 8a^3 + 27b^3$

(ii) $(3a-2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2) = (3a-2b)[(3a)^2 + (3a)(2b) + (2b)^2]$

$= (3a)^3 - (2b)^3$

$= 27a^3 - 8b^3$

**ଉଦାହରଣ : 4.6** ସରଳ କର ।

(i) $(3x - 2y)^3 + 3\,(3x - 2y)^2\,(3x + 2y) + 3(3x - 2y)\,(3x + 2y)^2 + (3x + 2y)^3$

(ii) $(2a - b)^3 + 3\,(2a - b)\,(2b - a)\,(a + b) + (2b - a)^3$

**ସମାଧାନ :** (i) $3x - 2y = a$ ଓ $3x + 2y = b$ ନେଲେ,

ଦତ୍ତ ରାଶିର ରୂପ ହେବ

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

$= (3x - 2y + 3x + 2y)^3$

$= (6x)^3$

$= 216x^3$

(ii) $2a - b = x$ ଓ $2b - a = y$ ନେଲେ $a + b = x + y$ ହେବ

ଫଳରେ ଦତ୍ତ ରାଶିଟି ହେବ

$x^3 + 3xy\,(x + y) + y^3$

$= (x + y)^3$

$= (a + b)^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

**ଉଦାହରଣ : 4.7** ସରଳ କର ।

(i) $\dfrac{857\times857\times857-537\times537\times537}{857\times857+857\times537+537\times537}$

(ii) $\dfrac{674\times674\times674+326\times326\times326}{674\times674-674\times326+326\times326}$

**ସମାଧାନ :** (i) ଦତ୍ତ ରାଶିଟି ନିମ୍ନ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶିତ ହେବ

$$\frac{857^3-537^3}{857^2+857\times537+537^2}$$

ମନେକର $857 = a$ ଓ $537 = b$ ନେଲେ, ଦତ୍ତ ରାଶିର ରୂପ ହେବ

$$\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}=a-b$$

ଟିପ୍ପଣୀ

$= 857 - 537$

$= 320$

(ii) ଦତ୍ତ ରାଶିଟି ହେବ $\dfrac{674^3 + 326^3}{674^2 - 674 \times 326 + 326^2}$

$$= \frac{(674+326)(674^2 - 674 \times 326 + 326^2)}{674^2 - 674 \times 326 + 326^2}$$

$= 674 + 326$

$= 1000$

## ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 4.2

1. ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ ବିସ୍ତାରିତ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $(3x + 4y)^3$ (ii) $(p - qr)^3$ (iii) $\left(a + \dfrac{b}{3}\right)^3$

(iv) $\left(\dfrac{a}{3} - b\right)^3$ (v) $\left(\dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{2}{3}b^2\right)^3$ (vi) $\left(\dfrac{1}{3}a^2x^3 - 2b^3y^2\right)^3$

2. ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ତୃତୀୟ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 8 (ii) 12 (iii) 18 (iv) 23

(v) 53 (vi) 48 (vii) 71 (viii) 69

(ix) 97 (x) 99

3. ଗୁଣନ ନ କରି ନିମ୍ନ ଗୁଣଫଳଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(2x + y)(4x^2 - 2xy + y^2)$ (ii) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

(iii) $(1 + x)((1 - x + x^2)$ (iv) $(2y - 3z^2)(4y^2 + 6yz^2 + 9z^4)$

(v) $(4x + 3y)(16x^2 - 12xy + 9y^2)$ (vi) $\left(3x - \dfrac{1}{7}y\right)\left(9x^2 + \dfrac{3}{7}xy + \dfrac{1}{49}y^2\right)$

4. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $a + 2b = 10$ ଓ $ab = 15$ ନେଇ $a^3 + 8b^3$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସୂଚନା : $(a + 2b)^3 = a^3 + 8b^3 + 6ab(a + 2b) \Rightarrow a^3 + 8b^3 = (a + 2b)^3 - 6ab(a + 2b)$

(ii) $x - y = 5$ ଓ $xy = 66$ ନେଇ $x^3 - y^3$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

5. $64x^3 - 125z^3$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯଦି -

(i) $4x - 5z = 16$ ଏବଂ $xz = 12$ ହୋଇଥାଏ ।

(ii) $4x - 5z = \frac{3}{5}$ ଏବଂ $xy = 6$ ହୋଇଥାଏ ।

6. ସରଳ କର ।

(i) $(2x+5)^3 - (2x-5)^3$

(ii) $(7x+5y)^3 - (7x-5y)^3 - 30y\,(7x+5y)(7x-5y)^3$

ସୂଚନା : $7x + 5y = a$ ଓ $7x - 5y = b$ ହେଲେ, $a - b = 10y$

(iii) $(3x+2y)\,(9x^2-6xy+4y^2) - (2x+3y)\,(4x^2-6xy+9y^2)$

(iv) $(2x-5)\,(4x^2+10x+25) - (5x+1)\,(25x^2-5x+1)$

7. ସରଳ କର ।

(i) $\frac{875\times875\times875+125\times125\times125}{875\times875-875\times125+125\times125}$

(ii) $\frac{678\times678\times678-234\times234\times234}{678\times678+678\times234+234\times234}$

## 4.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

ମନେପକାଅ ଯେ $3\times4=12$, ଏହି ଉକ୍ତିରୁ ଆମେ କହୁ, $12$ ର ଉତ୍ପାଦକ ହେଉଛନ୍ତି $3$ ଓ $4$ । ସେହିପରି ବୀଜଗଣିତରେ $(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ ହୋଇଥିବାରୁ, ଆମେ କହୁ $x^2-y^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ହେଲେ $x+y$ ଓ $x-y$ ।

*ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ କହିଲେ ଆମେ ବୁଝୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଦୁଇଟି ବା ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିବା । ଗୁଣନରେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ମୂଳ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ବୋଲି କୁହାଯାଏ ।*

ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ବେଳେ ଆମେ କେବଳ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସହଗ ଥିବା ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମଧ୍ୟରେ ସୀମିତ ରହିବା । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସହଗ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । $2x^2-y^2$ ରୂପକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ $(\sqrt{2}x+y)(\sqrt{2}x-y)$ ଭଳି ଉତ୍ପାଦକରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯିବ ନାହିଁ କାରଣ ଏଠାରେ ସହଗ ମଧ୍ୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିଛି ।

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହୋଇଛି ବୋଲି କୁହାଯିବ ଯଦି ମିଳିଥିବା କୌଣସି ଉତ୍ପାଦକ ନିମ୍ନତର ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ କିମ୍ବା ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗ $1$ ବା $-1$ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କିଛି ହୁଏ ନାହିଁ । ଏଣୁ $(x^2-4x)$ ର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ହେଉଛି $x(x-4)$ । ଅନ୍ୟପକ୍ଷେ $16x^4-1=(4x^2-1)(4x^2+1)$ କୁ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ ନାହିଁ, କାରଣ $4x^2-1$ କୁ ଅଧିକ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରି $(2x+1)(2x-1)$ ପାଇହେବ । ଏଣୁ $16x^4-1$ ର ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ହେଉଛି $16x^4-1=(x-1)(2x+1)(4x^2+1)$

ଉତ୍ପାଦୀକରଣ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆମେ ଏହି ପାଠରେ ଆଗରୁ ପଢ଼ିଥିବା ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ ଗୁଡ଼ିକର ଯଥାଯଥ ଉପଯୋଗ କରିବା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣମାନ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

## (1) ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

**ଉଦାହରଣ : 4. 8** ଉତ୍ପାଦକରେ ପରିଣତ କର ।

(i) $10a - 25$ (ii) $x^2y^3 + x^3y^2$

(iii) $5ab\,(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2)$ (iv) $a(b - c)^2 + b(b - c)$

**ସମାଧାନ :** (i) $10a - 25 = 5 \times 2a - 5 \times 5$

$= 5\,(2a - 5)$ ( 5 ଉଭୟ ପଦର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକ ହେତୁ)

ଏଣୁ 5 ଓ $2a - 5$ ହେଉଛି $10a - 25$ ର ଉତ୍ପାଦକ

(ii) $x^2y^3 + x^3y^2$ ହେଉଛି ପଦଦ୍ୱୟରେ $x^2y^2$ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ସର୍ବାଧିକ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

$\therefore\ x^2y^3 + x^3y^2 = x^2y^2 \times y + x^2y^2 \times x$

$= x^2y^2\,(y + x)$

ଏଣୁ $x, x^2, y, y^2, xy, x^2y, xy^2, x^2y^2$ ଓ $y + x$ ହେଉଛନ୍ତି $x^2y^3 + x^3y^2$ ର ଗୁଣନୀୟକ ।

(iii) ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ ଉଭୟ ପଦରେ $ax^2 + y^2$ ହେଉଛି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ।

$\therefore\ 5ab\,(ax^2 + y^2) - 6mn(ax^2 + y^2) = (ax^2 + y^2)\,(5ab - 6mn)$

(iv) $a(b - c)^2 + b(b - c) = (b - c) \times [a(b - c)] + (b - c) \times b$

$= (b - c) \times [a(b - c) + b]$

$= (b - c) \times [ab - ac + b]$

## (2) ଦୁଇଟି ବର୍ଗରାଶିର ପାର୍ଥକ୍ୟ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ, $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$. ଏଣୁ $x^2 - y^2$ ର ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକ ହେଉଛନ୍ତି $x + y$ ଓ $x - y$ ।

**ଉଦାହରଣ : 4.9** ଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $9x^2 - 16y^2$ (ii) $x^4 - 81y^4$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2$ (iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9$

**ସମାଧାନ :** (i) $9x^2 - 16y^2 = (3x)^2 - (4y)^2$ଯାହାକି ଦୁଇଟି ବର୍ଗରାଶିର ପାର୍ଥକ୍ୟ

$= (3x + 4y)\,(3x - 4y)$

(ii) $x^4 - 81y^4 = (x^2)^2 - (9y^2)$

$= (x^2 + 9y^2)\,(x^2 - 9y^2)$

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ $x^2 - 9y^2 = (x)^2 - (3y)^2$ ମଧ୍ୟ ଦୁଇଟି ବର୍ଗରାଶିର ପାର୍ଥକ୍ୟ

$x^4 - 81y^4 = (x^2 + 9y^2)\,[(x)^2 - (3y)^2]$

$= (x^2 + 9y^2)\,(x + 3y)\,(x - 3y)$

(iii) $a^4 - (2b - 3c)^2 = (a^2)^2 - (2b - 3c)^2$

$= [a^2 + (2b - 3c)]\ [a^2 - (2b - 3c)]$

$= (a^2 + 2b - 3c)\ (a^2 - 2b + 3c)$

(iv) $x^2 - y^2 + 6y - 9 \quad = x^2 - (y^2 - 6y + 9)$ (ଏହି ପାଦକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର)

$= (x)^2 - [(y)^2 - 2 \times y \times 3 + (3)^2]$

$= (x)^2 - (y - 3)^2$

$= [x + (y - 3)]\ [x - (y - 3)]$

$= (x + y - 3)\ (x - y + 3)$

### (3) ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗ ହେଉଥିବା ତ୍ରିପଦୀର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

**ଉଦାହରଣ : 4.10** ଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$ (ii) $x^6 - 8x^3 + 16$

**ସମାଧାନ :** (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2 \quad = (3x)^2 + 2\ (3x)\ (4y) + (4y)^2$

$= (3x + 4y)^2$

$= (3x + 4y)\ (3x + 4y)$

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଦୁଇଟିଯାକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଭିନ୍ନ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ହେଉଛି $(3x + 4y)$ ।

(ii) $x^6 - 8x^3 + 16 \quad = (x^3)^2 - 2(x^3)\ (4) + (4)^2$

$= (x^3 - 4)^2$

$= (x^3 - 4)\ (x^3 - 4)$

ପୁଣି, ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଦୁଇଟିଯାକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଭିନ୍ନ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ହେଉଛି $(3x + 4y)$ ।

### (4) ଦୁଇଟି ବର୍ଗର ପାର୍ଥକ୍ୟ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରୁଥିବା ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

**ଉଦାହରଣ : 4.11** ଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $x^4 + 4y^4$ (ii) $x^4 + x^2 + 1$

**ସମାଧାନ :** (i) $x^4 + 4y^4 \quad = (x^2)^2 + (2y^2)^2$

$= (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2\ (x^2)\ (2y^2) - 2\ (x^2)\ (2y^2)$

($2\ (x^2)\ (2y^2)$ କୁ ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କରି)

$= (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$

$= (x^2 + 2y^2 + 2xy)\ (x^2 + 2y^2 - 2xy)$

(ii) $x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + (1)^2 + 2x^2 - x^2$

( $x^2$ କୁ ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କରି)

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

## ନିଜକୁ ନିଜେ ପରଖିବା 4.9

ଉତ୍ପାଦୀକରଣ କର ।

1. $10xy - 15xz$
2. $abc^2 - ab^2c$
3. $6p^2 - 15pq + 27p$
4. $a^2(b - c) + b(c - b)$
5. $2a(4x - y)^3 - b(4x - y)^2$
6. $x(x + y)^3 - 3xy(x + y)$
7. $100 - 25p^2$
8. $1 - 256y^8$
9. $(2x + 1)^2 - 9x^2$
10. $(a^2 + bc)^2 - a^2(b + c)^2$
11. $25x^2 - 10x + 1 - 36y^2$
12. $49x^2 - 1 - 14xy + y^2$
13. $m^2 + 14m + 49$
14. $4x^2 - 4x + 1$
15. $36a^2 + 25 + 60a$
16. $x^6 - 8x^3 + 16$
17. $a^8 - 47a^4 + 1$
18. $4a^4 + 81b^4$
19. $x^4 + 4$
20. $9a^4 - a^2 + 16$
21. ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ଯଦି

(i) $6n = 23 \times 23 - 17 \times 17$ (ii) $536 \times 536 - 36 \times 36 = 5n$

---

### (5) ପୂର୍ଣ୍ଣଘନ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

**ଉଦାହରଣ : 4.12** ଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ (ii) $x^6 - 3x^4y^2 + 3x^2y^4 - y^6$

**ସମାଧାନ :** (i) $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$

$= (x)^3 + 3x^2(2y) + 3x(2y)^2 + (2y)^3$

$= (x + 2y)^3$

ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ତିନୋଟିଯାକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଭିନ୍ନ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ହେଉଛି $x + 2y$ ।

(ii) ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $(x^2)^3 - 3x^2y^2(x^2 - y^2) - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)^3$

$= [(x + y)(x - y)]^3$ [ଯେହେତୁ $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$]

$= (x + y)^3 (x - y)^3$

**(6) ଦୁଇଟି ଘନରାଶିର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ ରୂପକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ**

ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଗୁଣନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ତୁମେ ଜାଣିଛ ଯେ

$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = x^3 + y^3$ ଏବଂ

$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 - y^3$

ଏଣୁ $x^3 + y^3$ ର ଗୁଣନୀୟକ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛି $x + y$ ଓ $x^2 - xy + y^2$

ପୁନଶ୍ଚ $x^3 - y^3$ ର ଗୁଣନୀୟକ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛି $x^2 + xy + y^2$ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ବିଚାର କର :

**ଉଦାହରଣ : 4.13** ଗୁଣନୀୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $64a^3 + 27b^3$  (ii) $8x^3 - 125y^3$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343$  (iv) $a^4 - a^{13}$

**ସମାଧାନ :** (i) $64a^3 + 27b^3 = (4a)^3 + (3b)^3$

$= (4a + 3b)[(4a)^2 - (4a)(3b) + (3b)^2]$

$= (4a + 3b)(16a^2 - 12ab + 9b^2)$

(ii) $8x^3 - 125y^3 = (2x)^3 - (5y)^3$

$= (2x - 5y)[(2x)^2 + (2x)(5y) + (5y)^2]$

$= (2x - 5y)(4x^2 + 10xy + 25y^2)$

(iii) $8(x + 2y)^3 - 343 = [2(x + 2y)]^3 - (7)^3$

$= [2(x + 2y) - 7][2^2(x + 2y)^2 + 2(x + 2y)(7) + 7^2]$

$= (2x + 4y - 7)(4x^2 + 16xy + 16y^2 + 14x + 28y + 49)$

(iv) $a^4 - a^{13} = a^4(1 - a^9)$ (ପଦ ଦୁଇଟିରେ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହେତୁ)

$= a^4[(1)^3 - (a^3)^3]$

$= a^4(1 - a^3)(1 + a^3 + a^6)$

$= a^4(1 - a)(1 + a + a^2)(1 + a^3 + a^6)$

[ଯେହେତୁ $1 - a^3 = (1 - a)(1 + a + a^2)$]

## ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.4

ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

1. $a^3 + 216b^3$
2. $a^3 - 343$
3. $x^3 + 12x^2y + 48xy^2 + 64y^3$
4. $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

5. $8x^3 - 125y^3 - 60x^2y + 150xy^2$
6. $64k^3 - 144k^2 + 108k - 27$
7. $729\ x^6 - 8$
8. $x^2 + x^2\ y^6$
9. $16a^7 - 54ab^6$
10. $27b^3 - a^3 - 3a^2 - 3a - 1$
11. $(2a - 3b)^3 + 64c^3$
12. $64x^3 - (2y - 1)^3$

---

### (7) ମଧ୍ୟମ ପଦ ଭାଙ୍ଗି ତ୍ରିପଦୀ ରାଶିର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ

ତୁମେ ପଢ଼ିଛ ଯେ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad = 1.x^2 + (a + b)x + ab$

ଏବଂ $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$

ସାଧାରଣ ଭାବରେ, ଡାହାଣ ପାଖରେ ଥିବା ରାଶିଗୁଡ଼ିକ $Ax^2 + Bx + C$ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ଅଟନ୍ତି । ଏହି ରାଶିର ଉତ୍ପାଦୀକରଣ ପାଇଁ $x^2$ ର ସହଗକୁ ଶେଷ ପଦ ସହ ଗୁଣନ କରାଯାଏ ଓ ଗୁଣଫଳର ଏପରି ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ଯାହାର ସମଷ୍ଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ (ମଝିପଦ)ର ସହଗ ସହ ସମାନ । ଅନ୍ୟ କଥାରେ ଆମକୁ $AC$ ର ଏପରି ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯାହାର ସମଷ୍ଟି ହେଉଛି $B$ । ନିମ୍ନରେ ଉଦାହରଣରୁ ପ୍ରଣାଳୀଟି ସହଜରେ ବୁଝିହେବ ।

**ଉଦାହରଣ : 4.14** ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x^2 + 3x + 2$ (ii) $x^2 - 10xy + 24y^2$

(iii) $5x^2 + 13x - 6$ (iv) $3x^2 - x - 2$

**ସମାଧାନ :** (i) ଏଠାରେ $A = 1, B = 3$ ଓ $C = 2$; ଏଣୁ $AC = 11 \times 2$ ଏଣୁ ଆମକୁ $2$ ର ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଯାହାର ସମଷ୍ଟି ହେଉଛି $3$ ।

ନିଶ୍ଚିତ ଭାବରେ, $1 + 2 = 3$

(ଅର୍ଥାତ୍ $AC$ ବା $2$ ର ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟକ ହେଉଛନ୍ତି $1$ ଓ $2$)

∴ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍

$$\begin{aligned} & x^2 + (1 + 2)\,x + 2 \\ = \; & x^2 + x + 2x + 2 \\ = \; & x(x + 1) + 2(x + 1) \\ = \; & (x + 1)(x + 2) \end{aligned}$$

(ii) ଏଠାରେ $AC = 24y^2$ ଏବଂ $B = -10y$

$24y^2$ ର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟକର ଯୋଗଫଳ $-10y$, ତାହା ହେଉଛି $-4y$ ଓ $-6y$ ।

∴ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍

$$\begin{aligned} & x^2 - 4xy - 6xy + 24\,y^2 \\ & = x(x - 4y) - 6y(x - 4y) \\ & = (x - 4y)(x - 6y) \end{aligned}$$

(iii) ଏଠାରେ $AC = 5 \times (-6)$ ଏବଂ $B = 13$

$-30$ ର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟକ ଦୁଇଟିର ଯୋଗଫଳ $13$ , ସେ ଦୁଇଟି ହେଉଛନ୍ତି $15$ ଓ $-2$ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଆମେ ଲେଖିବା

$$5x^2 + 15x - 2x - 6$$
$$= 5x(x+3) - 2(x+3)$$
$$= (x+3)(5x-2)$$

(iv) ଏଠାରେ $AC = 3 \times (-2) = -6$ ଏବଂ $B = -1$

$-6$ ର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ଗୁଣନୀୟର ସମଷ୍ଟି $(-1)$, ସେ ଦୁଇଟି ହେଉଛି $(-3)$ ଓ $2$ ।

$\therefore$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଆମେ ଲେଖିବା

$$3x^2 - 3x + 2x - 2$$
$$= 3x(x-1) + 2(x-1)$$
$$= (x-1)(3x+2)$$

## ଆସ ନିଜେ ନିଜକୁ ପରଖିବା 4.5

ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

1. $x^2 + 11x + 24$
2. $x^2 - 15xy + 54y^2$
3. $2x^2 + 5x - 3$
4. $6x^2 - 10xy - 4y^2$
5. $2x^4 - x^2 - 1$
6. $x^2 + 13xy - 30y^2$
7. $2x^2 + 11x + 14$
8. $10y^2 + 11y - 6$
9. $2x^2 - x - 1$
10. $(m-1)(1-m) + m + 109$
11. $(2a-b)^2 - (2a-b) - 30$

    ସୂଚନା : ନିଅ $2a - b = x$
12. $(2x+3y)^2 - 2(2x+3y)(3x-2y) - 3(3x-2y)^2$

    ସୂଚନା : ନିଅ $2x + 3y = a$ ଏବଂ $3x - 2y = b$

## 4.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ଓ ଲ:ସା:ଗୁ:

ତୁମେ ପାଟୀଗଣିତରେ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: (ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିଛ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $8$ ଓ $12$ ର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକମାନ $1, 2$ ଓ $4$ ହେତୁ $8$ ଓ $12$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: ଅର୍ଥାତ୍ ବୃହତ୍ତମ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହେଉଛି $4$ ।

*ସେହି ପ୍ରଣାଳୀରେ, ବୀଜଗଣିତରେ ଦୁଇଗୋଟି ବା ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ବା ଗ:ସା:ଗୁ: ପାଇବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତ ତଥା ବୃହତ୍ତମ ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ଗୁଣନୀୟକ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଯାହାକି ଦତ୍ତ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇଥିବ, ତାହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ।*

*ସେହି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବା ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ହେବ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ।* ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $4(x+1)^2$ ଏବଂ $6(x+1)^3$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି $2(x+1)^2$ ।

ଏକପଦୀ (ବା ମନୋମିଆଲ୍)ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ପାଇବା ପାଇଁ ଆମେ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ଏବଂ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଚଳ ବା ଚଳଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରୁ ଯାହାକି ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇଥିବ । ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ଗୁଣନୀୟକ ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ଓ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇଥିବା ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଚଳ ବା ଚଳମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ହେବ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ମନୋମିଆଲ୍ $12x^2y^3$, $18xy^4$ ଓ $24x^3y^5$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି $6xy^3$ । କାରଣ $12, 18$ ଓ $24$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି $6$ ଏବଂ ସମସ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇଥିବା ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଚଳ ହେଉଛି $x$ ଓ $y^3$ ।

ଆସ କେତେକ ଉଦାହରଣର ଆଲୋଚନା କରିବା :

**ଉଦାହରଣ : 4.15** ଗ:ସା:ଗୁ: ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $4x^2y$ ଓ $x^3y^2$ (ii) $(x-2)^3(2x-3)$ ଓ $(x-2)^2(2x-3)^3$

**ସମାଧାନ :** (i) ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗ $4$ ଓ $1$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି $1$ ।

ଯେହେତୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ $x$ ଅନ୍ୟୁନ ଦୁଇଥର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ରହିଛି ଏବଂ $y$ ଅନ୍ୟୁନ ଏକ ଥର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ରହିଛି, ଏଣୁ ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି

$1 \times x^2 \times y$ ଅର୍ଥାତ୍ $x^2y$

(ii) ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗ $1$ ଓ $1$ ର ଗ:ସା:ଗୁ: $1$ ।

ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ, $x-2$ ଅତିକମ୍‌ରେ ଦୁଇଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ରହିଛି ଏବଂ $2x-3$ ଅତିକମ୍‌ରେ ଏକଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବେ ରହିଛି । ଏଣୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଦ୍ୱୟର ଗ:ସା:ଗୁ: ହେଉଛି

$$1 \times (x-2)^2 \times (2x-3) \; i.e. \; (x-2)^2(2x-3)$$

ଉଦାହରଣ 4.15(ii) ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ଆମେ କହିପାରୁ ଯେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କାର୍ଯ୍ୟ ସହଜ ହୋଇଥିଲେ, ଆମେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଉତ୍ପାଦକମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରୁ । ତା'ପରେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ସହ ସମସ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହୋଇଥିବା ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକକୁ ଗୁଣନ କଲେ, ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ମିଳିଥାଏ । ଅଧିକ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବା ପାଇଁ ଉଦାହରଣ ପ୍ରତିଧାନ ଦିଅ ।

**ଉଦାହରଣ : 4.16** ନିମ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x^2-4$ ଏବଂ $x^2+4x+4$

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2$ ଏବଂ $6x^3+6x^2+72x$

**ସମାଧାନ :**

(i) $x^2-4=(x+2)(x-2)$

$x^4+4x+4=(x+2)$

ସଂଖ୍ୟାତ୍ମକ ସହଗମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: $=1$

ଅନ୍ୟ ଗୁଣନୀୟକମାନଙ୍କର ଗ:ସା:ଗୁ: $=(x+2)=x+2$

ଏଣୁ ଗ:ସା:ଗୁ: $=x+2$

(ii) $4x^4-16x^3+12x^2=4x^2(x^2-4x+3)$

$$=4x^2(x-1)(x-3)$$